31570

ΛΥΣΗ

α) Για να προσδιορίσουμε αλγεβρικά το κοινό σημείο M των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$, θα λύσουμε το σύστημα (επιλέγουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών):

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=6 \\ x-2y=-2 \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 4x+2y=12 \\ x-2y=-2 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 5x=10 \\ x-2y=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ 2-2y=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ -2y=-4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array}\right\}.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}(2,2)$.

β) Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$, αφού $3 \cdot 2 + 2 = 8$. Άρα η ευθεία (ε_3) διέρχεται από το $\mathrm{M}(2,2)$.

21227

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \begin{cases} 0x + 0y = 7 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$, επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

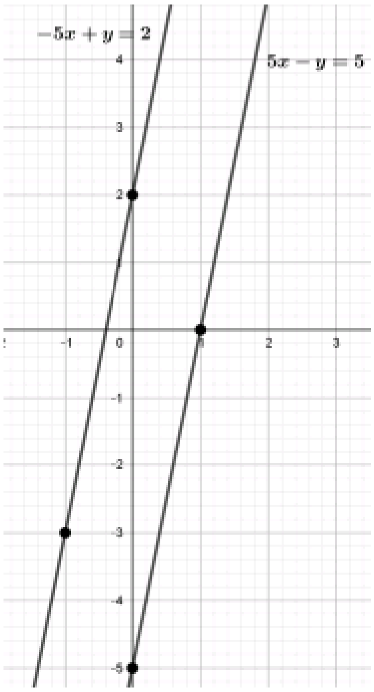
β) Για την ευθεία (ε_1): $5x - y = 5$ έχουμε

x	0	1
y	-5	0

Για την ευθεία (ε_2): $-5x + y = 2$ έχουμε

x	0	-1
y	2	-3

Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο, που γραφικά εκφράζει ότι το σύστημα του α) ερωτήματος είναι αδύνατο.



15016

ΛΥΣΗ

α) Το ζεύγος $(0,4)$ επαληθεύει μόνο την εξίσωση $3x+2y=8$ και όχι την εξίσωση $2x-y=3$, οπότε δεν αποτελεί λύση του συστήματος.

β) Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $2x-y=3 \Leftrightarrow -y=-2x+3 \Leftrightarrow y=2x-3$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση $3x+2y=8$ έχουμε:

$3x+2(2x-3)=8 \Leftrightarrow 3x+4x-6=8 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=2$.

Για $x=2$ στην εξίσωση $2x-y=3$ έχουμε $y=1$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2,1)$.

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}$, δηλαδή το ζεύγος $(2,1)$.

****

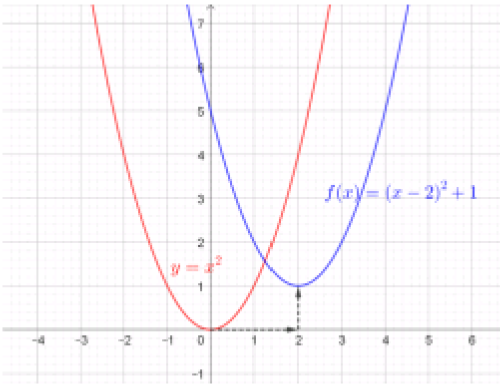
32674

ΛΥΣΗ

α) Ο τύπος της συνάρτησης f διαδοχικά γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 5 = \\ &= x^2 - 4x + 4 + 1 = \\ &= x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 + 1 \\ &= (x-2)^2 + 1. \end{aligned}$$

β) Παρατηρούμε ότι $f(x) = y(x-2) + 1$. Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y(x) = x^2$ κατά δύο μονάδες δεξιά και μία μονάδα προς τα πάνω.



20671

ΛΥΣΗ

α)

i. Η f είναι άρτια γιατί, όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα.

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με 1 για $x=0$, αφού, όπως φαίνεται στο σχήμα, $f(0)=1$ και $f(x)\geq 1$ για οποιοδήποτε $x\in\mathbb{R}$.

