ΑΝΑΛΥΣΗ

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση

Έστω *A* ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το *A*** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*. Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

2. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης *f* με πεδίο ορισμού το A;

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα $x \in \mathrm{A}$, λέγεται σύνολο τιμών της *f* και συμβολίζεται *f*(A). Είναι δηλαδή :

$$f(\mathrm{A}) = \{ y \,/\, y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in \mathrm{A} \}$$

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f:A$\to\mathbb{R}$; Πως τη συμβολίζουμε;

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει y=*f*(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων Μ(x, *f*(x)), $x \in \mathrm{A}$ λέγεται γραφική παράσταση της *f* και συμβολίζεται συνήθως με C_f

4. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

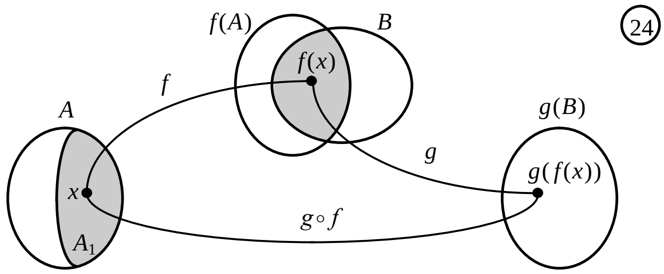
Δύο συναρτήσεις *f* και *g* λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού *A* και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

5. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g.

Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού *A*, *B* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g***, και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{gof}$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της *f* για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της *g*. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

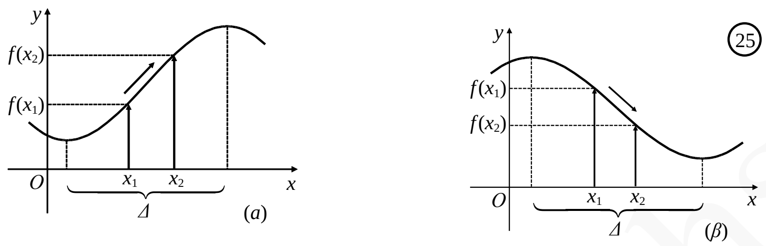
Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

6. Πότε μια συνάρτηση λέγεται “γνησίως αύξουσα συνάρτηση” και πότε “γνησίως φθίνουσα συνάρτηση” .

Μια συνάρτηση f λέγεται(1) :

● **γνησίως αύξουσα** σ’ ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)

● **γνησίως φθίνουσα** σ’ ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)



7. Τι ονομάζουμε “μέγιστο”, “ελάχιστο”, συνάρτησης

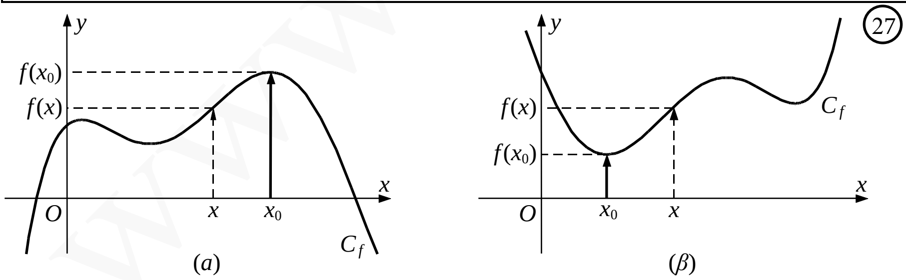
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad \text{(Σχ. 27α)}$$

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad \text{(Σχ. 27β).}$$



8. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \Re$ λέγεται **συνάρτηση $1-1$**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad x_1 \neq x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(1) Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς,:

● **αύξουσα** σ’ ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

● **φθίνουσα** σ’ ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad f(x_1)=f(x_2), \quad \text{τότε} \quad x_1=x_2.$$

9. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια «1-1» συνάρτηση. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της *f*; Πως τη συμβολίζουμε;

Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών *f*(A) της *f*, υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε $y\in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της *f* και συμβολίζεται f^{-1}.

