ΘΕΜΑ 1251

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1254

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$ (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1353

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x,y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1287

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1298

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1314

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύουν: $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1317

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$ (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \ge \Lambda$, για κάθε τιμή των α,β. (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1318

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α,β, με $\alpha \ne \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \dfrac{\alpha^{22} \cdot \left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1324

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1352

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1368

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\dfrac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1373

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α,β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4\alpha$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1239

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$ (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2 - 16}{|3x-6| + 2} = 3x + 4$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1258

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1272

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$ (Μονάδες 10)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1303

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1320

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α) Να αποδείξετε ότι: $x\le\frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x\le\frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1322

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1323

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$

α) Να αποδείξετε ότι: $y\in(1,3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1342

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$ (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1 , x , x^2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1366

α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le-2$ (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge2$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1371

α) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge2$ (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1384

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$ με x,y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$ (Μονάδες 12)

β) $0<A<4$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1428

Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς –2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1429

Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.
(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1515

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α,β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε, γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1525

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει: • $|\alpha-2|<1$ • $|\beta-3|\le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$ (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β. (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

ΚΕΦ 2 - § 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1270

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1281

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$ (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1308

Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A=4$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1335

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1338

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A,B. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1340

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1375

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις): $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, $\sqrt{5} \cong 2{,}24$, $\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1377

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1380

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
(Μονάδες 13)

β) Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1381

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.
(Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1382

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1327

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
  i) όταν $\alpha=1$ (Μονάδες 5)
  ii) όταν $\alpha=-3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1351

Δίνεται η εξίσωση $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:
$(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1369

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις. (Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1238

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$ (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1246

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1250

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1262

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1264

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ. (Μονάδες 12)

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1269

Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2+5x-1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2 , $x_1\cdot x_2$ και $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{x_1}$ και $\dfrac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1280

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \text{ και } \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1285

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1288

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1). (Μονάδες 6)

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1290

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 1$ να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1312

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1315

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β, και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1316

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1331

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1332

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1334

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α,β, τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$. (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α,β. (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1337

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α,Β. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1346

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $S^2 - P - 2 \geq 0$ όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1) (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1348

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1349

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α,β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+3=0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1359

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1388

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1^{ου} βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1404

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=12\lambda+25$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1\cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1406

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=(\alpha-1)^2-16$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1407

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $t_A < t_B$, $t_\Gamma = \dfrac{t_A + 2t_B}{3}$ και $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$.

α) **i)** Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$ (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1412

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1418

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1431

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ. (Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1437

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση: $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1439

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.
(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda<0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1440

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, με $\lambda>0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$. (Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 1445

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-7x^2+12=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.
(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1448

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1451

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1-2)(x_2-2)=-4$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1452

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0$ (1). (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1456

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)}$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1459

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda=(2x+5)^2-8x$ (1)

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το –5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1460

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β,γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)
γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1461

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)
γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:
i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.
ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1463

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α,β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2$. (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α,β, έτσι ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α,β. (Μονάδες 10)
γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1469

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)
β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1475

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1476

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathrm{IR}$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός –ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$ (Μονάδες 7)

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$. (Μονάδες 4+6=10)

ΘΕΜΑ 1477

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathrm{IR}$. Να δείξετε ότι:
Αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$. (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1478

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\ cm^2$. (Μονάδες 5)

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1482

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1485

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$ με $x\in IR$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1491

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-5\lambda x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in IR$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in IR$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in IR$, για τις οποίες ισχύει:
$(x_1+x_2)^2-18-7(x_1\cdot x_2)^{24}=0$. (Μονάδες 9)

ii) Για $\lambda=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1500

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in IR$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S=x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 1504

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις: $s_A<s_B$, $s_\Gamma=\dfrac{s_A+3s_B}{4}$ και $|s_\Delta-s_A|=|s_\Delta-s_B|$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A + s_B = 1{,}4$ και $s_A \cdot s_B = 0{,}45$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^ου^ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B. (Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1508

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1509

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\dfrac{1}{\alpha}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1516

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2). (Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1243

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1248

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1252

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1253

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1260

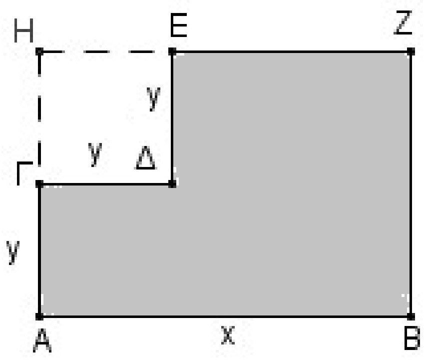
Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1261

