

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τα τρίγωνα ταξινομούνται σε

- **σκαληνά, ισοσκελή και ισοπλευρά**, ως προς τις πλευρές τους.
- **οξυγώνια, ορθογώνια και αμβλυγώνια**, ως προς τις γωνίες τους.

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια** στοιχεία του, ενώ οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη του λέγονται **δευτερεύοντα** στοιχεία.

Δύο **τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΠΠ).
- Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΠ).
- Και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

Ειδικότερα δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο οποιεσδήποτε ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος.

Στον **κύκλο**:

- Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.
- Δύο χορδές είναι ίσες, αν και μόνον αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής:
 - διέρχεται από το κέντρο του κύκλου,
 - είναι μεσοκάθετος της χορδής,
 - διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικοί **γεωμετρικοί τόποι** είναι: ο **κύκλος**, η **μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος και η **διχοτόμος** γωνίας.

- Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του.
- Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας, που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Δύο σχήματα Σ , Σ' λέγονται **συμμετρικά** ως προς ένα σημείο O ή μια ευθεία ϵ , όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ , ως προς το O ή την ϵ και αντίστροφα.

Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο:

- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Βασική συνέπεια:

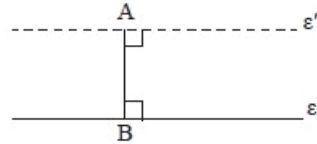
- Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, τότε θα είναι και $\beta = \gamma$.
- Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και διάμεσος ή διχοτόμος και ύψος ή διάμεσος και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Δύο ευθείες ενός επιπέδου

- ταυτίζονται όταν έχουν 2 κοινά σημεία.
- τέμνονται όταν έχουν 1 κοινό σημείο.
- είναι **παράλληλες** όταν δεν έχουν κοινό σημείο.

Από σημείο A εκτός ευθείας ε



- **υπάρχει** ευθεία $\epsilon' // \epsilon$.
- δεχόμαστε αξιωματικά ότι η ϵ' είναι **μοναδική**. (Αίτημα παραλληλίας)

Δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες αν:

- είναι **κάθετες** στην ίδια ευθεία ϵ .
- είναι **παράλληλες** προς τρίτη ευθεία ϵ .
- τέμνονται από μια τρίτη ευθεία και σχηματίζουν:

τις εντός εναλλάξ γωνίες τους **ίσες**.

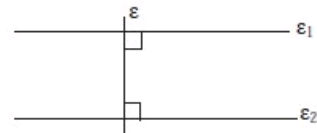
τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **ίσες**.

τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **παραπληρωματικές**.

Έστω $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και ϵ μια τρίτη ευθεία.

Αν $\epsilon \perp \epsilon_1$ τότε $\epsilon \perp \epsilon_2$.

Αν η ϵ τέμνει την ϵ_1 τότε θα τέμνει και την ϵ_2 και θα σχηματίζει:



τις εντός εναλλάξ γωνίες **ίσες**.

τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **ίσες**.

τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.

Δύο γωνίες που έχουν παράλληλες ή κάθετες πλευρές είναι:

ίσες, αν είναι

→ και οι δύο οξείες,

→ και οι δύο αμβλείες.

παραπληρωματικές, αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου και κέντρα τους

- Περικέντρο (σημείο τομής μεσοκαθέτων)
- Έγκεντρο (σημείο τομής εσωτερικών διχοτόμων)
- Παράκεντρα (σημεία τομής δύο εξωτερικών και μιας εσωτερικής διχοτόμου)

Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών

τριγώνου είναι
2 ορθές,
οπότε:

→ Κάθε εξωτερική γωνία
ισούται με το άθροισμα
των δύο απέναντι
εσωτερικών.

→ Αν δύο τρίγωνα έχουν
2 γωνίες ίσες, έχουν
και τις τρίτες γωνίες
ίσες.

