Θεωρία

Αποδείξεις

1. **Να αποδείξετε ότι** $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2 \Leftrightarrow |\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$$, που ισχύει

2. **Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha \neq 0$, δίνονται από τους τύπους $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ (τύποι Vieta)**

Έστω ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, τότε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα x_1+x_2 και P το γινόμενο x_1x_2 τότε έχουμε τους τύπους

$S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$, οι οποίοι είναι γνωστοί ως τύποι του **Vieta**

3. **Αν $\alpha,\beta \geq 0$ τότε** $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

Έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha\beta}\right)^\nu \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\beta$$

που ισχύει

****

Ε2. Σύνολα

- **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων , που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησης μας , είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο (ορισμός Cantor)
  - N : σύνολο φυσικών αριθμών
  - Z : σύνολο ακεραίων
  - Q : σύνολο ρητών

  - $\Re$: σύνολο πραγματικών αριθμών
- Δύο σύνολα λέγονται **ίσα** όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία
- Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** του συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείου του Α είναι και στοιχείο του Β .Συμβολίζεται $A \subseteq B$
- **Κενό** είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Συμβολίζεται $\varnothing$
- **Ένωση** δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν **τουλάχιστον σε ένα** από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται $A \cup B$
- **Τομή** δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν **και στα δύο** σύνολα Α και Β και συμβολίζεται $A \cap B$
- **Συμπλήρωμα** ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που **δεν ανήκουν στο Α** και συμβολίζεται Α΄

2.3 Απόλυτη τιμή

Ορισμός : Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \ \alpha < 0 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία : Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα. Η απόσταση του Α από την αρχή Ο , δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται απόλυτη τιμή του α και συμβολίζεται $|\alpha|$

Ιδιότητες

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ **και** $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$
- **Αν θ>0 , τότε :** $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -\alpha$
- $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- **Αν θ>0 , τότε:** $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- **Αν θ>0 , τότε :** $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta$

Απόσταση δύο αριθμών: Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως . Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση των αριθμών α και β** , συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με $|a-\beta|$.Είναι δηλαδή $d(a,\beta)=|a-\beta|$

2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

Ορισμός : Η **τετραγωνική ρίζα** ενός <u>μη αρνητικου</u> αριθμού α συμβολίζεται $\sqrt{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο , δίνει τον α

Ορισμός : Η **ν- οστή ρίζα** ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στη ν , δίνει τον α

Ορισμός : Αν α>0 ,μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος , τότε ορίζουμε: $a^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας

- $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$
- $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Ιδιότητες ν-οστής ρίζας

- **Αν α$\geq$0 , τότε :** $\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu}=\alpha$ **και** $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=\alpha$
- **Αν α$\leq$0 και ν άρτιος , τότε :** $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=|\alpha|$
- **Αν α,β$\geq$0 , τότε:**
  - $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{a\beta}$
  - $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$
  - $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}$
  - $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

3.1 Εξισώσεις 1^ου^ βαθμού

Στην εξίσωση αx+β =0 , έχουμε: $ax+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$. **Διακρίνουμε περιπτώσεις** :

- Αν α$\neq$0 τότε :

$$\alpha x=-\beta \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Επομένως , αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση **έχει μοναδική λύση,** την $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

- Αν α=0 , τότε η εξίσωση αx=-β γίνεται 0x=-β, η οποία:
    - αν $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι αυτό τη λέμε **αδύνατη**
    - αν β=0 έχει τη μορφή 0x=0 και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα.**

3.2 Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση **$x^\nu=\alpha$** έχει τις παρακάτω λύσεις ανάλογα με τις εξής περιπτώσεις :

α	**ν**	**Λύση**
$\alpha > 0$	άρτιος	Δύο : $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha > 0$	περιττός	Μία : $\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha < 0$	άρτιος	αδύνατη
$\alpha < 0$	περιττός	Μία : $-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