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi=2x+4y$ (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1268

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\le 2$ και $|y-6|\le 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1278

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου (˚C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T=15+25\cdot x$, όταν $0\le x\le 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290˚C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440˚C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1284

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\ge 3$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha\ge -1$, να γράψετε την παράσταση $A=\big||\alpha+4|-3\big|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1330

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\le 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x-3|\ge 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1355

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1357

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1365

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1367

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1374

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1-2x|\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1376

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1378

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1379

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1383

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3,1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1416

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)

ii) Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1422

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις **Π1** και **Π2**:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $({}^{o}C)$ σε βαθμούς Φαρενάιτ $({}^{o}F)$, πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $({}^{o}C)$ σε βαθμούς Κέλβιν $({}^{o}K)$, προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου $({}^{o}C)$ το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν $({}^{o}K)$ και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ $({}^{o}F)$ είναι η: $K=\dfrac{F-32}{1{,}8}+273$ (Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ${}^{o}K$ μέχρι 283 ${}^{o}K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ${}^{o}F$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1423

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1427

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1455

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές τουυ λ ισχύει $0<d(x_1,x_2)<2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1472

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3|\leq 5$. (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3|\leq 5$. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3|\leq 5$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1521

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλασίου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1271

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1273

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1277

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$ (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11-24$ (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$,για τις οποίες ισχύει $A=6$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1279

α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\leq 0$ (Μονάδες 12)

β) Αν α,β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1291

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\dfrac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\dfrac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1300

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1306

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1350

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\leq 3$ και $2x^2-x-1\geq 0$. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1356

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1363

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\leq 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1391

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\leq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1396

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1397

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1,x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ,μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1402

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1409

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y=60t-5t^2$

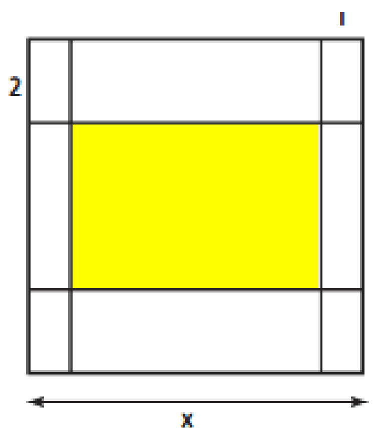
α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175\text{m}$; (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1420

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5\leq x\leq 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



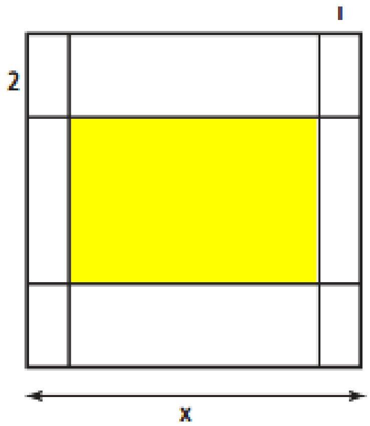
α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x)=(x-2)(x-4)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1421

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5 \le x \le 10)$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = x^2 - 6x + 8$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί το η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1424

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2| < 3$ και $x^2 - 2x - 8 \le 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1,4]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1425

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1426

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \le 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1432

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1436

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, α^2, $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1438

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1441

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

ΘΕΜΑ 1442

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, α^2, $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).
(Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1450

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1458

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_2$. (Μονάδες 4)

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2)$.,
$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, $f(x_2+1)$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1462

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$. (Μονάδες 9)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1465

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$ με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α,β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει: $\alpha<x_1<x_2<\beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1473

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

- **i)** Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)
- **ii)** Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

- **i)** Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
- **ii)** Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1474

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1x_2}\leq\dfrac{x_1+x_2}{2}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1480

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2). (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1481

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) **i)** Αν $\beta\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta=0$; (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1483

Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa=-\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2-2|\mu|-8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1484

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα μα τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ με $OA=600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t\geq 0$,η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση χελώνας από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t)=600+40t$ μέτρα.