β)

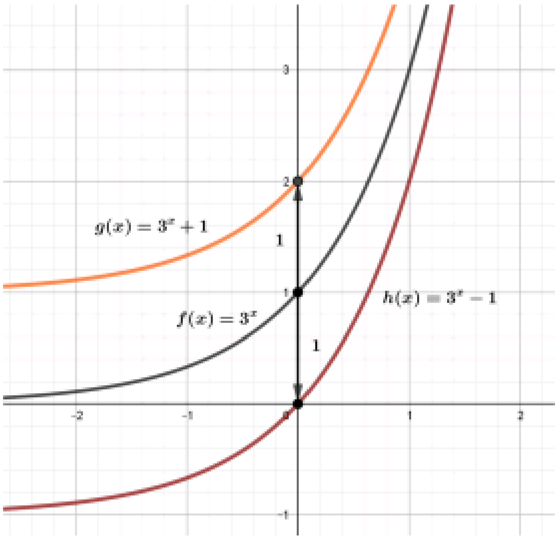
i. Η γραφική παράσταση της g προέκυψε με οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες δεξιά.

ii. Σύμφωνα με το βi), ο τύπος της g είναι $g(x) = f(x-2) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$.

21451

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3^x+1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=3^x-1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.



β) Η γραφική παράσταση της $f(x)=3^x$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ (τον αρνητικό ημιάξονα των x). Η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Άρα η γραφική παράσταση της g έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=1$.

Ομοίως, η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Άρα η γραφική παράσταση της h έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=-1$.

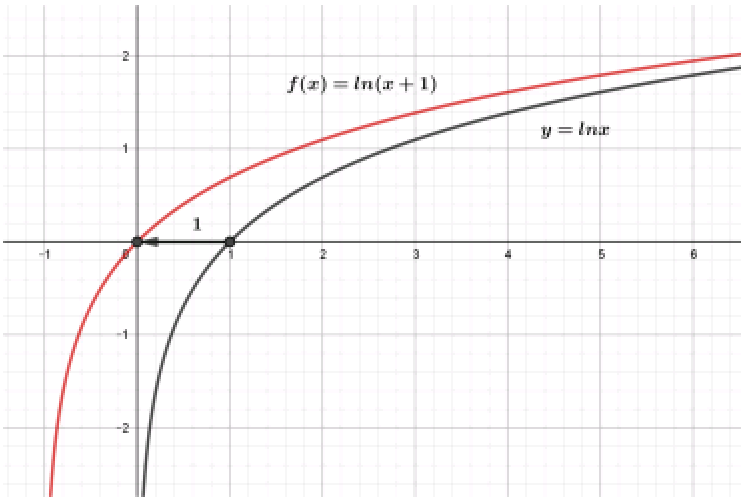
21449

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-1,+\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$, αφού για $x=0$, έχουμε $f(0)=\ln(0+1)=\ln 1=0$. Δεν τέμνει τον $x'x$ σε άλλο σημείο, αφού για $y=0$, έχουμε $\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



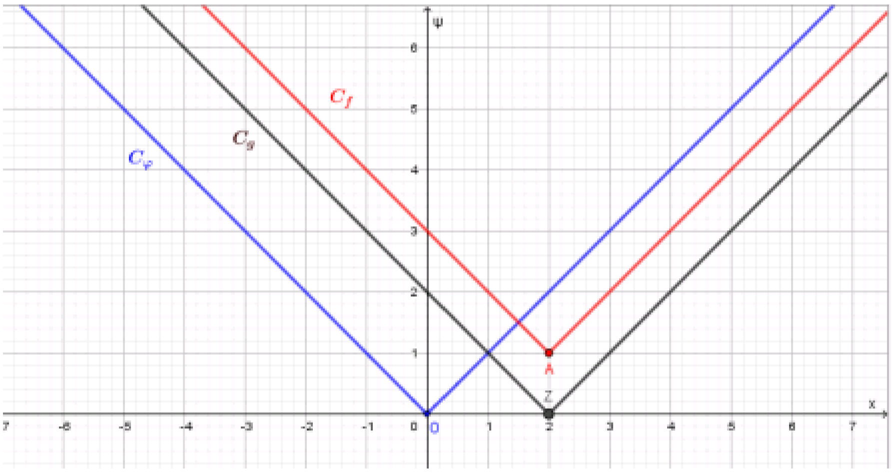
14972

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις των g και f προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
- μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).