Σημείωση : $x^\nu = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Αν ν περιττός τότε $x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha$
- Αν ν άρτιος τότε $x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \pm\alpha$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	**Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$**
Δ>0	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Δ=0	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
Δ<0	Είναι αδύνατη στο R

4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

Στην ανίσωση αx+β>0 ,έχουμε:

$$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- αν α>0 τότε $x > -\frac{\beta}{\alpha}$
- αν α<0 τότε $x < -\frac{\beta}{\alpha}$
- αν α=0 τότε:
    - αληθεύει για κάθε $x \in \Re$, αν β>0
    - είναι αδύνατη , αν είναι $\beta \leq 0$

4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

*Α. Μορφές τριωνύμου-**Παραγοντοποίηση τριωνύμου***

- Αν Δ>0 , τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$ όπου x_1,x_2 οι ρίζες του τριωνύμου
- Αν Δ=0 , τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$ όπου x_0 η διπλή ρίζα του τριωνύμου
- Αν Δ<0 , τότε το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων

Β. Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Το τριώνυμο **$\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$** γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** , μόνον όταν Δ>0 και για τις τιμές του x, που βρίσκονται μεταξύ των ριζών
- **Μηδέν,** όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου
- **Ομόσημο** του α σε κάθε άλλη περίπτωση

Γ. Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο

- $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) > 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) < 0$

6.1 Η έννοια της συνάρτησης

Ορισμός : Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μία διαδικασία με την οποία <u>κάθε</u> στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται <u>σε ένα ακριβώς</u> στοιχείο του συνόλου Β

- Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** της f
- Το f(x) λέγεται **τιμή της f** στο x
- Το x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y=f(x) **εξαρτημένη μεταβλητή**
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές f(x) για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με f(A)

6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Ορισμός : Το σύνολο των σημείων Μ(x,f(x)) με $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συνήθως συμβολίζεται με C_f.

- Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο
- Αν Α(α, β) ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου , τότε:
  - Το συμμετρικό του ως προς τον x΄x είναι Δ(α,-β)
  - Το συμμετρικό του ως προς τον y΄y είναι Δ(-α, β)
  - Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι Δ(-α,-β)
  - Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι Δ(β, α)

Απόσταση σημείων

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού. Τότε **η απόσταση τους** δίνεται από τον τύπο

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

6.3 Η συνάρτηση f(x)=αx+β

- Η γραφική παράσταση της f(x)=αx+β είναι **ευθεία** γραμμή
- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μία ευθεία που τέμνει τον άξονα x΄x στο Α. Τη γωνία που διαγράφει η ημιευθεία Ax , όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x** .Αν ω η γωνία τότε $0^0 \le \omega < 180^0$
- **Συντελεστής διεύθυνσης** ή κλίση μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που αυτή σχηματίζει με τον x΄x. Δηλαδή **λ_ε=εφω** . Αν $\omega=90^0$ τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης
- Αν θεωρήσουμε $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο τυχαία σημεία της ευθείας y=αx+β τότε

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ με } x_1 \ne x_2 \qquad (\text{α : συντελεστής διεύθυνσης })$$

- Αν α>0 τότε η γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x είναι οξεία, αν α<0 αμβλεία και αν α=0 τότε $\omega=0^0$
-

y=αx	Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
y=x	Η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων
y=-x	Η διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων

- **(συνθήκη παραλληλίας)**Αν θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ τότε

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

6.5 Μονοτονία-Ακρότατα –Συμμετρίες συνάρτησης

- Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$
- Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$
- Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν $f(x) \geq f(x_0)$, <u>για κάθε</u> $x \in A$
- Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν $f(x) \leq f(x_0)$, <u>για κάθε</u> $x \in A$
- Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **άρτια** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

  $$-x \in A \text{ και } f(-x)=f(x)$$

  Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y
- Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **περιττή** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

  $$-x \in A \text{ και } f(-x)=-f(x)$$

  Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0)