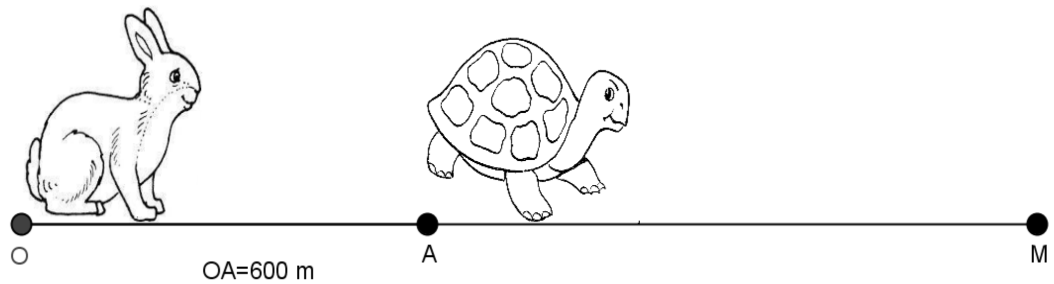
α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM=2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα; (Μονάδες 5)

ii) Ποιος τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t=12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση; (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής τον αγώνα; (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 1486

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1487

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+9x+18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1492

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0$, με $\lambda\in(0,4)$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1493

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$, με $\lambda\in(0,2)$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1494

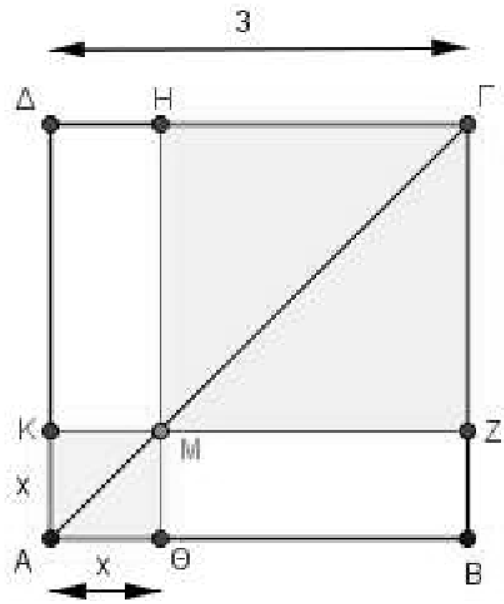
α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1497

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9$ με $x\in(0,3)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E\geq\frac{9}{2}$ για κάθε $x\in(0,3)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1511

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1|<4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\leq 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1512

Δίνεται η ανίσωση: $|x-1|\leq 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\geq 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1513

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$ (Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1517

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$.(1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ,λ. (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1518

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α. (Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha-2)x + \frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

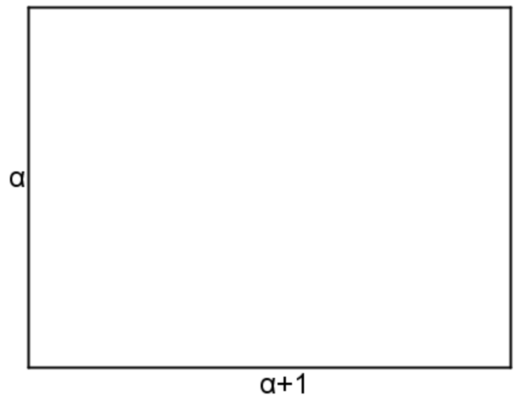
ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $x^2 - (\alpha-2)x + \frac{1}{4} > 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1520

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha+1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:



i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1522

α) Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2, $x\in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1240

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2=0$, $\alpha_4=4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=2$ και $\alpha_1=-2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu=2\nu-4$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1245

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν
- **i)** $x=1$
- **ii)** $x=-1$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1247

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1249

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1=19$ και $\alpha_{10}-\alpha_6=24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1256

Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε τη τιμή του x. (Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1266

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με παράμετρο $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1282

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4-\alpha_2=10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=5$. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1292

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu>30$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1325

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1=2$ και $\alpha_{25}=\alpha_{12}+39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1326

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$ (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1328

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_4-\alpha_9=15$ και $\alpha_1=41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με –3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu=\nu$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1329

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega=4$, ισχύει: $\alpha_6+\alpha_{11}=40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1336

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1343

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)

(Δίνεται: $\sqrt{1849}=43$)

ΘΕΜΑ 1344

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, …

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1347

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει κ καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^{η} σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1370

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1, 2, 3,…,ν. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

-

ΘΕΜΑ 1387

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^{η} σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^{η} σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην 1^{η} σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^{η} υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^{η} υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1395

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $ν \le 51$ ο αριθμός $α_ν$ εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $α_1$, $α_2$,…,$α_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1399