Έτσι προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις



β)

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 2$, ολικό ελάχιστο το $f(2) = 1$.

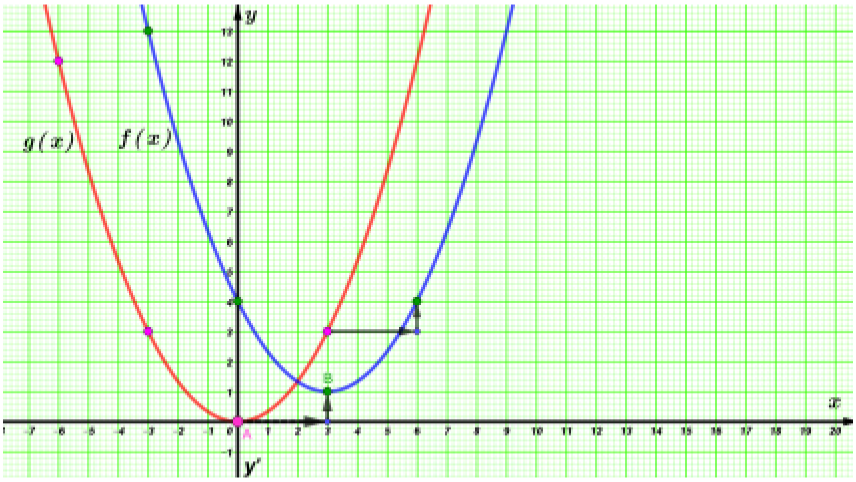
14983

ΛΥΣΗ

α) Σωστή απάντηση είναι η (III), με βάση την παράγραφο 2.2.

β) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο αριθμός 1 και επιτυγχάνεται όταν $x = 3$.

γ) Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.



****

32675

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση της μορφής $g(x) = 2\eta\mu x$ έχει ελάχιστη τιμή -2 και μέγιστη 2. Άρα, η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$ έχει ελάχιστη τιμή $-2 + 1 = -1$ και μέγιστη $2 + 1 = 3$.

β) Η τιμή του x για την οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή είναι η λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x + 1 = 3 \Leftrightarrow$$
$$2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

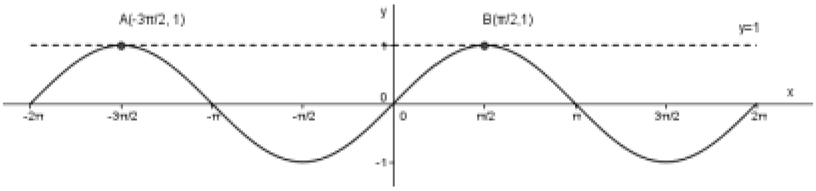
Άρα, η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = \frac{\pi}{2}$.

21995

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση ημx = 1 στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$.

Στο σχήμα παρακάτω, φαίνεται το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ και το αντίστοιχο τμήμα της ευθείας $y = 1$.



Οι λύσεις της εξίσωσης ημx = 1 στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx με την ευθεία $y = 1$, δηλαδή των σημείων $A\left(\frac{-3\pi}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Άρα, η εξίσωση ημx = 1 στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ έχει δύο λύσεις: $x = \frac{-3\pi}{2}$ ή $x = \frac{\pi}{2}$.

β) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση ημx = −2 στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$.

Όμως, γνωρίζουμε ότι $-1 \leq$ ημx ≤ 1, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, η εξίσωση ημx = −2 είναι αδύνατη, δηλαδή η εξίσωση ημx = −2 στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ δεν έχει καμία λύση.

15036

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho$συνωx, $\rho > 0$ με ρ=3 και $\omega = 2$, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με -3.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) $f(x) = -3$ αν και μόνο αν 3συν2x=-3⇔ συν2x = −1 τότε $2x = 2\kappa\pi \pm \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

15969

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(6 \cdot 2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

β) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$.

Άρα $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x = -4\sigma\upsilon\nu x$.

