1. Η έννοια της συνάρτησης-Πεδίο ορισμού-Σύνολο τιμών

1. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\Re$, στο οποίο ορίζεται καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\sqrt{e^x-\eta\mu 2x}+\sqrt{1-\ln x}$ **β.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

γ. $f(x)=\dfrac{x+1}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}$

δ. f(x) = $\dfrac{x-2}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ **ε.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x-x^2}}$ **ζ.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x-2|}}{2x-4-|x-1|}$

η. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{9^x-4\cdot 3^{x+1}+27}$ **θ.** $f(x)=\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x+3}$

2. Έστω η συνάρτηση f(x)=$\sqrt{ax^2+2(a+2)x+8}$ όπου α>0. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το R

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x<1 \\ 2x+2, & \text{αν } \chi\geq 1 \end{cases}$ και α πραγματικός αριθμός στο διάστημα (0.1) . Να προσδιορίσετε τον α , ώστε να ισχύει :

$$\left[f(a)+f(a+1)\right]\left[af(\frac{1}{a})+f(\frac{1}{a+1})\right]=1$$

4. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις , να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\Re$ για τις οποίες η εξίσωση f(x)=λ έχει μία τουλάχιστον λύση. Στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών τους

α. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ **β.** $f(x)=\dfrac{5x}{x+2}, x>0$ **γ.** $f(x)=3-|x|$

5. Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ τέτοια ώστε $3f(x)+f(-x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

για κάθε $x\in\Re$. Να βρεθεί ο τύπος της f

6. Δύο σημεία Α(x, 0) και Β(0,y) κινούνται πάνω στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, έτσι ώστε να ορίζουν με το σημείο Κ(2,1) τρίγωνο ορθογώνιο στο Κ Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ ως συνάρτηση του x

2. Γραφική παράσταση συνάρτησης

1. Δίνεται $f(x)=\dfrac{ax-1}{x-2}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,-3). Να βρεθεί η τιμή του $a\in\Re$ και στη συνέχεια τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

2.[Δίνεται $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ Να βρεθεί η σχετική θέση της C_f με τον άξονα x'x

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f^3(x)-2f^2(x)+5f(x)=-e^{2x}-e^x$ για κάθε x πραγματικό. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον x'x

4. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^4+1$ και $g(x)=x^2+1$

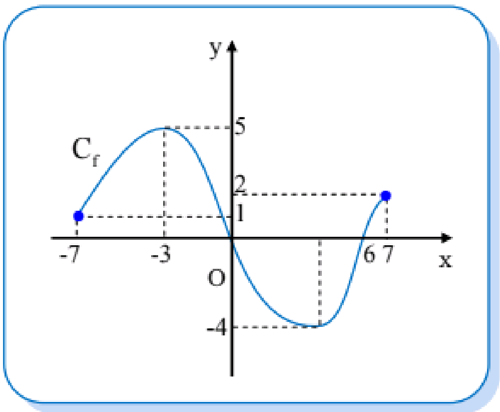
5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού Α

α. Να βρείτε το σύνολο Α

β. Να βρείτε το σύνολο f(A)

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)=5f(x)$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$

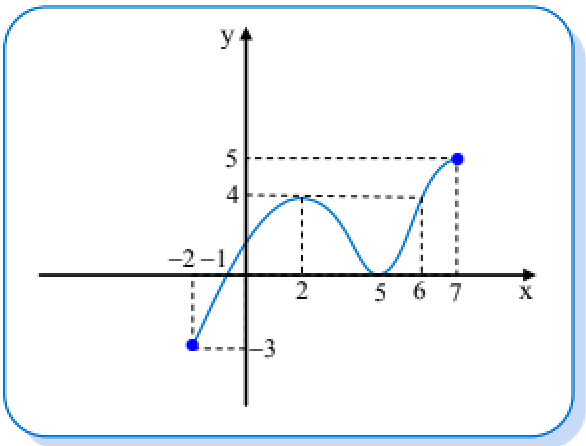


5. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=0$ και $f(x)=4$

γ. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$ και $f(x)\leq 4$



3. Ισότητα συναρτήσεων-Πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων

1.Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ είναι ισες. Αν όχι , να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο Α του $\Re$,στο οποίο f(x)=g(x) για κάθε x στο A

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\Re$. Αν ισχύει $\dfrac{f(x)}{2+|f(x)|}=\dfrac{g(x)}{2+|g(x)|}$ για κάθε x πραγματικό, να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το R. Αν ισχύει $(f(x)+g(x))[(f(x)+g(x))+4]=2[f(x)g(x)-4]$ να αποδείξετε ότι f=g

4. Δίνονται $f(x)=\begin{cases}x^2, x<1\\ 2x, x\geq 1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x-1, x\leq 2\\ -x^2, x>2\end{cases}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f+g και $\dfrac{f}{g}$

5. Αν $f(x)=2x-1$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, να οριστούν οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$

6. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα Δ=[2,8], να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g(x)=f(x+2)-f(2x+1)

7. Αν g(x)=3x+1 και $(g\circ f)(x)=x^2+x+1$,να βρείτε τον τύπο της πολυωνυμικής συνάρτησης f

8.Αν $f(x)=1+e^x$ και $(g\circ f)(x)=3x+e^{2-x}$ με x πραγματικό, να βρείτε τον τύπο της $g:(1,+\infty)\to\Re$

9. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:(-2,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(\ln(g(x))=x^2-3, x\in(e^{-2}-2,+\infty)$και g(x)=x+2

10. Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ τέτοια ώστε $(f\circ f)(x)=\dfrac{1}{4}x$ για κάθε $x\in\Re$