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος ($α_ν$), όπου $ν \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $α_1 = x$, $α_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $α_3 = x^2 - 2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = α_1 + α_3 + α_5 + ... + α_{15}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1411

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν-οστό όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^η$ κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^η$ κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1417

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^{η} μέχρι και την 14^{η} σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1430

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1453

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20}-\alpha_{10}=10\omega$. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20}-\alpha_{10}=30$ και $\alpha_1=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=3\nu-2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1471

Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2=\kappa^2$ και $\alpha_3=(\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega=7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1488

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1502

Οι αριθμοί: x^2+5, x^2+x, $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+...+\alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1503

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8=23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά της $\omega=3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+...+(\alpha_{31}+31)$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1507

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1242

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1257

α) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1265

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1) , με παράμετρο $\beta>0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ και $x_2=\frac{\beta}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1311

Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) **i)** Να εκφράσετε το 2^{ο} όρο, τον 5^{ο} και τον 4^{ο} όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1321

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1339

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1360

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1392

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.; (Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1394

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με βν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu\le 5$).

- **i)** Να δείξετε ότι η ακολουθία (βν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)
- **ii)** Να εκφράσετε το πλήθος βν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (Μονάδες 6)
- **iii)** Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1435

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον $1^{ο}$ μήνα 1 ευρώ, το $2^{ο}$ μήνα 2 ευρώ, τον $3^{ο}$ μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον $1^{ο}$ μήνα 100 ευρώ, το $2^{ο}$ μήνα 110 ευρώ, τον $3^{ο}$ μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) **i)** Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)
ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)
iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)
iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β) **i)** Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)
ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 1498

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α,β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E=1$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha+\beta=10$ τότε:
i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α,β. (Μονάδες 5)
ii) Να βρείτε τα μήκη α,β. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1499

Δίνονται οι αριθμοί 2 , x , 8 με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:
i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)
ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu+24)=\beta_7$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1519

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 15$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρεθούν ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των δέκα πρώτων όρων των ακολουθιών (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $S'_{10} = \dfrac{1}{2^9} S^{10}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1244

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4\ , & x<0 \\ x-1\ , & x \ge 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$ (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1255

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1263

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0{,}8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1283

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} 8-x\ , & x<0 \\ 2x+5\ , & x \ge 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1295

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1297

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1307

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο A(1,4),

α) να δείξετε ότι $\mu=-6$. (Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1354

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1372

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\leq 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές f(–1), f(3) και f(5). (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1385

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 . (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x)=\frac{1}{x-3}$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1389

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$, όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1390

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$, όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1454

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1457

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1495

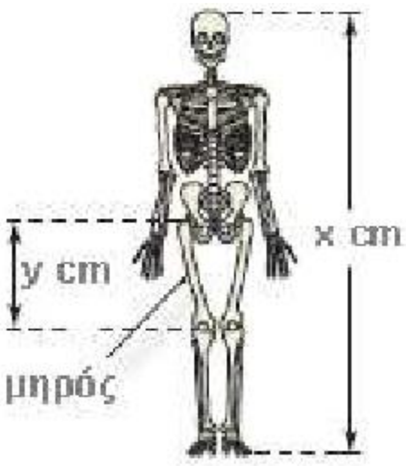
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(A = 90^\circ)$ με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x,y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $x \in (0,10)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1501



Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

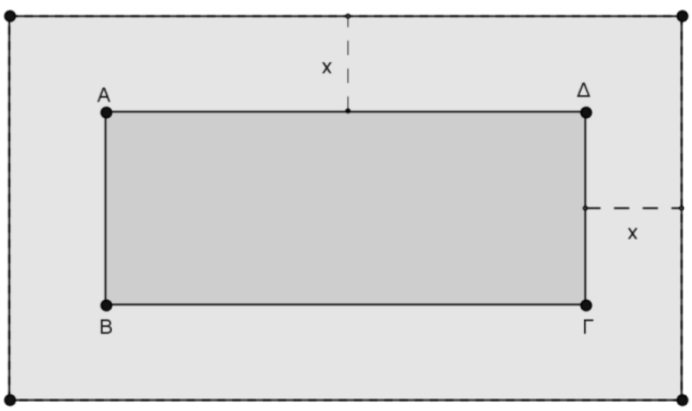
α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1505

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15 m και 25 m. Ο δήμος, για λόγους ασφαλείας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m $(x > 0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x)=4x^2+80x$, $x>0$ (Μονάδες 9)

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E=500\,m^2$. (Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\ m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1506