γ) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -2 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu x = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$ $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

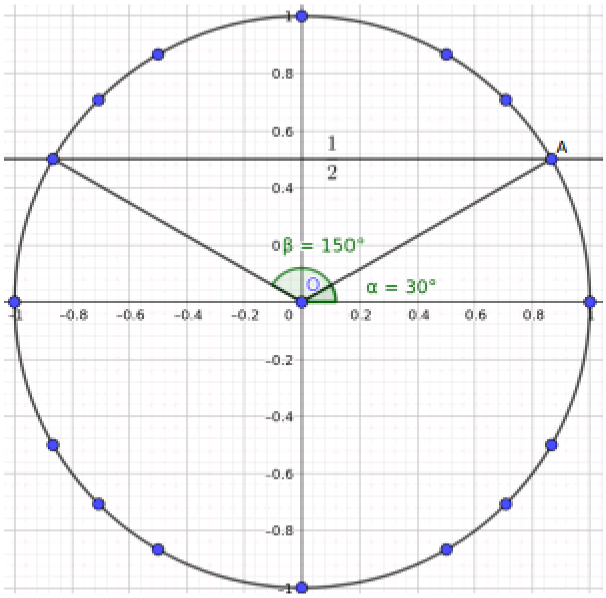
14977

ΛΥΣΗ

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οx και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα y'y.

Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα y'y στο $\frac{1}{2}$.

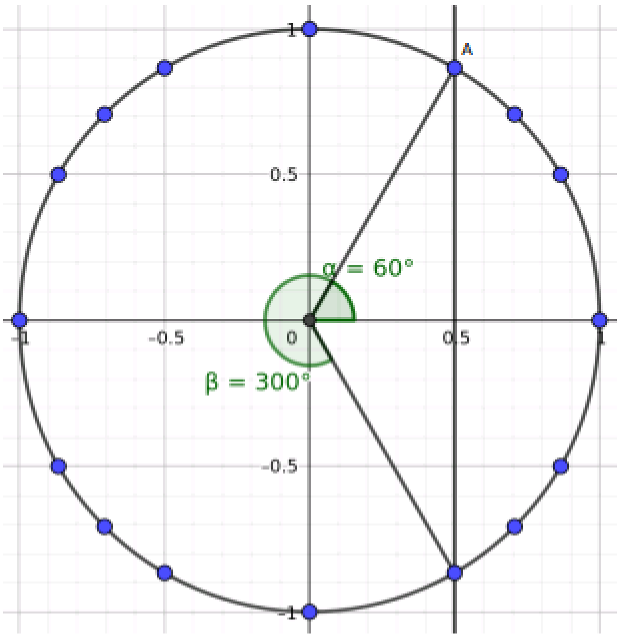
Οπότε φέρουμε την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=30^{\circ}=\frac{\pi}{6}rad$ και $\beta=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}=\frac{5\pi}{6}rad$.



Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα x'x.

Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα χ΄χ στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $x=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=60^{\circ}=\frac{\pi}{3}rad$ και $\beta=360-60=300^{\circ}=\frac{5\pi}{3}rad$.



β) Όλες οι γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα [0,2π) είναι οι α, β του ερωτήματος (α).

Για $x \in \mathbb{R}$ κάθε άλλη γωνία με ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ θα προκύπτει από αυτές, προσθέτοντας ή αφαιρώντας ακέραιο πλήθος κύκλων $\kappa \cdot 2\pi$, κ ακέραιος.

Άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι:

$\eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\cdot\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\cdot\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2\kappa\cdot\pi+\frac{5\pi}{6}$ με $k \in \mathbb{Z}$.

21237

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε $\eta\mu\frac{2\pi}{3}=\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii.Έχουμε $\eta\mu\theta=\dfrac{\eta\mu\frac{2\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-1.$

β) Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta=\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\pm\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, δεδομένου ότι αν μια γωνία ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο το συνημίτονό της είναι θετικός αριθμός.

****

20941

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$\mathrm{P}(-2)=(-2)^3+2(-2)^2+(-2)+3=1.$

Επομένως το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Το σχήμα Horner με διαιρετέο $\mathrm{P}(x)$ και διαιρέτη $x+2$ δίνει

1	2	1	3	ρ=−2
	−2	0	−2	
1	0	1	1	

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο

$\pi(x)=x^2+1.$

γ) Η ταυτότητα της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x+2)$ γράφεται

$\mathrm{P}(x)=(x^2+1)(x+2)+1$.