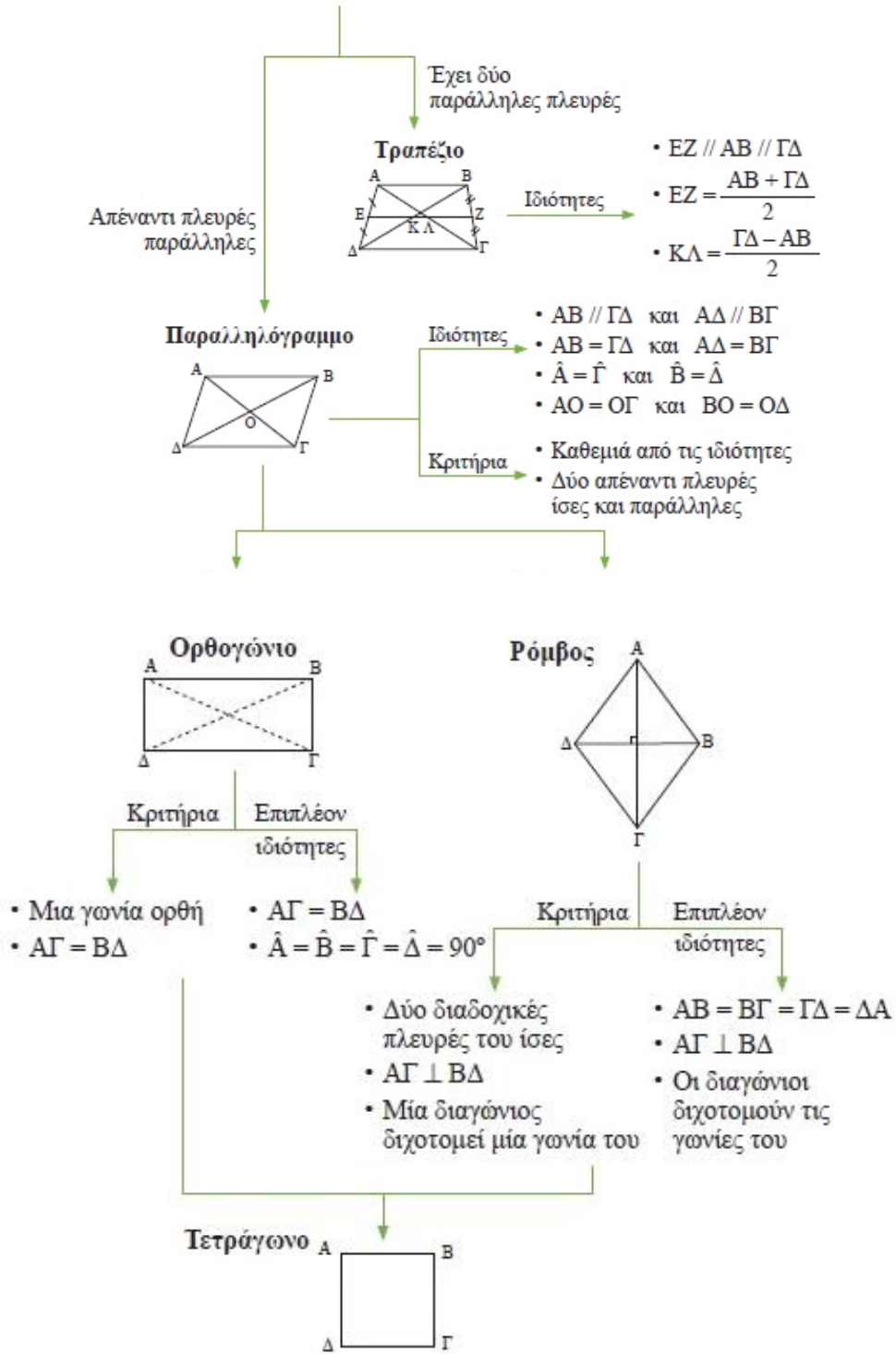
→ Οι οξείες γωνίες
ορθογώνιου
τριγώνου είναι
συμπληρωματικές.

→ Κάθε γωνία ισόπλευρου
τριγώνου είναι 60° .

→ κυρτού
 n -γώνου είναι
 $2n - 4$ ορθές.

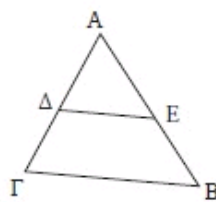
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ



Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

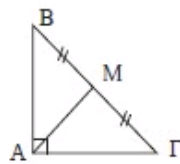
Τρίγωνο



Αν Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ, τότε $ΔΕ // ΒΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αν Δ μέσο ΑΒ και $ΔΕ // ΒΓ$ τότε Ε μέσο ΑΓ.

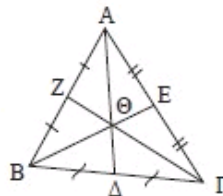
Ορθογώνιο
Τρίγωνο



$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αν $\hat{A} = 90^\circ$, τότε: $\hat{B} = 30^\circ \Leftrightarrow ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Βαρύκεντρο
τριγώνου



$ΑΘ = \frac{2}{3} ΑΔ$, $ΒΘ = \frac{2}{3} ΒΕ$, $ΓΘ = \frac{2}{3} ΓΖ$

Ορθόκεντρο
τριγώνου

→ Σημείο τομής υψών