Να αποδείξετε ότι: **α.** $f(\dfrac{1}{4}x)=\dfrac{1}{4}f(x)$ για κάθε $x\in\Re$ **β.** f(0)=0

4. Μονοτονία- ακρότατα συναρτήσεων(ολικά)

1.Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=2x^3-1$ **β**. $f(x)=-x^3-3x+2$ **γ.** $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ **δ.** $f(x)=2e^{3-x}+1$

ε. $f(x)=\begin{cases}3x-1, x<1\\-2x, x\geq 1\end{cases}$

2.Έστω $f,g:\Re\to\Re$. Αν f γνησίως φθίνουσα και $f\circ g$ γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι g γνησίως φθίνουσα

3.Έστω f με πεδίο ορισμού R , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα . Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση g(x)=f(3x-2)-f(1-2x)

4.Έστω f με πεδίο ορισμού R , για την οποία ισχύει $f^3(x)+e^{f(x)}+1=x$, για κάθε x πραγματικό. Να δείξετε ότι f γνησίως αύξουσα

5.Έστω f με πεδίο ορισμού R και f(0)=0 , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και g(x)=$\dfrac{f(x)}{e^x-1}$ με $x\in\Re^*$. Να δείξετε ότι g(x)<0 για κάθε $x\in\Re^*$

6.Έστω f γνησίως μονότονη στο R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,5) και B(5,-2)

- **a.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
- **b.** Να δείξετε ότι $f\circ f$ γνησίως αύξουσα
- **c.** Να λύσετε την ανίσωση $f(f(e^x))<-2$

7.Δίνονται f , g με πεδίο ορισμού το R με f γνησίως φθίνουσα και g γνησίως αύξουσα και f(x)>0 και g(x)>0 για κάθε x πραγματικό.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h=\dfrac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα

β. Να λύσετε την $f(x^3)g(2x)-f(2x)g(x^3)<0$

8.Αν f με πεδίο ορισμού το R είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, να λύσετε την εξίσωση

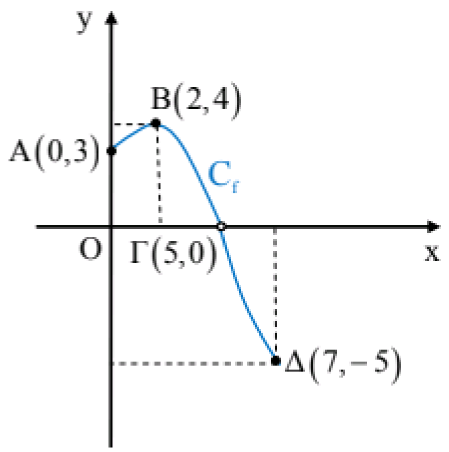
$$f(x)+f(5x)=f(3x)+f(7x)$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\Re$ με $f(x)=x^2-2x+2$ και $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ για κάθε x πραγματικό.

α. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

β. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x=1

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f : A \to \Re$. Το σημείο Γ(5,0) δεν ανήκει σε αυτήν.



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f και τα σύνολα τιμών των f και $|f|$

β. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις f και $|f|$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ολικά τους ακρότατα

****

Μονοτονία συνάρτησης _Ερωτήματα θεμάτων προηγούμενων ετών

1. **(2001-3ο)** Για μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R , ισχύει ότι: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε x πραγματικό με β, γ πραγματικούς και $\beta^2<3\gamma$
   a. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 8)
   b. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο (0,1) (μονάδες 7)

2. **(2002-3ο)** Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίου ορισμού το R . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.
   a. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1 (μονάδες 7)
   b. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα(μονάδες 18)

3. **(2003-3ο)** Έστω $f(x)=x^5+x^3+x$
   a. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση(μονάδες 6)
   b. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(x+1)$ για κάθε x πραγματικό (μονάδες 6)
   c. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} (μονάδες 5)
4. **(2003 επαναληπτικές-4ο)** Δίνεται f ορισμένη στο R με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε x πραγματικό.
   a. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη(μονάδες 8)
   b. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα.(μονάδες 8)

c. Έστω $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον x'x , σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0 (μονάδες 9)

5. (2004-2ο) Δίνεται $f(x)=x^2\ln x$

a. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f (μονάδες 10)

b. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 7)

6. (2006-4ο) Δίνεται $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln x$

a. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f (μονάδες 8)

b. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 5)

c. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g(x)=lnx στο A(α,lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $h(x)=e^x$ στο $B(\beta,e^\beta)$ με β πραγματικό ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 (μονάδες 9)

d. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες. (μονάδες 3)

7. (2007 επαναληπτικές-3ο) Δίνεται $f(x)=e^x-e\ln x$ με x>0

a. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ (μονάδες 10)

b. Να αποδειχθεί ότι $f(x)\geq e$ για κάθε x>0 (μονάδες 7)

8. (2009-3ο) Δίνεται $f(x)=e^x-\ln(x+1)$ με x>-1

a. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-1,0] και γνησίως αύξουσα στο [0,+oo) (μονάδες 6)

b. αν β,γ $\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$\frac{f(\beta)-1}{\chi-1}+\frac{f(\gamma)-1}{\chi-2}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)

(μονάδες 6)

9. (2010- 3ο) Δίνεται $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ με x πραγματικό

a. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f (μονάδες 5)

b. Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ (μονάδες 7)

10. (2010-3ο) Δίνεται f(x)=(x-2)lnx+x-3 με x>0

a. Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και γνησίως αύξουσα στο [1,+oo) (μονάδες 5)

b. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες (μονάδες 6)