

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ - ΑΘΡΟΙΣΜΑ n – ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

α) Ταυτότητα

Τίτλος: Αριθμητική Πρόοδος

Γνωστική περιοχή: Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Θέμα: Άθροισμα n – πρώτων όρων αριθμητικής προόδου

β) Σκεπτικό

Βασική ιδέα: Μέσα από τη διερεύνηση και την επίλυση προβλήματος του ψηφιακού σχολικού βιβλίου με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra, οι μαθητές χωρισμένοι σε τυχαίες ομάδες ανακαλύπτουν τον τύπο του αθροίσματος n -πρώτων όρων Α.Π. καθώς χρησιμοποιούν και τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις στην Α.Π., δηλαδή του n -οστού όρου και των διαδοχικών όρων Α.Π.

Προστιθέμενη αξία:

- Στην problem-based μάθηση με χρήση προβλήματος καθημερινής ζωής (Realistic Mathematics Education).
- Στην αναληπτική - διερευνητική μάθηση με την οποία θα εμπλακούν οι μαθητές, αφού θα χρειαστεί να κάνουν εικασίες, επαληθεύσεις και διερευνήσεις.
- Στην αξιοποίηση της τεχνολογίας για τη διδασκαλία μαθηματικών αντικειμένων, χρήση μαθηματικού λογισμικού.
- Στην συμπεριληπτική μάθηση με οργάνωση τυχαίων ομάδων μαθητών (ομαδοσυνεργατική μάθηση) με διαφορετικές μαθησιακές ανάγκες.

γ) Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται: Μαθητές Α΄ Λυκείου

Χρόνος: Μία 45λεπτη διδακτική ώρα

Χώρος: Σχολική τάξη. Στο 2^ο ΓΕΛ Γιαννιτσών κάθε τάξη είναι εφοδιασμένη με laptop και προτζέκτορα, καθώς και με γεωμετρικά όργανα κατάλληλα για σχεδίαση στον ασπροπίνακα της τάξης.

Προαπαιτούμενα: Τα παιδιά έχουν διδαχθεί και έχουν εξασκηθεί ήδη στους τύπους του ν-όρου και των διαδοχικών όρων της Α.Π. Στο laptop της τάξης έχουν εγκατασταθεί τα απαραίτητα αρχεία geogebra του προβλήματος. Επίσης, έχει ελεγχθεί η εφαρμογή <https://www.randomlists.com/team-generator> για την άμεση οργάνωση των ομάδων. Υπάρχουν έτοιμα φύλλα εργασίας για κάθε ομάδα.

Υλικά: Η/Υ, προτζέκτορας, λογισμικό GeoGebra, υλικό σε η-τάξη, φύλλα εργασίας μεταφρασμένα και στα Αγγλικά – Αλβανικά για τους μαθητές-τριες που δεν γνωρίζουν Ελληνικά, αρχεία GeoGebra.

Κοινωνική ενορχήστρωση: 7 ομάδες των 3 μαθητών-τριών, τυχαία επιλεγμένες ηλεκτρονικά με την εφαρμογή <https://www.randomlists.com/team-generator>

Γνωστικοί στόχοι:

- Να μπορούν οι μαθητές να απαντήσουν με πρακτικό και αλγεβρικό τρόπο σε ερωτήσεις πάνω στην ενότητα της αριθμητικής προόδου που προκύπτουν από πρόβλημα καθημερινής ζωής (εφαρμογή Realistic Mathematics Education). Οι σύγχρονες διδακτικές μέθοδοι συνιστούν την έναρξη του μαθήματος μέσω προβλήματος.
- Τα παιδιά μέσω των αναπαραστάσεων να εμπεδώσουν καλύτερα την ύλη της ενότητας της Α.Π.
- Μέσα από ομαδικές διερευνήσεις πάνω σε ερωτήσεις του προβλήματος να ανακαλύψουν τον τύπο του αθροίσματος ν-πρώτων όρων μιας Α.Π.

Στόχοι ως προς τις γενικότερες ικανότητες/δεξιότητες των μαθητών/τριών:

- Να μπορούν να συνεργάζονται με τους συμμαθητές τους με όλα τα οφέλη που συνεπάγεται αυτό πχ. Σεβασμός στην άποψη των άλλων, ανάπτυξη φιλικών σχέσεων κτλ.
- Να διαπιστώσουν ότι τα μαθηματικά υπάρχουν παντού στην ζωή μας και να ασχολούνται με αγάπη με το αντικείμενο.

- Επαφή, χρήση και εκμάθηση των διαδικτυακών εφαρμογών του Πανελλήνιου Σχολικού Δικτύου.
- Επαφή, χρήση και εκμάθηση μαθηματικού λογισμικού.

ε) Ανάλυση (ροή δραστηριοτήτων)

Το μάθημα θα υλοποιηθεί σε 2 φάσεις, αφού προηγηθεί η επιλογή των ομάδων.

Επιλογή των ομάδων: Το τμήμα έχει 21 μαθητές. Θα χωριστούν τυχαία σε 7 ομάδες των 3 ατόμων. Κάθε μαθητής θα επιλέξει μία κάρτα με ένα αριθμό από το 1 έως το 21. Η κατασκευή των ομάδων θα γίνει με την εφαρμογή όπως φαίνεται στα παρακάτω στιγμιότυπα:

The screenshot shows a web interface titled "Edit Settings". It contains three main sections: "Dataset", "Items", and "Groups".

- Dataset:** A dropdown menu currently showing "Team Generator".
- Items:** A list box containing numbers from 10 to 22. The list is scrollable, with a scrollbar on the right side.
- Groups:** A text input field containing the number "7".

At the bottom left, there is a logo for "RERUN" which consists of a stylized "X" icon and the text "RERUN" below it.