Επομένως ισχύει: $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

10. Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = x είναι άξονας συμμετρίας των *f* και *f*$^{-1}$.

Ας πάρουμε μια 1-1 συνάρτηση *f* και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C΄ των *f* και *f*$^{-1}$ αντίστοιχα, στο ίδιο σύστημα αξόνων. Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της *f*$^{-1}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά, είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις C και C΄των συναρτήσεων *f* και *f*$^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄

11. Έστω το πολυώνυμο P(x) και $x_0\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0).}$$

12. Έστω P(x),Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x) \neq 0$
Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0) \neq 0}$$

13. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής
Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

14. Τι ονομάζουμε ακολουθία
Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^* \to \mathbb{R}$.

15. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0
Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

16. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο A_f
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** στο πεδίο ορισμού της, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A_f.

17. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α,β)
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

18. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β]

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

19. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

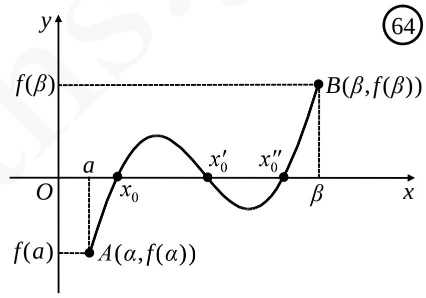
$f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

20. Να εξηγήσετε γεωμετρικά το Θ. Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$.

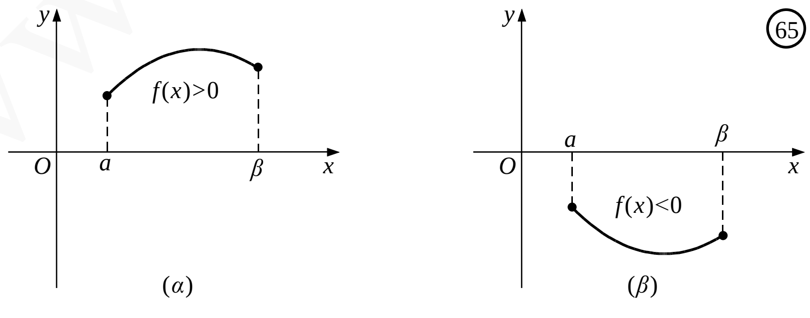
Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



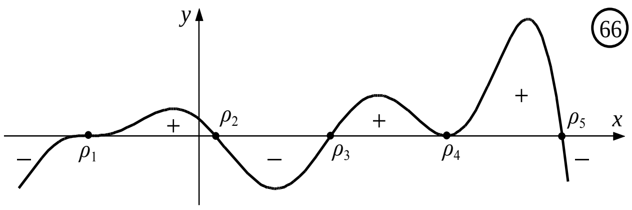
ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ* και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα *Δ*. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

21. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και να το αποδείξετε.

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$f(x_0)=\eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

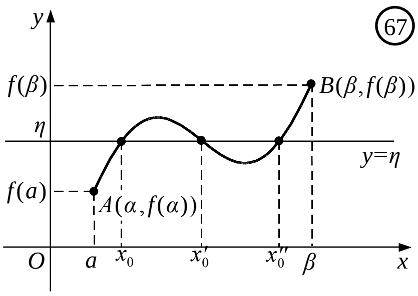
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

22. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή *M* και μια ελάχιστη τιμή *m*.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}$, **για κάθε** $\boldsymbol{x \in [\alpha,\beta]}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m, M]}$, όπου *m* η ελάχιστη τιμή και *M* η μέγιστη τιμή της.

- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου

$$\mathrm{A} = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A)

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α;

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)},$$

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Μια συνάρτηση *f* λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο $\boldsymbol{x_0}$ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της *f* στο $\boldsymbol{x_0}$** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f'(x_0)}$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

3. Να αποδείξετε ότι Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x-x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

4. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A_f ;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

5. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) ;

Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

6. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

7. Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού A. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης f ;

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η *f* είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$f' : A_1 \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της *f* ή απλά παράγωγος της *f*.