15989

Λύση

α) Εφόσον το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του θα είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4, δηλαδή οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Αντικαθιστώντας στο πολυώνυμο $P(x)$ όπου x τον αριθμό 2 παρατηρούμε ότι:

$P(2)=2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2+4=8-8-4+4=0$, άρα η μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου είναι το 2.

β) Εφόσον το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ ισχύει ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ οπότε εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-2x+4 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2-2 \\ -2x+4 & \\ 2x-4 & \\ 0 & \end{array}$$

Συνεπώς, η εξίσωση γράφεται: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$.

Οπότε οι ρίζες του πολυωνύμου είναι $x=2$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

Το πολυώνυμο γράφεται: $P(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

21998

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Εδώ, το πολυώνυμο $x-2$ είναι $1^{ου}$ βαθμού και το πολυώνυμο x^6+1 είναι $6^{ου}$ βαθμού. Επομένως, το γινόμενό τους $P(x)$ είναι πολυώνυμο $7^{ου}$ βαθμού.

β) Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $P(x)=0$. Όμως,

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x^6+1)=0 \overset{x^6+1>0}{\Longleftrightarrow} x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Άρα, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 2.

21997

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου (μη-μηδενικών) πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών. Επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ είναι ίσος με 3, καθώς το $P(x)$ είναι γινόμενο τριών πολυωνύμων βαθμού 1.

β) $P(x):(x-2) = \frac{P(x)}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-2} = (x-1)(x-3)$. Η διαίρεση, επομένως, είναι τέλεια, άρα το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν.

Συνεπώς, $P(x) = (x-2) \cdot \underbrace{(x-1)(x-3)}_{\pi(x)} + \underbrace{0}_{\upsilon(x)}$.

Άρα, $\pi(x) = (x-1)(x-3)$ και $\upsilon(x) = 0$.

Σχόλιο:

Το θεώρημα «Ταυτότητα της Διαίρεσης» λέει ότι: *για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$, όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.*

Από την μοναδικότητα που εγγυάται το θεώρημα για τα πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, προκύπτει ότι και μόνο η παρατήρηση ότι

$$P(x) = (x-2) \cdot (x-1)(x-3) + 0$$

αρκεί για να βγει αμέσως το συμπέρασμα ότι $\pi(x) = (x-1)(x-3)$ και $\upsilon(x) = 0$.

20856

ΛΥΣΗ

α) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης βρίσκονται στους διαιρέτες του -1 και είναι οι αριθμοί ± 1.

Αλλά $f(1) = 3 \neq 0$ και $f(-1) = -3 \neq 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β)

i. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα, διότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.

ii. Είναι $f(1) = 3 > 0$ και $f(0) = -1 < 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα που προσδιορίζει τη ρίζα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ μεταξύ των αριθμών 0 και 1.

20640

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$P(1)=2\cdot 1^3-8\cdot 1^2+7\cdot 1-1=2-8+7-1=9-9=0$$

οπότε το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β) Ισχύει: $Q(1)\neq 0$, οπότε:

i. Για το πολυώνυμο $R_1(x)$ έχουμε:

$$R_1(1)=P(1)+Q(1)=0+Q(1)\neq 0$$

Άρα το πολυώνυμο $R_1(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Για το πολυώνυμο $R_2(x)$ έχουμε:

$$R_2(1)=P(1)\cdot Q(1)=0\cdot Q(1)=0$$

Άρα το πολυώνυμο $R_2(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

18230

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-2)$, μόνο όταν $P(2)=0$.

Πραγματικά,

$$P(2)=2\cdot 8+4-8\cdot 2-4=16+4-16-4=0$$

οπότε το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$P(x)=2x^3+x^2-8x-4=2x^3-8x+x^2-4=2x(x^2-4)+(x^2-4)$$
$$=(x^2-4)(2x+1)=(x-2)(x+2)(2x+1)$$

γ) Ισχύει:

$$P(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\text{ ή }x=2\text{ ή }x=-2$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$, 2 και -2.