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40$ cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<20$. (Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x)=20x-x^2$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x)\le 100$, για κάθε $x\in(0,20)$. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1510

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος K(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μία σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα E(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii) να εχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1526

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

- $|1-3\alpha|<2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1259

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\dfrac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1299

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$ (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το Α(1,3). (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1301

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1302

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

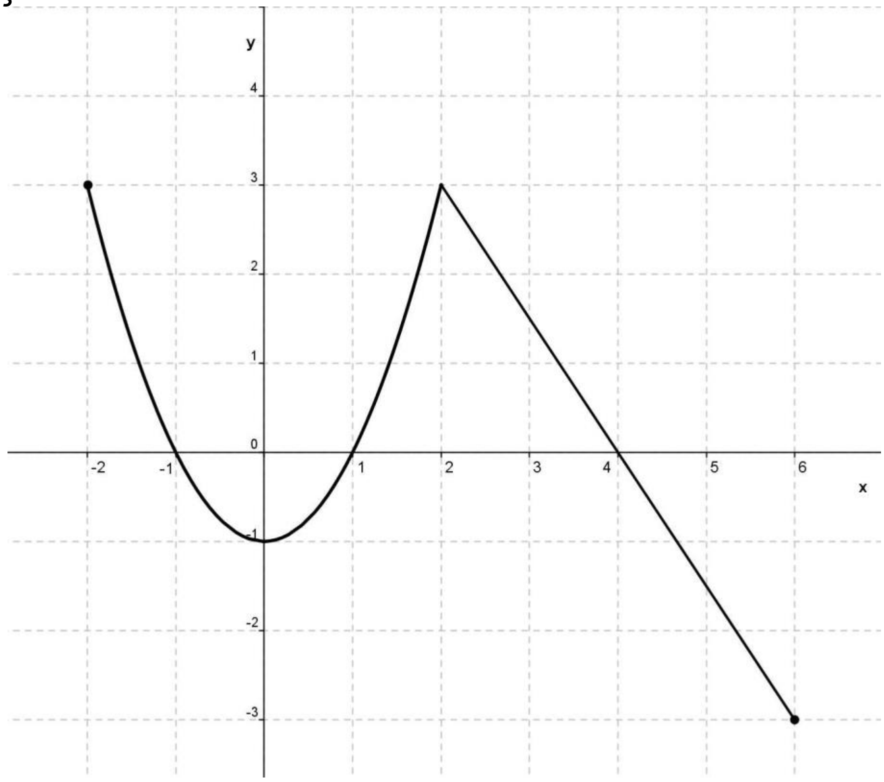
α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in A$. (Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1304

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–2	–1		1	2	
y			–1			–3

(Μονάδες 6)

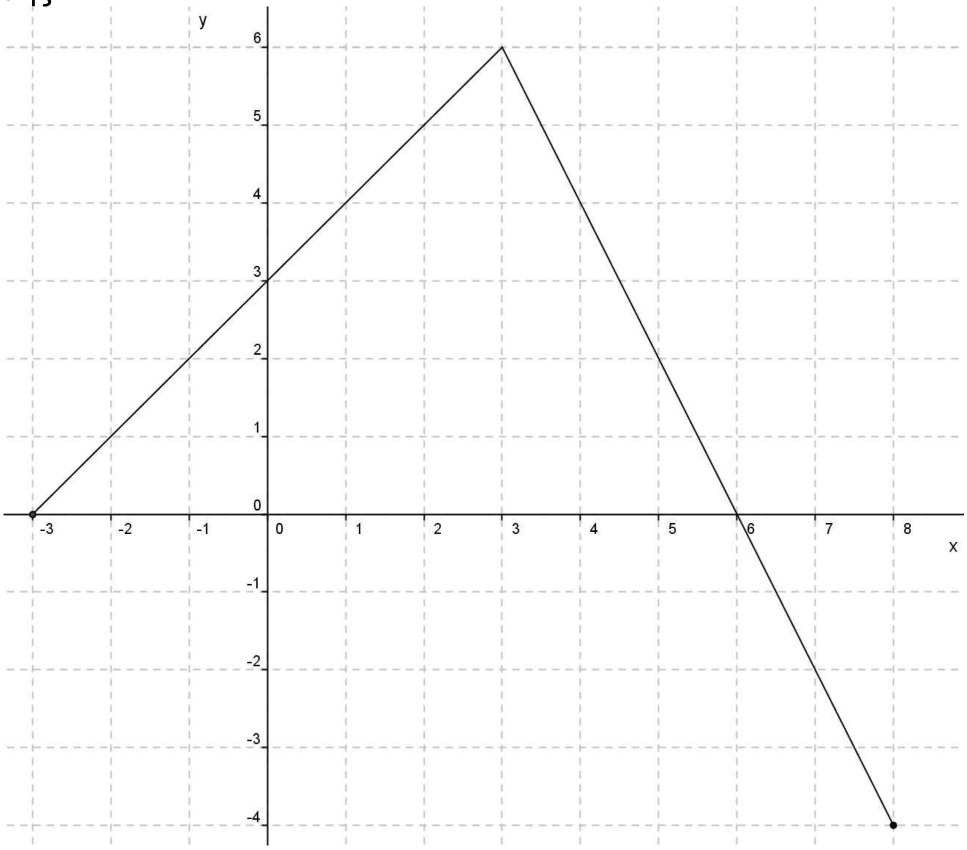
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1305

Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1345

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1358

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)-f(1)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1393

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1408

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1433

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

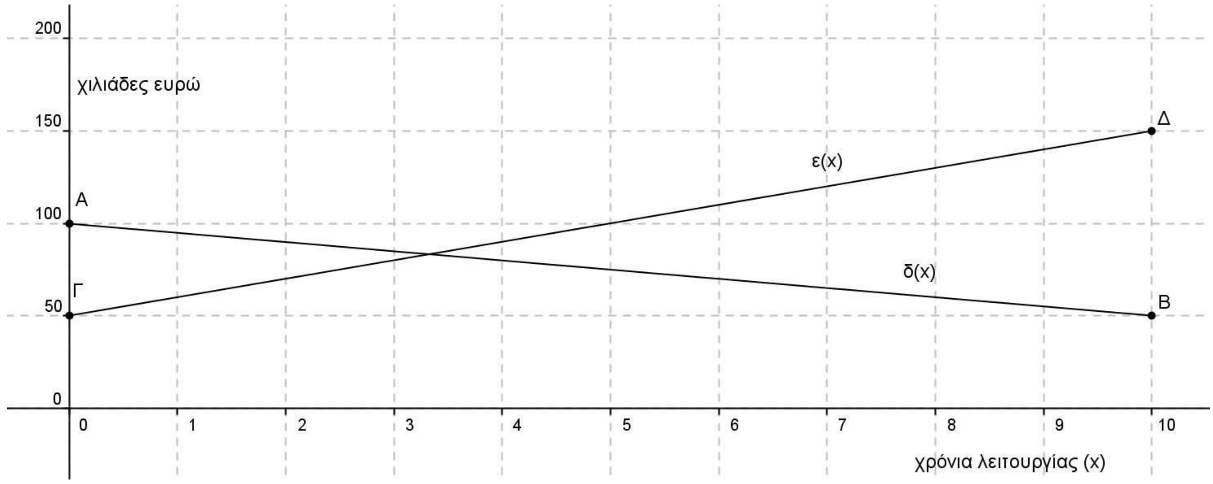
i) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1434

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(0,100) και Β(10,50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δ(x) των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0,50) και Δ(10,150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων δ(x), ε(x) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1444

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2). (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2,0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1446

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω Μ(x,y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $|2x-1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1447

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} -x+2, & \text{αν } x<0 \\ x+2, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 3)

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1449

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

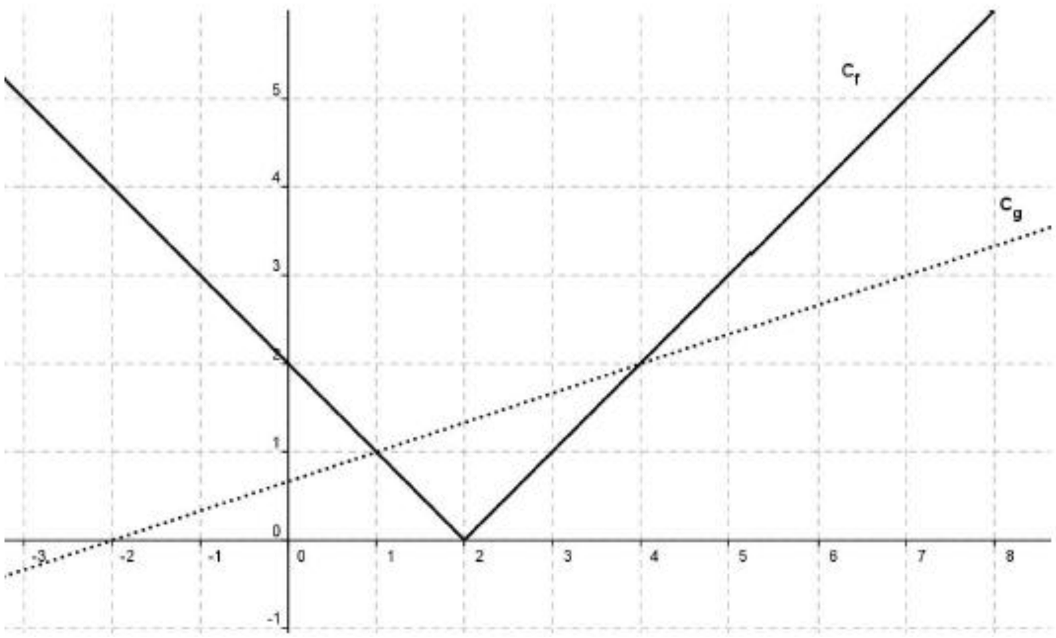
α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1468