***8.* Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού A. Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης *f*;**

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 (το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού A της *f* στα οποία η *f* είναι παραγωγίσιμη) είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων , τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται f''

9. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(\chi) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως, $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$.

10. Έστω η συνάρτηση f(x)=x. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει f΄(x)=1, δηλαδή (x)΄=1

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως, $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

11. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f\,'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

Οπότε $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x)=\sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

13. Έστω συνάρτηση $f(x)=ημx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=συνx$, δηλαδή $(ημx)'=συνx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x\in\Re$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{ημ(x+h)-ημx}{h}=\frac{ημx\cdot συνh+συνx\cdot ημh-ημx}{h}$$

$$=ημx\cdot\frac{(συνh-1)}{h}+συνx\cdot\frac{ημh}{h}.$$

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\frac{ημh}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h}=0$,

έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=ημx\cdot 0+συνx\cdot 1=συνx$.

Δηλαδή, $(ημx)'=συνx$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=συνx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-ημx$, δηλαδή $(συνx)'=-ημx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x\in R$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{συν(x+h)-συνx}{h}=\frac{συνx\cdot συνh-ημx\cdot ημh-συνx}{h}$$

$$=συνx\cdot\frac{συνh-1}{h}-ημx\cdot\frac{ημh}{h},$$

Οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(συνx\cdot\frac{συνh-1}{h}\right)-\lim\limits_{h\to 0}\left(ημx\cdot\frac{ημh}{h}\right)$

$$=συνx\cdot 0-ημx\cdot 1=-ημx.$$

Δηλαδή, $(συνx)'=-ημx$.

15. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

17. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathrm{R}_1=\mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

18. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

19. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$, δηλαδή $(\alpha^{x})'=\alpha^{x}\ln\alpha$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha .$$

20. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι·

— αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως, $y' = (\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$

και άρα $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

21. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y=*f*(x), τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του *y* ως προς το *x* στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

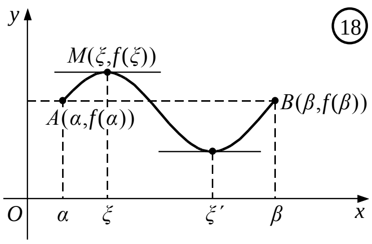
22. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να το εξηγήσετε γεωμετρικά

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των *x*.



23. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής και να το εξηγήσετε γεωμετρικά

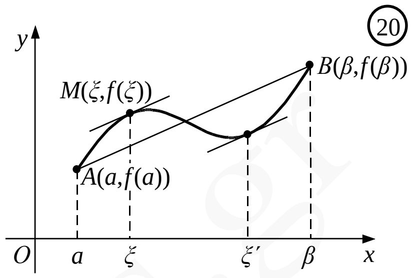
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *ΑΒ*.



24. Συνέπεια Θ.Μ.Τ:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **f΄(x)=0 για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το *ξ* είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

25. Πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος:

Έστω δυο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **f΄(x)=g΄(x) για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,**

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

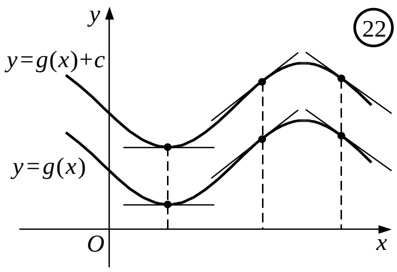
$f(x) = g(x) + c$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



26. Παράγωγος και μονοτονία:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

27. Πότε μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*

28. Πότε μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε

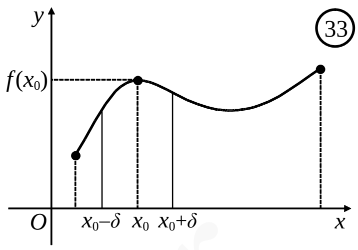
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της *f*

29. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και

$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του *Δ*, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.
Επομένως, οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα *Δ* είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

3. **Τα άκρα του *Δ*** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *εσωτερικά* σημεία του *Δ* στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα *Δ*.

