

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαια 2, 3)  
[Κεφάλαια 1, 2 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

2. Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):

(1) Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

(2) Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

(3) Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε, δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f + g$  στο  $x_0$ .

(4) Αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε υπάρχει και το όριο της  $g$  στο  $x_0$ .

(5) Αν  $f(x) = x^x$ ,  $x > 0$ , τότε  $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει η σχέση:  $f(f(x)) = 2g(x) - x$ .

1. Να δείξετε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

2. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

**Μονάδες 5**

3. Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_0) = x_0$ .

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(f(x + x_0 - 2)) + x + x_0 = 2f(x + x_0 - 2) + 2$ .

Μονάδες 5

γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $f(f(\ln x + x_0 + 1)) + \ln x + 1 < x_0$ .

Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} & , \quad -1 \leq x < 0 \\ \alpha^2 \ln(x+e) + 2\alpha + (\beta^2 + \frac{1}{2})e^x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

Μονάδες 8

2. Αν  $\alpha = -1$  και  $\beta = 0$ ,

α) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) + 1}{x + 1}$ .

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον θετικό ημιάξονα  $Ox$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( xf(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$ .

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$ .

1. α) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{x}$

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2x) - 1}{x} = 4f'(0)$

Μονάδες 4

2. Αν επιπλέον για την  $f$  ισχύει,  $f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

3. Αν  $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$ , οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ .

Μονάδες 6

β) Έστω σημείο  $M$  της  $C_f$  με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του  $M$  απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων  $O$  με ταχύτητα  $2\text{cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $OAM$ .

Μονάδες 4

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Β επιμελήθηκε ο Αρετάκης Δημήτριος, Μαθηματικός- MSc του ΓΕΛ Καστρισιού Πατρών.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.