15176

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου. Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x - 1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

β) Είναι: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)$.

Το τριώνυμο $x^2 - x + 2 \neq 0$ διότι έχει διακρίνουσα αρνητική και επιπρόσθετα ισχύει ότι $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x^2 - x + 2$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Ως εκ τούτου, είναι: $P(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

15175

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β) Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x - 1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	−1	1	−1	ρ =1
	1	0	1	
1	0	1	0	

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

Εναλλακτική απάντηση:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

γ) Είναι λοιπόν

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0 \xLeftrightarrow{x^2+1 \neq 0} x = 1.$$

15096

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$P(-1) = 2\,(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 3 \neq 0$ και

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0$.

Άρα το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 \; + x^2 - \; 3\,x + 1 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 - 2x^2 + 2x \qquad & 2x - 1 \\ \hline
-x^2 \;\; -x \;\; +1 & \\
x^2 \;\; +x \;\; -1 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης των δύο πολυωνύμων είναι το $\pi(x) = 2x - 1$ και το υπόλοιπο είναι 0.

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (2x - 1)$.

17241

ΛΥΣΗ

α)

I. Επειδή $P(-1) = (-1)^3 + (-1) + 2 = -2 + 2 = 0$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 0. Άρα, το$(x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

II. Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	1	2	-1
	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

Άρα, $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ οπότε $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow$$
$$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

14981

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$.

β) Αφού ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, άρα το $x - (-2) = x + 2$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) Με βάση το β) ερώτημα, η διαίρεση $P(x) : (x + 2)$ θα είναι τέλεια, αφού το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι το $P(-2) = 0$. Εκτελούμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

1	0	−1	6	−2
	−2	4	−6	
1	−2	3	0	

Άρα $P(x) = (x + 2)(1x^2 - 2x + 3)$. Παρατηρούμε τώρα, ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 3$ είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$, άρα δεν αναλύεται σε γινόμενο.

15618

ΛΥΣΗ

α) Στο πολυώνυμο μπορούμε να εξάγουμε κοινό παράγοντα το x και έχουμε:

$P(x) = 2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$ που είναι το ζητούμενο.

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $P(x) = 2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$x(2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{1}{2}$ ή $x = -1$.

15040

ΛΥΣΗ

α)Με $x = 1$ έχουμε:

$$x^3 - 7x + 6 = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 7 - 7 = 0$$

οπότε ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$ είναι $x^2 + x - 6$ και το υπόλοιπο 0, οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η:

1	0	−7	6	1
	1	1	−6	
1	1	−6	0	

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$$

γ) Από το ερώτημα β) έχουμε:

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -3$$

****

21954

ΛΥΣΗ

α)

i. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$, $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x = x$.

Οπότε για $x=\alpha=10$ έχουμε ότι $\log 10^{10}=10$.

Εναλλακτικά, $\log 10^{10} = 10\cdot\log 10 = 10\cdot 1 = 10$.

ii. Είναι $\mathrm{A}=\ln(\ln e)+\log(\log 10^{10}) = \ln 1 + \log 10 = 0+1=1$.

β) Η εξίσωση $\log(x^2+1)=\mathrm{A}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισοδύναμα έχουμε :

$\log(x^2+1)=\mathrm{A} \Leftrightarrow \log(x^2+1)=1 \Leftrightarrow x^2+1=10 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

21858

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$\mathrm{A}=2\log 5+2\log 2=\log 5^2+\log 2^2=\log 25+\log 4=\log(25\cdot 4)=\log 100=2$

β) Είναι $e^\lambda=\mathrm{A} \Leftrightarrow e^\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=\ln 2$.

γ) Είναι $2<e \Leftrightarrow \ln 2<\ln e \Leftrightarrow \lambda<1 \Leftrightarrow \ln\lambda<\ln 1 \Leftrightarrow \ln\lambda<0$.

20851

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες λογαρίθμων, έχουμε:

$A=2\log 6-\log 12=\log 6^2-\log 12=\log 36-\log 12=\log\frac{36}{12}=\log 3$

$B=\log 5+\log 2=\log(5\cdot 2)=\log 10=1$

β) Είναι:

$A<B \Leftrightarrow \log 3<1 \Leftrightarrow \log 3<\log 10 \overset{\log x \uparrow}{\Longleftrightarrow} 3<10$

Επομένως, αποδείξαμε την ζητούμενη σχέση.

