ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
11Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

β) Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ΄ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ¨πάνω¨ από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\alpha)-G(\beta)$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)\neq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι ¨1-1¨ στο Δ.

ε) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β το $f(\beta)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-4\lambda x$.

1. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lambda=\frac{1}{4}$.

Μονάδες 6

2. Αν $\lambda=\frac{1}{4}$

   i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^x-x-2\right)=1$ έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

   ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Μονάδες 3

   iii) Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-3}+\frac{f(\alpha)-1}{x-1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,3)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=e^x-\int_0^1 e^{1-x}f(x)\,dx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=f(x)+x$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πρόσημο της g^{-1}.

Μονάδες 8

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης g^{-1}, του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=e$.

Μονάδες 5

4. Αν για μια συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\int_{h(1)}^{h(2)} f(x)dx=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ έτσι ώστε $h'(\xi)=0.$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(1)=1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x>0$.

1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$, $x>0$.

Μονάδες 3

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

Μονάδες 5

3. Να αποδείξτε ότι $f(x)<\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$, για κάθε $x>\sqrt{e}+1$.

Μονάδες 5

4. Αν G μία παράγουσα της g στο $(0,+\infty)$, όπου $g(x)=\frac{xf(x)+x-1}{x^2+1}$ με $x>0$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $G(x)-G\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x$, $x>0$.

Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e G(x)\,dx>\int_{1/e}^{1}\frac{G(x)}{x^2}\,dx$.

Μονάδες 3

iii) Να αποδείξετε ότι η $G'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ και να βρείτε τη μονοτονία της G.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**