

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**2<sup>o</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαια 2)  
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

(Μονάδες 10)

**A2.**

1) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

(Μονάδες 3)

2) Πότε μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** ( $\Sigma$ ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** ( $\Lambda$ ), αν είναι λανθασμένη:

**α)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**β)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

**γ)** Μία συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο.

**δ)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $0 < f(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η

$$\text{συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x) + 1}.$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την  $f$ .

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $fog$  είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

(Μονάδες 5)

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(g(x^3 + 1)) = f(g(4x^2 + 2x))$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

(Μονάδες 10)

4. Να επιλυθεί η ανίσωση  $(f \circ g)(x^3 + 4) > (f \circ g)(3x^2)$ .

(Μονάδες 5)

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$ .

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 3)

2. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

(Μονάδες 4)

3. Μελετήστε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 5)

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και βρείτε την  $f^{-1}(x)$ .

(Μονάδες 4)

5. Άντοντας  $h(x) = \ln \frac{1}{x}$ , αποδείξτε ότι υπάρχει  $x_0 > 0$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = h(x_0)$ .

(Μονάδες 5)

6. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$ .

(Μονάδες 4)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει  $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1.

(Μονάδες 3)

2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 5)

3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα  $x'$ .

(Μονάδες 3)

4. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 4)

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = -1$ .

(Μονάδες 4)

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 6)

**Καλή επιτυχία**

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.