Διδακτική ενότητα: Διάταξη πραγματικών αριθμών

1. Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=x^4+\dfrac{x^4-4}{x^2-2}$, $x\neq \pm\sqrt{2}$.

α. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=x^4+x^2+2$

β. i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\mathrm{A}>0$ για κάθε $x\neq\pm\sqrt{2}$.

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

2. Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $\mathrm{A}=\alpha^2+\alpha+\dfrac{1}{4}$ και $\mathrm{B}=(\beta-3)^2$

α. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}+\mathrm{B}\geq 0$ για κάθε $a,\beta\in\Re$

β. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β έτσι, ώστε $\mathrm{A}+\mathrm{B}=0$

γ. Υπάρχουν τιμές των $a,\beta\in\Re$, ώστε $\mathrm{A}=-\mathrm{B}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $K\geq\Lambda$,για κάθε τιμή των α,β.

β. Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;

4. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α,β με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 4$.

β) $\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right)\geq 16$.

5. Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

β) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

i. $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha}$.

ii. $\mathrm{A}\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $\mathrm{A}=6$;

6. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$.

β) Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

7. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) x + y β) 2x-3y γ) $\frac{x}{y}$

8. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

9. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$ β) $\alpha - \beta$

10. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

11. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 .$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

12. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$ β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$