• *Μέγεθος* λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. Στη Γεωμετρία έχουμε τα ***γεωμετρικά μεγέθη***.

• Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται ***υποδιαίρεση*** του ΑΒ, αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν, ώστε $ΓΔ = \frac{AB}{\nu}$.

• Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται ***γινόμενο*** του ΑΒ επί το ***θετικό ρητό*** $q = \frac{\mu}{\nu}$ (μ > 0, αριθμό ν>0), αν είναι άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\frac{AB}{\nu}$.

• Αν για δυο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει ρητός $q = \frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ώστε ΓΔ = qΑΒ, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***σύμμετρα*** και ο αριθμός λέγεται ***λόγος*** των δύο τμημάτων.

• Μια κοινή υποδιαίρεση $ΚΛ = \frac{AB}{\nu} = \frac{ΓΔ}{\mu}$ λέγεται και ***κοινό μέτρο*** των ΑΒ και ΓΔ. Δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ακέραια πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.

• Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται ασύμμετρα και ο λόγος τους είναι ένας ***άρρητος*** αριθμός.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ, λέγονται ***ανάλογα*** προς τα τμήματα β, δ όταν είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

• ***Αναλογία*** τμημάτων λέγεται κάθε ισότητα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ όπου α, β, γ, δ είναι ευθύγραμμα τμήματα.

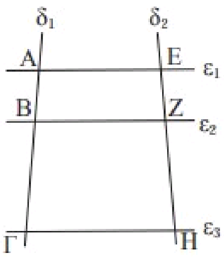
• ***Μέτρο*** ενός ευθύγραμμου τμήματος α είναι ο λόγος του α προς ένα άλλο τμήμα που παίρνουμε αυθαίρετα ως ***μονάδα μέτρησης***. Έτσι:
- Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα.
- Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων.

• Αν για τα διαφορετικά συνευθειακά σημεία Α, Β, Μ ισχύει $\frac{MA}{MB} = \lambda$, τότε λέμε ότι το ***Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ*** σε λόγο λ.
- Το Μ διαιρεί ***εσωτερικά*** ή ***εξωτερικά*** το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν το Μ είναι αντίστοιχα μεταξύ των Α και Β ή στην προέκταση του ΑΒ.
- Το σημείο Μ που διαιρεί ή εσωτερικά ή εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ είναι ***μοναδικό***.

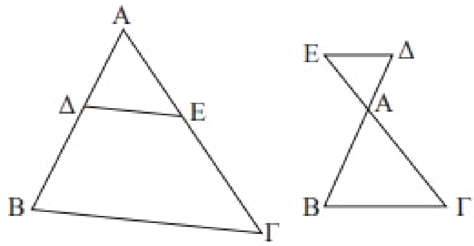
• Θεώρημα Θαλή
- Τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, τότε $\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} = \frac{ΑΓ}{ΕΗ}$.

Αντίστροφο: Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ}$, τότε $ΓΗ // \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



- Στο τρίγωνο



Αν ΔΕ//ΒΓ, τότε $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AE}} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{E}\Gamma}$ και $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma}$.

Αντίστροφο: Αν $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AE}} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{E}\Gamma}$, τότε ΔΕ//ΒΓ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

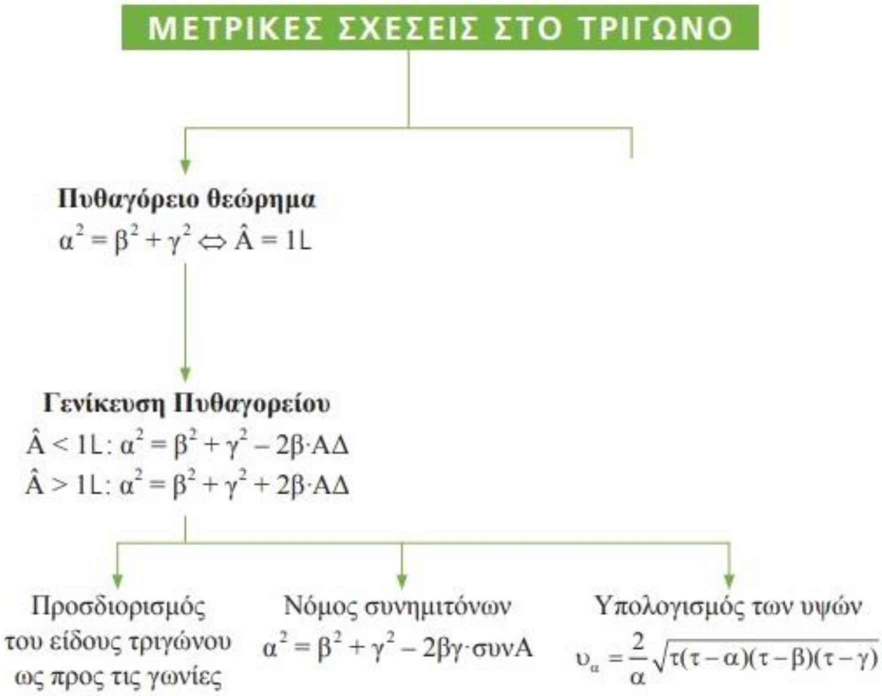
- **Ανάλογες πλευρές**
- **Ίσες γωνίες**

• Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Κριτήρια Ομοιότητας τριγώνων

- **Δυο ίσες γωνίες**
- **Δυο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες**
- **Τρεις πλευρές ανάλογες**

• Σε δύο όμοια τρίγωνα ο λόγος δύο ομόλογων στοιχείων τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.



1. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ (ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

2. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ (ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ)

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1\llcorner$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A} > 1\llcorner$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

ΕΜΒΑΔΟΝ

Πολυγώνων

Τετραγώνου: $E = \alpha^2$

Ορθογωνίου: $E = \alpha \cdot \beta$

Παραλληλογράμμου: $E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta$

Τριγώνου: $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$

- $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
- $E = \tau\rho$
- $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$
- $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$

Τραπεζίου: $E = \frac{1}{2}(B + \beta) \cdot \upsilon$

Ρόμβου (και τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους): $E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$

Πολυγωνικών Επιφανειών

$(\Pi.E.) = (\Pi_1) + (\Pi_2) + \ldots + (\Pi_\nu)$

Εμβαδόν και ομοιότητα

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha'}, \text{ αν } \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'} \\[2mm] \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}, \text{ αν } \alpha = \alpha' \\[2mm] \dfrac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}, \text{ αν } \hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \\[2mm] \lambda^2, \text{ αν } A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma' \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας} \end{cases}$$

$$\frac{(AB\Gamma\ldots K)}{(A'B'\Gamma'\ldots K')} = \lambda^2, \text{ αν } AB\Gamma\ldots K \approx A'B'\Gamma'\ldots K' \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας}$$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Κανονικά πολύγωνα

- Όλες οι πλευρές και οι γωνίες του ίσες.
- Εγγράψιμο και περιγράψιμο σε κύκλο
- $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, $E_\nu = \dfrac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$, $P_\nu = \nu\lambda_\nu$
- $\omega_\nu = \dfrac{180°}{\nu}$, $\varphi_\nu = 180° - \dfrac{360°}{\nu}$
- Κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια
-

ν	3	4	6
λ_ν	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
α_ν	$\dfrac{R}{2}$	$\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Κύκλος

- Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R$
- Μήκος τόξου: $\ell = \dfrac{\pi R \mu}{180} = \alpha R$
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi R^2$
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}) = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360} = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$