γ) Η ανίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x>0$. Τότε έχουμε ισοδύναμα:

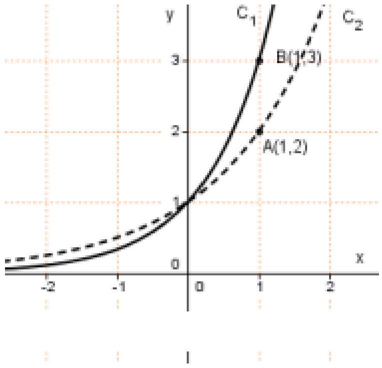
$$\log x<1 \Leftrightarrow \log x<\log 10 \overset{\log x\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Longleftrightarrow} x<10.$$

Επομένως, είναι $0<x<10$.

21993

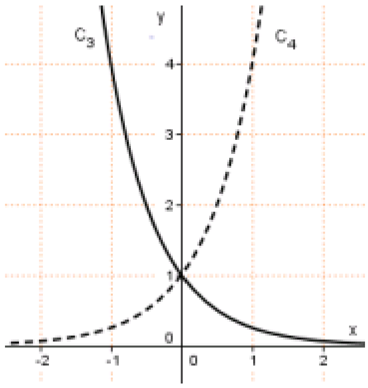
ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $f(1) = 2^1 = 2$, οπότε το σημείο $A(1,2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Επίσης, και $g(1) = 3^1 = 3$, οπότε το σημείο $B(1,3)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g. Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αντιστοιχεί στην καμπύλη C_2 και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αντιστοιχεί στην καμπύλη C_1.



β) Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης α^x είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$.

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$, ως γνησίως αύξουσας, αντιστοιχεί στην καμπύλη C_4, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, ως γνησίως φθίνουσας, αντιστοιχεί στην καμπύλη C_3.



21675

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1-\log 2=\log 10-\log 2=\log\frac{10}{2}=\log 5$$

β) Επειδή $x^2+1>0$ η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Με τη βοήθεια του ερωτήματος, α) έχουμε:

$$\log(x^2+1)=1-\log 2 \Leftrightarrow \log(x^2+1)=\log 5 \Leftrightarrow x^2+1=5$$
$$\Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=2$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 2.

20663

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\log_2 8=\log_2 2^3=3,\ \log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \text{ και } \log_2 1=0.$$

Οπότε

$$\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=3+2\cdot\frac{1}{2}-0=3+1=4.$$

β) Ισχύει $\upsilon=\mathrm{P}(\rho)$ με $\rho=2$.

Είναι

$$\begin{aligned}\upsilon=\mathrm{P}(2)&=(\log_2 8)\cdot 2^3+4\left(\log_2\sqrt{2}\right)\cdot 2^2-(4\log_2 1)\cdot 2+1990\\&=8\log_2 8+16\log_2\sqrt{2}-8\log_2 1+1990\\&=8\left(\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1\right)+1990\\&\overset{(\alpha)}{=}8\cdot 4+1990\\&=2022\end{aligned}$$

Τελικά, το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι ίσο με 2022.

15675

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned}&e^x-1>0\Leftrightarrow\\&e^x>1\Leftrightarrow\\&e^x>e^0\Leftrightarrow\\&x>0\end{aligned}$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

β) Είναι

$$\begin{aligned}&f(x)=0\Leftrightarrow\\&\ln\left(e^x-1\right)=\ln 1\Leftrightarrow\\&e^x-1=1\Leftrightarrow\\&e^x=2\Leftrightarrow\\&x=\ln 2\end{aligned}$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2>\ln 1\Leftrightarrow \ln 2>0$.

15687

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta=\log_4(3\alpha)-\log_4\beta=\log_4\frac{3\alpha}{\beta}.$$

β) Η παράσταση Α με $3\alpha=16\beta$, γράφεται:

$$A=\log_4\frac{16\beta}{\beta}=\log_4 16=\log_4 4^2=2\log_4 4=2.$$

****