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. (Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ) Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. (Μονάδες 6)

δ) Με την βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1470

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in$ IR και $\alpha\in$ IR.

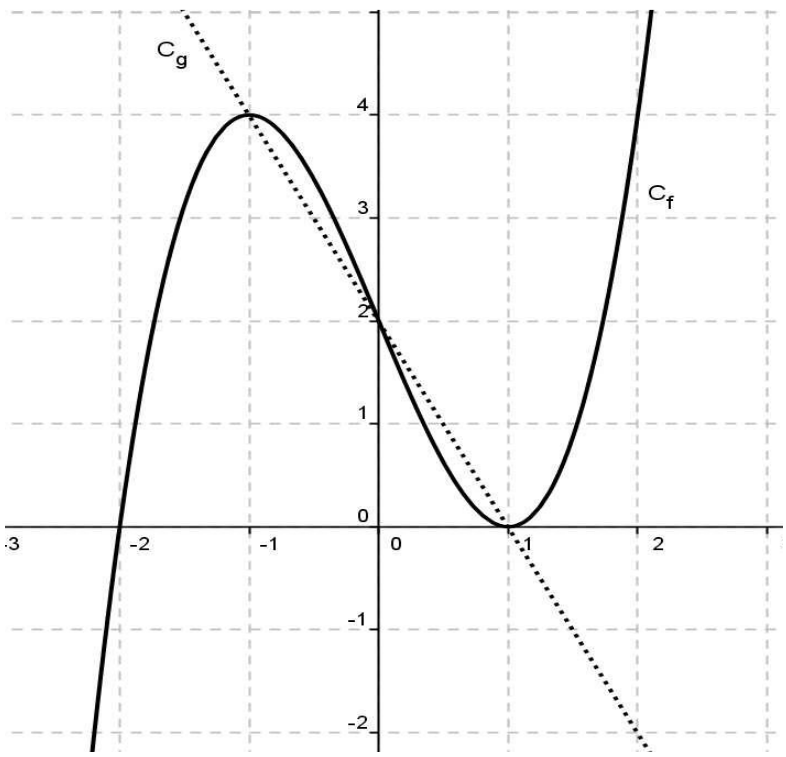
α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1490

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f: IR→IR και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$
(Μονάδες 6)

