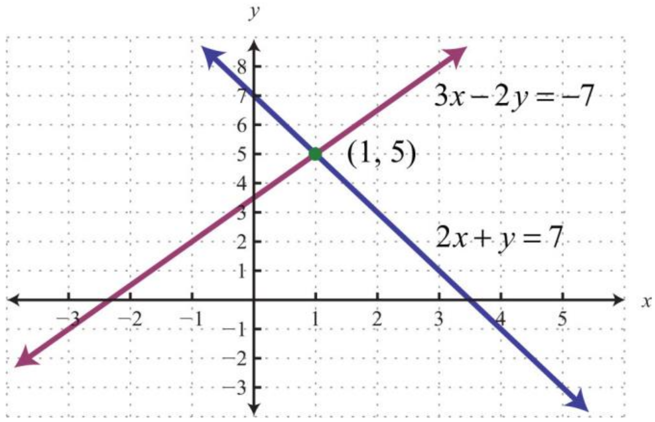

1.1. Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

Αν κάθε γραμμική εξίσωση (της μορφής αx+βy=γ με $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$) παριστάνει μία ευθεία, τότε 2 γραμμικές εξισώσεις θα παριστάνουν 2 ευθείες

$$\begin{cases} \mathbf{\alpha x + \beta y = \gamma} \\ \mathbf{\alpha' x + \beta' y = \gamma'} \end{cases}$$

Όταν μιλάμε για **σύστημα** μιλάμε για **κοινές λύσεις!**

- **Γεωμετρική ερμηνεία**
  - δύο ευθείες μπορεί να τέμνονται (ένα κοινό σημείο-μοναδική λύση συστήματος)
  - δύο ευθείες μπορεί να είναι παράλληλες(κανένα κοινό σημείο-αδύνατο σύστημα)
  - δύο ευθείες μπορεί να ταυτίζονται (άπειρα κοινά σημεία-αόριστο σύστημα)

1.1α.Επίλυση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Προτού λύσουμε ένα οποιοδήποτε σύστημα, προκειμένου να βγάλουμε μιαν άκρη, επιβάλλεται να το φέρουμε πρώτα σε **κανονική μορφή**, δηλαδή στη μορφή:

$$\begin{cases} \mathbf{\alpha x + \beta y = \gamma} \\ \mathbf{\alpha' x + \beta' y = \gamma'} \end{cases}$$

Με απλά λόγια, έχουν εκτελεστεί τα παρακάτω:

1. Απαλοιφή παρονομαστών.
2. Απαλοιφή παρενθέσεων.
3. Χωρισμός γνωστών από αγνώστους.
4. Αναγωγή ομοίων όρων.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην επίλυση του συστήματος επιλέγοντας κάποια από τις παρακάτω μεθόδους:

Α. Μέθοδος της Αντικατάστασης

Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο (όποιον επιθυμούμε, άρα όποιον μας συμφέρει) και **αντικαθιστούμε** το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-4)+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-8+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y=9 \\ x=2y-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2\cdot 1-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Β. Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις 2 εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές μπροστά από κάποιον άγνωστο (πάλι επιλέγουμε αυθαίρετα όποιον μας συμφέρει). Στη συνέχεια, **προσθέτουμε** τις 2 εξισώσεις **κατά μέλη**. Έτσι προκύπτει και πάλι μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

Επιλέγουμε αυθαίρετα τον άγνωστο x

Ο συντελεστής του x είναι το **2** $\longrightarrow$
Ο συντελεστής του x είναι το **1** $\longrightarrow$

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-2y=-4 \end{cases}$$

πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με **1**
πολλαπλασιάζουμε την 2η εξίσωση με **2**

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-2y=-4 \end{cases}$$

αλλά επειδή δε θα προκύψουν αντίθετοι συντελεστές πολλαπλασιάζω την πρώτη εξίσωση με -1

$$\begin{matrix} -\mathbf{1}\cdot \\ \mathbf{2}\cdot \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{2x+5y=1} \\ \mathbf{x-2y=-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{-2x-5y=-1} \\ \mathbf{2x-4y=-8} \end{cases}$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη:

$$\oplus \begin{cases} \mathbf{-\cancel{2x}-5y=-1} \\ \mathbf{\cancel{2x}-4y=-8} \end{cases}$$

$$\mathbf{-9y=-9 \Leftrightarrow y=1}$$

Στη συνέχεια, με αντικατάσταση της λύσης που βρήκαμε είτε στην (1), είτε στη (2), υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$\mathbf{(2) \Leftrightarrow x-2\cdot 1=-4 \Leftrightarrow x=2-4 \Leftrightarrow x=-2}$$

