ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
10$^{\text{Ο}}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 8

2. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 3

3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστή ή με Λάθος αν είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$, τότε το 0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

δ) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)\,g'(x)\,dx+\int_\alpha^\beta f'(x)\,g(x)\,dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\beta$ όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f, με $f(x)=e^{2x}+(x-1)^5$.

1. Να βρεθεί η μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε, ότι η γραφική παράσταση C_f, της f, τέμνει τον άξονα $x'x$, σ' ένα ακριβώς σημείο.

Μονάδες 5

3. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $g^3(x)+2g(x)=5f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. Η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Μονάδες 5

ii. Η γραφική παράσταση C_g, της g, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο ίδιο σημείο με την C_f.

Μονάδες 5

4. Να λυθεί η ανίσωση $g(f(x))>g(e^2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f^2(x)+3f(x)-x=0,\ x\in[-2,+\infty)$. Αν για κάθε $x\in[-2,+\infty)$ ισχύει $f(x)\geq -1$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[-2,+\infty)$.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,+\infty)$.

Μονάδες 5

3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4,f(4))$.

Μονάδες 5

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[-2,+\infty)$, ισχύει $5f(x)\leq x+1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\left(x^2-4x+6\right)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν $g(1)+2xg(x)-g(x+1)-\left(f(x)-6\right)^2\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+2h)-g(1-h)}{h}=0$.

Να αποδείξετε ότι :

1. $g'(1)=0$

Μονάδες 5

2. α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x\to-\infty$.

Μονάδες 3

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 3

3. Να βρείτε σημείο Α της C_h με $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $B(1,0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από την C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ

Μονάδες 7

4. Αν $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ και $\displaystyle\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x)dx=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\alpha): g'(x_0)=\varepsilon\varphi x_0\cdot g(x_0)$

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**