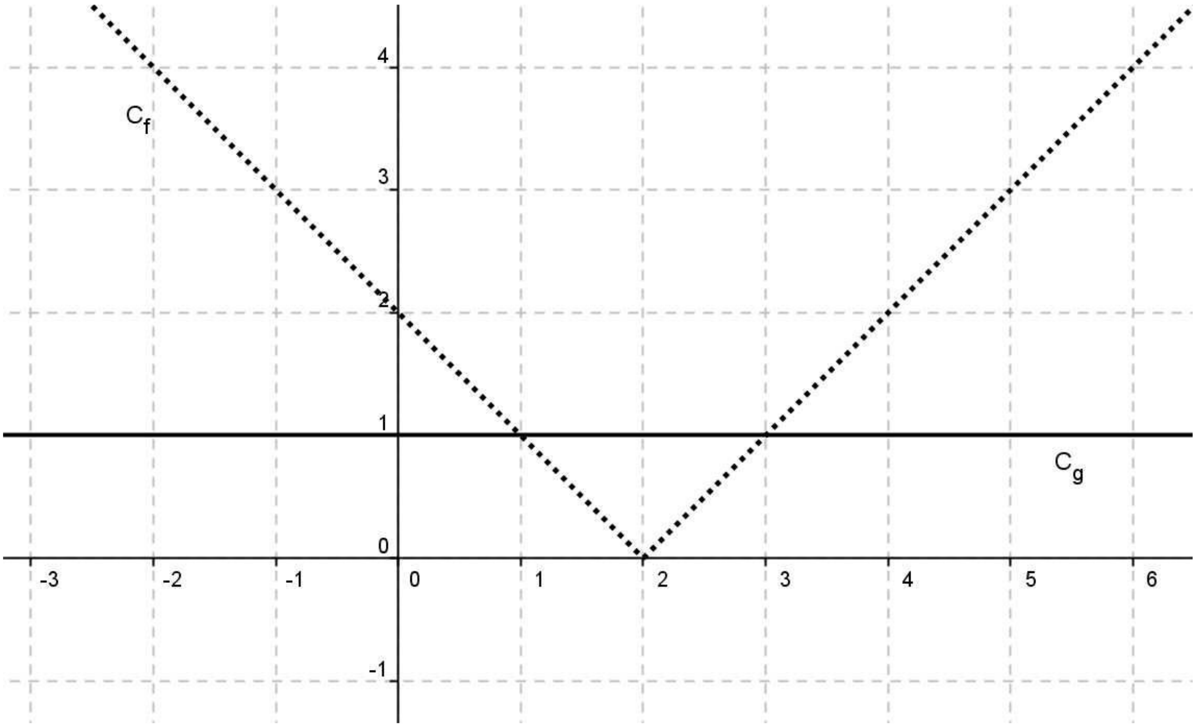
β) Τις τιμές f(–1) , f(0) , f(1).
(Μονάδες 6)

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 6)

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1514

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$A=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1524

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1241

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,6), Β(–1,4) να βρείτε τις τιμές των α,β. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1275

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1294

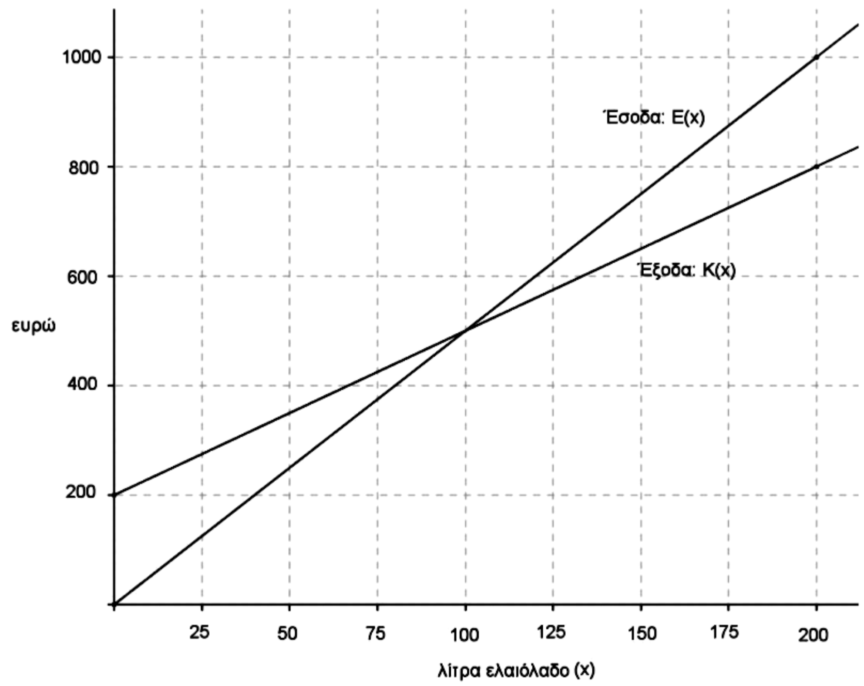
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x'x και y'y. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1386



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1398

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1400

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12{,}5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x)=15{,}5\cdot x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1403

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1410

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$ (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1467

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0{,}5x & \text{αν } 0 \le x \le 30 \\ 0{,}7x + 6 & \text{αν } x > 30 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x) = 12 + 0{,}6x$, για $x \ge 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δυο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1479

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0{,}20x$ όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0{,}10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x)=60+0{,}20x$ και $g(x)=80+0{,}10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1496

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f,g και τους τύπους τους f(x), g(x). (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 1523

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3\ , & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$ (Μονάδες 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$. (Μονάδες 5)