Γ Μέθοδος των Οριζουσών

Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 σε κανονική μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Θα ονομάζουμε **Ορίζουσα** του συστήματος και θα τη συμβολίζουμε με το γράμμα **D**, την παρακάτω έκφραση:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

Αντίστοιχα, ορίζονται οι ορίζουσες **ως προς x** και **ως προς y**, ως εξής:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \qquad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διερεύνηση του συστήματος, ως εξής:

Διερεύνηση

Αν **D ≠ 0** τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** που δίνεται από τους τύπους:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

Αν **D = 0**, όμως συμβαίνει ένα από τα δύο **Dx ≠0** ή **Dy ≠ 0** τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Αν **D = Dx = Dy = 0** τότε το σύστημα είναι **αόριστο**, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα

Άντε πάλι το ίδιο σύστημα… $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος :

$$\mathbf{D}=\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}=\mathbf{2\cdot(-2)-1\cdot 5=-4-5=-9}$$

$$\mathbf{Dx}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}=\mathbf{1\cdot(-2)-(-4)\cdot 5=-2+20=18}$$

$$\mathbf{Dy}=\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{vmatrix}=\mathbf{2\cdot(-4)-1\cdot 1=-8-1=-9}$$

Εφόσον D = –9 ≠ 0 το σύστημα θα έχει **μοναδική λύση** την :

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{Dx}}{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{-9}}=\mathbf{-2} \quad , \quad \mathbf{y}=\frac{\mathbf{Dy}}{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{-9}}{\mathbf{-9}}=\mathbf{1}$$

1.1 β Γραμμικά Συστήματα 3x3

Σα να μην έφταναν όλα μας τα προβλήματα, χρειάζεται τώρα να μάθουμε πως υπάρχουν επιπλέον και συστήματα **3 εξισώσεων** με **3 αγνώστους** !

Η Μέθοδος

Λύνουμε μία από τις 3 εξισώσεις ως προς έναν από τους 3 αγνώστους. Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στις άλλες δύο εξισώσεις.

Παράδειγμα

Να λύθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x+y-z=2 & (1) \\ 4x-y-3z=-2 & (2) \\ 2x+2y-z=9 & (3) \end{cases}$

Λύνουμε πχ. την (1) ως προς y και κατόπιν αντικαθιστούμε στις (2) και (3):

$$\begin{cases} y=-2x+z+2 \\ 4x-(-2x+z+2)-3z=-2 \\ 2x+2(-2x+z+2)-z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+z+2 \\ 4x+2x-z-2-3z=-2 \\ 2x-4x+2z+4-z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+z+2 & (1) \\ 6x-4z=0 & (2) \\ -2x+z=5 & (3) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι από τις (2) και (3) απαλείφθηκε ο άγνωστος y κι έτσι έχουμε καταλήξει σε ένα σύστημα 2x2, το οποίο λύνεται πολύ εύκολα:

$$\begin{cases} 6x-4z=0 \\ -2x+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4z=0 \\ z=5+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4(5+2x)=0 \\ z=5+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-20-8x=0 \\ z=5+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=20 \\ z=5+2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ z=5+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ z=5+2(-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ z=-15 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τις λύσεις x = –10 και z = –15 στην εξίσωση (1) :

$y = -2x + z + 2 \Leftrightarrow y = -2(-10) + (-15) + 2 \Leftrightarrow y = 20 - 15 + 2 \Leftrightarrow y = 7$

Τελικά, η λύση του συστήματος είναι η **διατεταγμένη τριάδα** αριθμών :

$(x, y, z) = (-10, 7, -15)$

1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

Ένα μη γραμμικό σύστημα είναι αυτό ακριβώς που λέει τ' όνομά του: μία ή και οι δύο
από τις εξισώσεις που το συνθέτουν **δεν είναι** γραμμική.

