

2<sup>η</sup> ΔΙΑΔΥΚΕΙΑΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ

“ Θεόδωρος Φυλακτός ”

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΔΥΤΙΚΗΣ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΜΑΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2. α)** Τι ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με τη  $g$ ;

(Μονάδες 2)

**β)** Πως ορίζεται το πεδίο ορισμού της;

(Μονάδες 2)

**Μονάδες 4**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**α)** « Για κάθε συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη για κάποιο εσωτερικό σημείο  $x_0 \in \Delta$ , αν ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , τότε το  $x_0$  είναι πάντοτε θέση τοπικού ακρότατου της  $f$  ».

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος . Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση )

**β)** «Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες εμφανίζουν ολικό μέγιστο σε περισσότερα από ένα σημεία του πεδίου ορισμού των ».

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση )

**Μονάδες 8**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**β)** Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

**Μονάδες 4**

**A5.** Το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$  ισούται με:

**α)**  $\frac{1}{x^2}$       **β)**  $-\frac{2}{x^2}$       **γ)**  $-\frac{1}{x^2}$       **δ)**  $-\frac{2}{x}$       **ε)** 0

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

**Μονάδες 2**

## ΘΕΜΑ Β

Έστω μία συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x+1)$ .

Αν είναι  $(g \circ f)(x) = \frac{2x+2}{x+2}$ ,  $x > -1$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $g(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $g^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν  $h(x) = g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$ ,  $x \in (0,2)$

1. Να βρείτε τη μονοτονία της  $h(x)$ .

**Μονάδες 3**

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $h(x)$ , στο σημείο όπου αυτή εμφανίζει τον ελάχιστο δυνατό συντελεστή διεύθυνσης.

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**B4.** Έστω κινητό  $M(x(t), y(t))$  το οποίο κινείται πάνω στην καμπύλη  $y = h(x)$  με  $0 < x(t) < 2$  και  $x'(t) > 0$ . Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $h(x)$  στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής τεταγμένης του  $M$  είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του  $M$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \alpha^{x-1} + 2$ ,  $x > 0$ , όπου  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$ , για την οποία ισχύει  $f(x) \leq 1$  για κάθε  $x > 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2. α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να λυθεί η εξίσωση  $e^{f'(2f(|x+3|) - 1)} = 1$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ότι ισχύει:

$$2\ln(x^2 + 2) - f(x^2 + 1) + 4 > f(x^2 + 3) + 2e^{x^2+1}$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$e^x (f'(x) + f(x)) = 1 + f(x) + xf'(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ενώ} \quad f(1) = 0$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (e^x - x) \cdot f(x) - x$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{x-1}{e^x - x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία

$A(x_1, f(x_1))$  και  $B(x_2, f(x_2))$  με  $x_1 < 1 < x_2$  στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$  είναι παράλληλες στον οριζόντιο άξονα.

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f''(x)(x^2 + 1) + 2xf'(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

**Μονάδες 4**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $\beta - \alpha > 2$  στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 6**

## ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco), χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : ενενήντα (90') λεπτά μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΤΕΛΟΣ 5<sup>ΗΣ</sup> ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