

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ  
[Κεφάλαιο 2 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$ ,  $x \in \mathbb{R}_1$ , όπου  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει  $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_1$ .

**Μονάδες 3**

**A2. α)** Διατυπώστε το Θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού και ερμηνεύστε το γεωμετρικά.

**Μονάδες 2**

**β)** Διατυπώστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ) και ερμηνεύστε το γεωμετρικά.

**Μονάδες 2**

**γ)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποιά σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$ ;

**Μονάδες 2**

**δ)** Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

• «Αν η συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) = f(\beta)$  τότε η συνάρτηση  $g(x) = (f \circ f)(x)$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ »

**1)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 1**

**2)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

**Μονάδες 2**

**ε)** Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

• «Αν μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , αντιστρέφεται και η  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $f(\Delta)$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$  τότε

ισχύει  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ,  $x \in f(\Delta)$ ».

**1)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 1**

**2)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

**Μονάδες 2**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη :

α) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$  και η  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη ως προς  $x$  τότε αν το  $y$  μειώνεται ως προς  $x$  με ρυθμό  $\alpha$  εννοούμε  $f'(x) = -\alpha$  με  $\alpha > 0$ .

β) Αν  $x = S(t)$  η συνάρτηση θέσης ενός κινητού και  $u(t_0) = S'(t_0)$  η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή  $t_0$ , τότε κοντά στο  $t_0$  ισχύει  $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$ , οπότε  $u(t_0) \geq 0$ , όταν το κινητό κινείται προς τα δεξιά.

γ) Έστω η συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

δ) Έστω η συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

ε) Αν  $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$  τότε ισχύει  $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-1}{\alpha^x - x}, \alpha > 1$  τέτοιο ώστε  $\alpha^x \geq x+1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**B1.** Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  και αποδείξτε ότι  $\alpha = e$ .

**Μονάδες 6**

Για  $\alpha = e$ , τότε:

**B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της  $C_f$  με  $x \leq 0$ , η οποία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

**Μονάδες 8**

**B3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία  $A(x_1, f(x_1))$  και  $B(x_2, f(x_2))$  της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με  $x_1 < x_2$ , στα οποία οι εφαπτόμενες της  $C_f$  είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία στο διάστημα  $[x_1, x_2]$ , όπου  $x_1, x_2$  οι τετμημένες των σημείων  $A$  και  $B$  του B3 ερωτήματος.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$  με  $f(0) = \frac{\alpha}{1+\beta}$ ,  $\alpha, \beta > 0$  για την οποία ισχύει  $f'(t) - \gamma f(t) = -\frac{\gamma}{\alpha} f^2(t)$ ,  $\gamma > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(t) = \frac{\alpha}{1+\beta e^{-\gamma t}}$ ,  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**Μονάδες 9**

**Γ3.** Αν η συνάρτηση  $f$  περιγράφει τον τρόπο διάδοσης μιας είδησης σ' έναν πληθυσμό  $\alpha$  και  $f(t)$  είναι το πλήθος των ατόμων στα οποία έχει φτάσει η είδηση τη χρονική στιγμή  $t$  τότε:

α) Θα φτάσει ποτέ η είδηση σε όλα τα άτομα του πληθυσμού; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**Μονάδες 5**

β) Αν  $\beta > 1$  ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει ο ρυθμός διάδοσης της είδησης να μειώνεται;

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  με  $f'(1) = 1$ , (1)

$f(xy) = f(x)\frac{1}{y} + f(y)\frac{1}{x}$  για κάθε  $x > 0$  και  $y > 0$ , (2)

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2}$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**Δ3.** Αν  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  τότε:

**α)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

**Μονάδες 5**

**β)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ , το σύνολο τιμών της  $f$  και να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 = e^x$ ,  $x > 0$  έχει ακριβώς 2 θετικές ρίζες.

**Μονάδες 5**

**γ)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha^\beta > \beta^\alpha$  για κάθε  $\alpha, \beta$  με  $e \leq \alpha < \beta$  και στη συνέχεια ότι ισχύει  $(\ln x)^{x-1} > (x-1)^{\ln x}$  για κάθε  $x \geq e$ .

**Μονάδες 3**

**δ)** Να αποδείξετε ότι  $2f(4x) + f(x) > 3f(3x)$  για κάθε  $x \geq e\sqrt{e}$ .

**Μονάδες 3**

**ε)** Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(x) = \alpha^x$  και της ευθείας  $y = x$ , για τις διάφορες τιμές του  $\alpha > 0$ .

**Μονάδες 4**

### ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Β επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας** Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Το θέμα Γ επιμελήθηκε ο **Κωνσταντόπουλος Λεωνίδας** Μαθηματικός-MSc του 10ου & 19ου Γυμνασίου Πάτρας.

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας** Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.