ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 2)

[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$, με $x_0\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

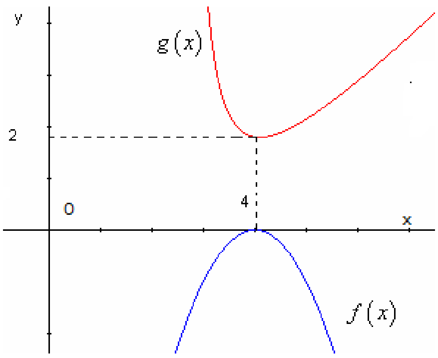
2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**:

α) Δίνεται το παρακάτω σχήμα τότε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 2



β) Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

γ) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Μονάδες 2

δ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$.

Μονάδες 2

ε) Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^{-1}(-2015)=4,\ f^{-1}(1949)=-1$. Τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x = x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2+\ln^2 x, & 0<x\le e \\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x \end{cases}$

α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β) Αν $\alpha=\dfrac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x)=6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2e)$.

Μονάδες 5

2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f\left(e^{f(x)}\right)=4\ln x+3$, για κάθε $x>0$ και $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln\left(\ln x^4+3\right)^2+1$ για κάθε $x>e^{-3/4}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x,\ x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

3. Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right) = 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$.

Μονάδες 5

5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.**