Αν μία από τις δύο εξισώσεις είναι (συνήθως) **1ου βαθμού**, ως προς κάποιον άγνωστο τότε λύνοντας ως προς αυτόν ακριβώς τον άγνωστο, συνεχίζουμε κάνοντας αντικατάσταση, με το συνηθισμένο τρόπο.

Παράδειγμα

Να λύθεί το σύστημα $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2-2y^2=14 \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathbf{x-y=3} \\ \mathbf{x^2-2y^2=14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=y+3} \\ \mathbf{x^2-2y^2=14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=y+3} & (1) \\ \mathbf{(y+3)^2-2y^2=14} & (2) \end{cases}$$

Λύνουμε τη (2) κανονικά, όπως κάθε εξίσωση 2ου βαθμού:

$\mathbf{y^2 + 6y + 9 - 2y^2 = 14 \Leftrightarrow - y^2 + 6y - 5 = 0 \quad \Delta = 6^2 - 4(-1)(-5) = 36 - 20 = 16}$

$$\mathbf{y_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-6\pm 4}{-2} \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ ή } y_2 = 5}$$

Άρα, για $y_1 = 1$:

(1) ⇔ x = 1 + 3 ⇔ x = 4 δηλαδή μια λύση είναι η **(x, y) = (4, 1)** .

Αντίστοιχα, για $y_2 = 5$:

(1) ⇔ x = 5 + 3 ⇔ x = 8 δηλαδή μια δεύτερη λύση είναι η **(x, y) = (8, 5)** .

Παρατήρηση

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι τα μη γραμμικά συστήματα δεν έχουν απαραίτητα μία μοναδική λύση, αλλά πιθανότατα 2 ή περισσότερες. Για παράδειγμα, στο σύστημα που μόλις λύσαμε, έχουμε βρει **δύο λύσεις**, που το ικανοποιούν: **(4, 1) και (8, 5)**

Ασκήσεις για λύση

1. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{3} \\ 3x+5y=59 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ x-\dfrac{y}{2}=3 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} 3x-5=2(y+1)-8 \\ 2(x-1)=3(1-2y)+9 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3(2-x)-5(y+2)=3x-1 \\ 4(x-y)-5x=2x+3(x-y) \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{1-2x}{3}+\dfrac{1+y}{2}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=x+2 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}(2x+y)=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+y}{3}=2-3y \end{cases}$

3. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ |3x-5y|=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3|x+1|-|y-2|=3 \\ |x+1|+2|y-2|=8 \end{cases}$

4. Ομοίως:

α. $\begin{cases} \dfrac{1}{3+x+2y}+\dfrac{3}{6+4x-5y}=0 \\ 3(6x-5y+4)=3x+2y+401 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=8 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=3 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} \dfrac{-3}{x-7}+\dfrac{5}{y+3}=7 \\ \dfrac{5}{x-7}-\dfrac{4}{y+3}=-3 \end{cases}$

5. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=0 \\ \sqrt{(x-y)^2}=2 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} |x+1|=|x+y| \\ 3x+5y=9 \end{cases}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\begin{vmatrix} 1+x & 1+x^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix}=x$ **β.** $\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+x \\ 1-x+x^2 & 1-x \end{vmatrix}=16$

7. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ x+y-2z=-1 \\ -x+2y+2z=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ 4x-y-3z=-2 \\ 2x+2y-\dfrac{2}{3}z=9 \end{cases}$

8. Να δείξετε ότι τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα:

α. $\begin{cases} 20x+y=1 \\ y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x+z=2 \\ 2x+y-z=0 \\ 2x+z=0 \\ x+y+z=16 \end{cases}$

9. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} 3x+y=6 \\ xy=3 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x-3y=1 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} (3x+2).(x-y)=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ xy(x+y)=12 \end{cases}$

10. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x^3+8y^4=0 \\ \frac{3}{2}x^3+10y^4=-2 \end{cases}$

11. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \\ x+y=13 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3\sqrt{x}-6\sqrt{y}=7 \\ 2\sqrt{x}-4\sqrt{y}=-1 \end{cases}$