ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
13ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Νέο 2020)

[Κεφάλαια 1 & 2 μέχρι τη παράγραφο 2.7 του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=\alpha$ τότε $\alpha=1$.

α). Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α). Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ισχύει η σχέση $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

β). Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ell\in\mathbb{R}^*$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\ell$.

γ). Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=f(\beta)$ τότε η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$.

δ). Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό της ελάχιστο.

ε). Αν για τις συναρτήσεις f και g ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε ισχύει πάντα $f\circ g=g\circ f$.

Μονάδες 2x5=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x), x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Β1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Β2 i) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\ln\alpha^2$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Μονάδες 5

ii) Στην περίπτωση που η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 ακριβώς, να δείξετε ότι $x_1+x_2=0$.

Μονάδες 4

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1}$.

Μονάδες 5

Β4. Να δείξετε ότι $f(x)\geq\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία έχει τις ιδιότητες:

- Είναι πολυωνυμική βαθμού $\nu\in\mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}=1$.
- $f(x)=f(1-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2-x$ και να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(|x|)$.

Μονάδες 9

Γ2. Να υπολογίσετε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\eta\mu x\right)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{12}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(g(x))=-\dfrac{1}{4}$ με $g(x)=2x^3-3x^2-\dfrac{5}{2}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f: $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη σε αυτό , για την οποία ισχύει:

- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h}=1+\dfrac{f(x)}{x},x>0$.
- $f(1)=1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h}=f'(x)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=x\ln x+x$.

Μονάδες 4

Δ3. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$. Το σημείο Α απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ με ρυθμό $1cm/\sec$. Τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του Μ είναι e να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α) της απόστασης ΑΜ και **β)** της γωνίας ΜÔΑ

Μονάδες 3+3=6

Δ4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τριάδα αριθμών $\alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $(\gamma-\beta)\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)<(\beta-\alpha)\left(f(\gamma)-f(\beta)\right)$.

Μονάδες 4

Δ5. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x>0$ και το σημείο $A(2,0)$.

α). Να βρείτε σημείο M της C_g που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 4

β). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο M είναι κάθετη στην AM.

Μονάδες 2

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Τα θέματα επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας,** Μαθηματικός - MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**