1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο-Θεωρία και βασικά παραδείγματα

- **1.** Κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ όπου x,y πραγματικοί. Οι **αριθμοί x, y λέγονται συντεταγμένες του** $\vec{a}$ (το x τετμημένη και το y τεταγμένη) .Συμβολικά γράφουμε $\vec{a} = (x, y)$ δηλαδή

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (x, y)$$

Παράδειγμα 1 : Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} - 2\vec{j}$

- $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (2,3)$ και $\vec{\beta} = \vec{i} - 2\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\beta} = (1,-2)$ (δηλαδή οι συντελεστές των διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δίνουν τις συντεταγμένες του διανύσματος)

Παράδειγμα 2 : Αν για το σημείο Α(5,-2) , ποιες είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\mathrm{OA}}$ όπου Ο(0,0);

- $\vec{\mathrm{OA}} = (5,-2)$

****

- **2. Δύο διανύσματα είναι ίσα**, αν και μόνον αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες είναι ίσες δηλαδή αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$$

Παράδειγμα 3: Να βρεθούν οι τιμές του λ ,μ ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, 2\mu - 1)$ και $\vec{\beta} = (\mu + 1, \lambda + 1)$ να είναι ίσα

- $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda = \mu + 1$ και $2\mu - 1 = \lambda + 1$ (τα διανύσματα έχουν την ίδια τετμημένη και την ίδια τεταγμένη) οπότε λύνω το σύστημα των εξισώσεων :
$\begin{cases} \lambda = \mu + 1 \\ 2\mu - 1 = \lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 2 \end{cases}$ άρα με πρόσθεση κατά μέλη μ=3 και στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην λ-μ=1 , έχουμε λ=4

Παράδειγμα 4: Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda^2 + 1, \lambda^2 + 3\lambda)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda, 4)$ να είναι ίσα

- $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 2\lambda$ και $\lambda^2 + 3\lambda = 4$ οπότε

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \text{ και } \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

- $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$
- $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -4$ (από διακρίνουσα)

άρα λ=1(κοινή λύση)

****

- **3. Μηδενικό διάνυσμα** $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0$ όπου $\vec{a} = (x, y)$

Παράδειγμα 5: Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε το διάνυσμα

$\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 1, 2\lambda^2 + \lambda - 1)$ να είναι μηδενικό διάνυσμα

- $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$ και $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$
  - $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 1$ (διαφορά τετραγώνων)
  - $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$ (με διακρίνουσα)

  άρα λ=-1 (κοινή λύση)

  ****

- **4. Διάνυσμα παράλληλο στον x΄x** $\vec{a} \parallel x'x \Leftrightarrow y = 0$
- **5. Διάνυσμα παράλληλο στον y΄y** $\vec{a} \parallel y'y \Leftrightarrow x = 0$

Παράδειγμα 6 : Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες για το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^3 - 1, \lambda^2 - 3\lambda + 2)$ να ισχύουν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} \parallel x'x$ συγχρόνως

- $\vec{a} \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή λ=2
  - Για λ=1 τότε , με αντικατάσταση του λ στο διάνυσμα, $\vec{a} = (0,0)$
  - Για λ=2 τότε , με αντικατάσταση του λ στο διάνυσμα, $\vec{a} = (7,0)$

οπότε η τιμή λ=1 απορρίπτεται (γιατί $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$) άρα δεκτή λ=2

****

- **6. Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού-πράξεις διανυσμάτων**
  - $\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
  - $\lambda\vec{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ όπου λ πραγματικός αριθμός

Παράδειγμα 7:Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 2)$

α. Να βρείτε τους συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$

β. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v} = (-3, 6)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$

- **α.** Είναι

$$\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta} \Leftrightarrow$$
$$\vec{\gamma}=2(1,-3)-3(-1,2) \Leftrightarrow$$
$$\vec{\gamma}=(2,-6)+(3,-6) \Leftrightarrow$$
$$\vec{\gamma}=(5,-12)$$

- **β.** Το διάνυσμα $\vec{v}=(-3,6)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$ όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ, μ (ή τους αλλιώς θέλετε να τους συμβολίσετε) ώστε $\vec{v}=\lambda\,\vec{\gamma}+\mu\,\vec{\alpha}$ με $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ δηλαδή

$$(-3,6)=\lambda(5,-12)+\mu(1,-3) \Leftrightarrow$$
$$(-3,6)=(5\lambda,-12\lambda)+(\mu,-3\mu) \Leftrightarrow$$
$$(-3,6)=(5\lambda+\mu,-12\lambda-3\mu) \Leftrightarrow$$
$$-3=5\lambda+\mu \text{ και } 6=-12\lambda-3\mu$$

με $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Με επίλυση του συστήματος (μέθοδος αντίθετων συντελεστών ή όποια μέθοδο θέλετε) προκύπτει λ=-1 και μ=2

****

- **7.Συντεταγμένες μέσου ευθυγράμμου τμήματος** : Έστω ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ και $M(x,y)$ το μέσον του, τότε: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

Παράδειγμα 8: Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(-1,2) και Β(3,4)

α. Να βρείτε το μέσον Μ του ΑΒ

β. Να βρείτε το σημείο Γ ώστε το Β να είναι το μέσον του ΜΓ

- α. Είναι Μ μέσον του ΑΒ

άρα $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ και $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ οπότε $x_M=\dfrac{-1+3}{2}=1$ και $y_M=\dfrac{2+4}{2}=3$

δηλαδή Μ(1,3)

- β. Είναι Β μέσον του ΜΓ

  άρα $x_B=\dfrac{x_M+x_\Gamma}{2}$ και $y_B=\dfrac{y_M+y_\Gamma}{2}$ οπότε

$x_B=\dfrac{x_M+x_\Gamma}{2}$ άρα $3=\dfrac{1+x_\Gamma}{2}\Leftrightarrow 6=1+x_\Gamma \Leftrightarrow x_\Gamma=5$