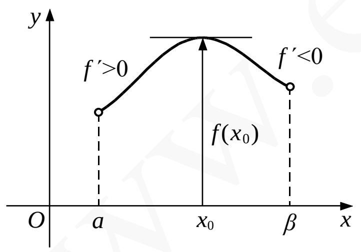
30. Κριτήριο για τα ακρότατα

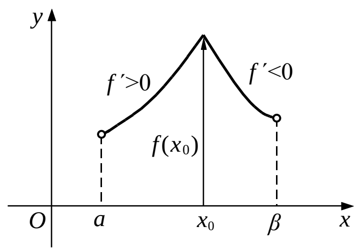
Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, *η* f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$ (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$ (2).





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$,

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα

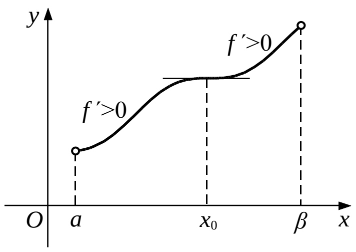
τοπικό μέγιστο αυτής.

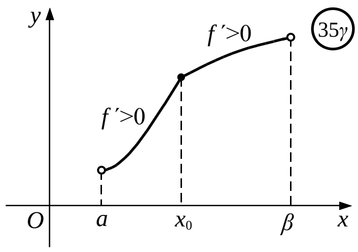
32. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

33. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;

Έστω μία συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ’ ένα διάστημα *Δ* και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

• Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

• Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

34. Πότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της *f*

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

35. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

36. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

37. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

38. Να διατυπώσετε τους κανόνες de l’Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathrm{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \mathrm{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

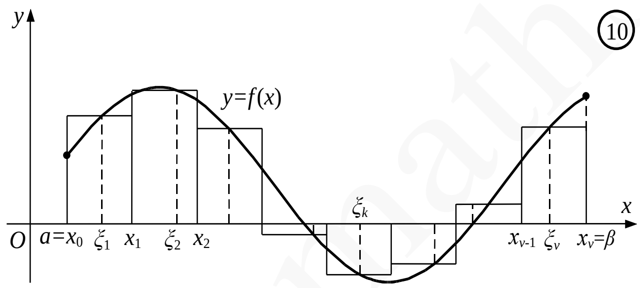
1. Έστω *f* μια ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της *f* στο *Δ*[1]** ονομάζεται κάθε συνάρτηση *F* που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και ισχύει

$F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

2. Πως ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα;

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε **αυθαίρετα** ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$$ [2].

Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (3) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ”.

Το παραπάνω όριο (3) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β”. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

(1) Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

(2) Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN

3. Να αποδείξετε ότι: Έστω *f* μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- **Όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c, c ∈ ℝ, είναι παράγουσες της f στο Δ και**
- **Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c, c ∈ ℝ**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $x\in\Re$,είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*, αφού

$$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in\Delta.$$

• Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της f στο *Δ*. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε

$$G(x)=F(x)+c,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\Delta.$$

4. Να διατυπώσετε το θεώρημα ολοκλήρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η *G* είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in$ R τέτοιο, ώστε

$$G(x)=F(x)+c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$

Επομένως,

$$G(x)=F(x)+G(\alpha),$$

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$$

και άρα

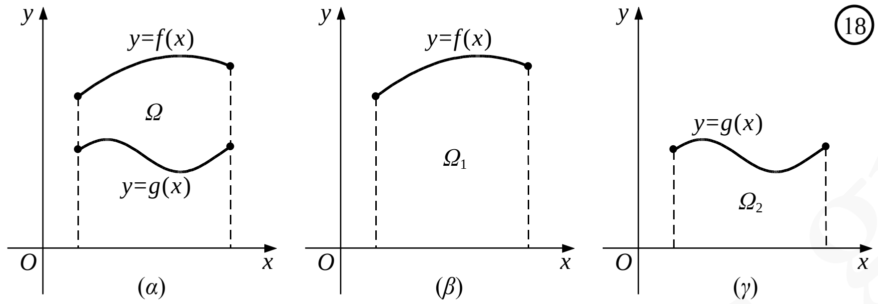
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha).$$

5. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από δύο θετικές συναρτήσεις:

Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18).

Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx\,.$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx} \qquad (1)$$

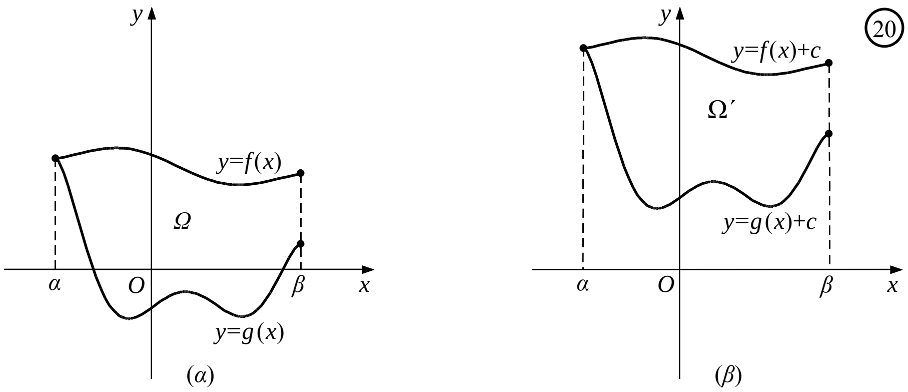
6. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις:

Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β] θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+\mathrm{c}\geq g(x)+\mathrm{c}$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (σχ.α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (σχ.β)



Επομένως σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega')=\int_\alpha^\beta[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx.$$

Άρα,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx}$$

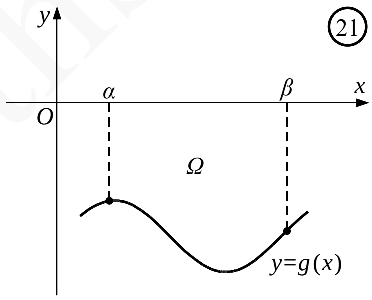
7. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από συνάρτηση g(x) $\leq$ 0,τον άξονα x’x και τις ευθείες x=α και x=β, με α < β

Έτσι αν για τη συνεχή συνάρτηση g ισχύει g(x) $\leq$ 0 για κάθε x $\in$ [α,β], τότε
$E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ο άξονας x’x είναι η γραφική παράσταση της f(x) = 0
Έχουμε λοιπόν

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx=\int_\alpha^\beta[-g(x)]dx=$$
$$=-\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

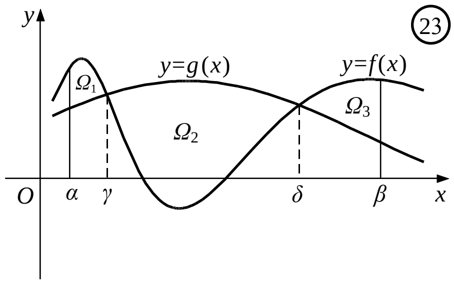


Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\boxed{E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx}$$

8. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις που δεν διατηρούν σταθερό πρόσημο.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων f,g στο διάστημα [α,β] όταν η διαφορά f(x) – g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β] και τις ευθείες x=α και x=β είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$



Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1,Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega_1) + \mathrm{E}(\Omega_2) + \mathrm{E}(\Omega_3) \\
&= \int_\alpha^\gamma (f(x) - g(x))dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x))dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x))dx \\
&= \int_\alpha^\gamma | f(x) - g(x) | dx + \int_\gamma^\delta | f(x) - g(x) | dx + \int_\delta^\beta | f(x) - g(x) | dx \\
&= \int_\alpha^\beta | f(x) - g(x) | dx
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega) = \int_\alpha^\beta | f(x) - g(x) | dx}$$

Βιβλιογραφία:

Μαθηματικά Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ Λυκείου ΟΕΔΒ 2007

Ανδρεαδάκης Σ.-Κατσαργύρης Β.-Μέτης Σ.-Μπρουχούτας Κ.-Παπασταυρίδης Σ.-Πολύζος Γ.