

Μονοτονία συνάρτησης _Ερωτήματα θεμάτων προηγούμενων ετών

1. (2001-3^ο) Για μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , ισχύει ότι: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε x πραγματικό με β, γ πραγματικούς και $\beta^2 < 3\gamma$
 - a. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 8)
 - b. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,1)$ (μονάδες 7)

2. (2002-3^ο) Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίου ορισμού το \mathbb{R} . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.
 - a. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1 (μονάδες 7)
 - b. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα (μονάδες 18)

3. (2003-3^ο) Έστω $f(x)=x^5+x^3+x$
 - a. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση (μονάδες 6)
 - b. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(x+1)$ για κάθε x πραγματικό (μονάδες 6)
 - c. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} (μονάδες 5)

4. (2003 επαναληπτικές-4^ο) Δίνεται f ορισμένη στο \mathbb{R} με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε x πραγματικό.
 - a. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη (μονάδες 8)
 - b. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα. (μονάδες 8)
 - c. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° (μονάδες 9)

5. (2004-2^ο) Δίνεται $f(x)=x^2 \ln x$
 - a. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f (μονάδες 10)
 - b. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 7)

6. (2006-4^ο) Δίνεται $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$
 - a. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f (μονάδες 8)

- b. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 5)
- c. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x)=\ln x$ στο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $h(x)=e^x$ στο $B(\beta, e^\beta)$ με β πραγματικό ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ (μονάδες 9)
- d. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες. (μονάδες 3)
7. (2007 επαναληπτικές-3^ο) Δίνεται $f(x)=e^x-e\ln x$ με $x > 0$
- a. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ (μονάδες 10)
- b. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$ (μονάδες 7)
8. (2009-3^ο) Δίνεται $f(x)=e^x-\ln(x+1)$ με $x > -1$
- a. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ (μονάδες 6)
- b. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$$
 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$ (μονάδες 6)
9. (2010- 3^ο) Δίνεται $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ με x πραγματικό
- a. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f (μονάδες 5)
- b. Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$ (μονάδες 7)
10. (2010-3^ο) Δίνεται $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$ με $x > 0$
- a. Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ (μονάδες 5)
- b. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες (μονάδες 6)