$y_B=\dfrac{y_M+y_\Gamma}{2}$ άρα $3=\dfrac{3+y_\Gamma}{2}\Leftrightarrow 6=3+y_\Gamma \Leftrightarrow y_\Gamma=3$ οπότε Γ(3,3)

****

- **8. Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα**: Αν Α(x_1,y_1) και Β(x_2,y_2) τότε
  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Παράδειγμα 9 : Αν Α (1,3) και Β(-5,2) να βρείτε επίσης συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καθώς επίσης και το σημείο Δ ώστε $\vec{A\Delta} = 2\vec{AB}$

- $\overrightarrow{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-5,2) - (1,3) = (-6,-1)$

- Είναι
$$\begin{aligned}
&\vec{A\Delta} = 2\vec{AB} \Leftrightarrow \\
&\vec{O\Delta} - \vec{OA} = 2(\vec{OB} - \vec{OA}) \Leftrightarrow \\
&\vec{O\Delta} - \vec{OA} = 2\vec{OB} - 2\vec{OA} \Leftrightarrow \\
&\vec{O\Delta} = 2\vec{OB} - \vec{OA} \Leftrightarrow \\
&\vec{O\Delta} = 2(-5,2) - (1,3) \Leftrightarrow \\
&\vec{O\Delta} = (-11,1)
\end{aligned}$$

****

- **9.Μέτρο διανύσματος** : Αν $\vec{a} = (x, y)$ τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Παράδειγμα 10: Να υπολογιστεί το μέτρο του $\vec{a} = (3,-4)$

- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Παράδειγμα 11: Αν Α(-2,2) και Β(-1,4) , να υπολογιστεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

- Αρχικά, βρίσκω τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ δηλαδή

$\overrightarrow{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1,4) - (-2,2) = (1,2)$ και στη συνέχεια το μέτρο του

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Παράδειγμα 12: Έστω $\overrightarrow{AB} = (x, x+1)$ με x πραγματικό. Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να έχει μέτρο 5

- $\overrightarrow{AB} = (x, x+1)$ άρα $|\overrightarrow{AB}| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 5$ όποτε

$\sqrt{x^2+(x+1)^2}=5 \Leftrightarrow$ (υψώνω και τα δύο μέλη στο τετράγωνο)

$x^2+(x+1)^2=25 \Leftrightarrow$

$2x^2+2x-24=0 \Leftrightarrow x=3$ ή x=-4

****

- **10.Απόσταση δύο σημείων στο επίπεδο** : Έστω τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τότε η απόστασή τους στο επίπεδο δίνεται από τον τύπο $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Παράδειγμα 13 : Να βρεθεί σημείο Μ του άξονα x΄x ώστε να ισαπέχει από τα σημεία Α(1,3) και Β(-1,-2)

- Έστω Μ(x,0) όπου x πραγματικός αριθμός

Είναι (ΜΑ)=(ΜΒ) άρα

$\sqrt{(1-x)^{2+}+(3-0)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(-2-0)^2} \Leftrightarrow$

$(1-x)^2+9=(1+x)^2+4 \Leftrightarrow 1-2x+x^2+9=1+2x+x^2+4 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$

άρα Μ($\dfrac{5}{4}$,0)

Παρατήρηση: Σημείο του άξονα x΄x είναι της μορφής Μ(x,0) ενώ του y΄y είναι της μορφής Μ(0,y)

****

- **11.Ορίζουσα διανυσμάτων :** αν $\vec{a}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε

$$\det(\vec{a},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$$

- **12.Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων :** $\vec{a}\parallel\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{\beta})=0$

Παράδειγμα 14: Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x ώστε τα διανύσματα

$\vec{a}=(x,-4)$ και $\vec{\beta}=(x-5,-5x+16)$ να είναι παράλληλα

- $\vec{a}\parallel\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -4 \\ x-5 & -5x+16 \end{vmatrix}=0$

άρα $x(-5x+16)-(-4)(x-5)=0$ οπότε, εκτελώντας πράξεις, λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε x=2

Παράδειγμα 14 : Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(3,2) ,Β (1,-4) και Γ(-2,-13) είναι **συνευθειακά σημεία**

- Αρχικά βρίσκουμε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων, έστω $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(1,-4)-(3,2)=(-2,-6)$

$\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OB}=(-2,-13)-(1,-4)=(-3,-9)$

και στη συνέχεια παίρνουμε την ορίζουσά τους

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 18-18=0 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει

άρα τα διανύσματα είναι συγγραμμικά (παράλληλα) άρα τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά

****

- **13.Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος(εφόσον ορίζεται)** : αν $\vec{a}=(x,y)$ τότε $\lambda=\frac{y}{x}=\varepsilon\phi\omega$ όπου $x\neq 0$ και ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον x΄x
- **14.Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων :** $\vec{a}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2$ όπου λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων (εφόσον ορίζεται)

Παράδειγμα 15 : Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ όπου Α(2,-4) , Β(-3,6) και Γ(2,5)

- Αρχικά βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
- $\overrightarrow{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(-3,6)-(2,-4)=(-5,10)$ οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης του είναι $\lambda=\frac{y}{x}=\frac{10}{-5}=-2$
- $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OA}=(2,5)-(2,-4)=(0,9)$ οπότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης διότι η τετμημένη του διανύσματος είναι μηδέν

Παρατήρηση: Τα διανύσματα με τετμημένη μηδέν (x=0) δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης και είναι παράλληλα στον άξονα y΄y

****