Random Team Generator:



Group 1 1 18 2 12 3 16	Group 2 1 15 2 19 3 9	Group 3 1 14 2 10 3 2	Group 4 1 3 2 13 3 8
Group 5 1 5 2 6 3 20	Group 6 1 21 2 11 3 7	Group 7 1 17 2 1 3 4	



Τα παραπάνω αποτελούν παραδείγματα. Η διαδικασία θα κρατήσει το πολύ 2 λεπτά.

1^η Φάση: Υπενθύμιση βασικών γνώσεων για τον ν-οστό όρο αριθμητικής προόδου και τους διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου μέσω ενός προβλήματος (20 λεπτά)

Στις ομάδες θα δοθεί ένα φύλλο εργασίας και θα ανοιχθεί στον προτζέκτορα της τάξης η εφαρμογή geogebra και το μικροπείραμα «Διαδρομές στην πισίνα» του ψηφιακού σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας Ά Λυκείου <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5156>.

Στην 1^η φάση οι ομάδες των μαθητών θα ασχοληθούν **με τα δύο πρώτα βήματα του προβλήματος** όπως φαίνεται στα παρακάτω στιγμιότυπα.

Εφαρμογές Μαθηματικών - GeoGebra

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Ζωή σχεδιάζει να πηγαίνει στο κολυμβητήριο καθημερινά. Θέλει να βελτιώσει την κολυμβητική της ικανότητα. Έτσι αποφασίζει να κολυμπήσει τόσες φορές το μήκος της πισίνας την πρώτη ημέρα όσες δείχνει ο κόκκινος δρομέας και να αυξάνει τον αριθμό των διαδρομών που κολυμπάει σταθερά κάθε μέρα σύμφωνα με τον γαλάζιο δρομέα. Όταν πλησιάσει τις 50 διαδρομές σε μια μέρα (δεν τις ξεπεράσει) θα είναι ικανοποιημένη και θα σταματήσει να αυξάνει την άσκηση.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ - ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

ΒΗΜΑΤΑ ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Θεώρησε ότι η Ζωή ξεκινά από τις 10 διαδρομές και αυξάνει καθημερινά τις διαδρομές κατά 5

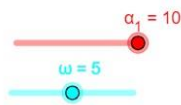
Μετά από πόσες ημέρες η Ζωή θα φτάσει τις 50 διαδρομές σε μια μέρα;

☒ **ΒΟΗΘΕΙΑ**

Τοποθέτησε το δρομέα α_1 στην τιμή 10 και το δρομέα ω στη τιμή 5

Τι εκφράζουν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων;

Τι αρκεί να μετρήσω για να υπολογίσω το σύνολο των διαδρομών;

**ΒΟΗΘΕΙΑ**

Από τη διαφορά των ευθυγράμμων τμημάτων μπορείς να εξάγεις τη μαθηματική σχέση που συνδέει τα μήκη των διαδοχικών τμημάτων και να προσδιορίσεις το είδος της ακολουθίας που αυτά εκφράζουν

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Ζωή σχεδιάζει να πηγαίνει στο κολυμβητήριο καθημερινά. Θέλει να βελτιώσει την κολυμβητική της ικανότητα. Έτσι αποφασίζει να κολυμπήσει τόσες φορές το μήκος της πισίνας την πρώτη ημέρα όσες δείχνει ο κόκκινος δρομέας και να αυξάνει τον αριθμό των διαδρομών που κολυμπάει σταθερά κάθε μέρα σύμφωνα με τον γαλάζιο δρομέα. Όταν πλησιάσει τις 50 διαδρομές σε μια μέρα (δεν τις ξεπεράσει) θα είναι ικανοποιημένη και θα σταματήσει να αυξάνει την άσκηση.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ - ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ**ΒΗΜΑΤΑ**

1α



2α



3α



4α

Πειραματίσου αλλάζοντας τους δρομείς α_1 και ω

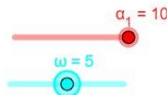
Υπολόγισε κάθε φορά τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων αφού πρώτα καταγράψεις τη μαθηματική σχέση που αποδίδει τις κολυμβητικές διαδρομές της επόμενης μέρας σε σχέση με την προηγούμενη

Μπορείς να υπολογίσεις το μήκος του δού ευθύγραμμου τμήματος (μετρώντας από κάτω προς τα πάνω) χωρίς να υπολογίσεις τα ενδιάμεσα από το 1ο;

Με τον καθοδηγητικό ρόλο του εκπαιδευτικού, οι ομάδες θα διερευνήσουν τα δύο πρώτα βήματα του προβλήματος. Στόχος είναι μέσω είτε πρακτικής αριθμητικής είτε με τον τύπο του n - στού όρου αριθμητικής προόδου να ανακαλύψουν τις απαντήσεις στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας αυτής της φάσης και να τις καταγράψουν. Θα πρέπει να ανακαλύψουν ότι πρόκειται για αριθμητική πρόοδο και να δώσουν τουλάχιστον δύο τρόπους (πρακτικό - μαθηματικό) για τον υπολογισμό των ημερών. Επίσης, παίζοντας με τους δρομείς να ανακαλύψουν ότι ο αριθμός των ημερών είναι ανεξάρτητος των αρχικών διαδρομών και εξαρτάται μόνο από την διαφορά ω . Πολύ χρήσιμη για την εξαγωγή συμπερασμάτων θα είναι η αναπαράσταση των διαδρομών με μήκη.

2^η Φάση: Ανακάλυψη του τύπου του αθροίσματος n -πρώτων όρων της Α.Π. (20 λεπτά)

Στην 2^η φάση οι ομάδες των μαθητών θα ασχοληθούν με τα επόμενα δύο βήματα του προβλήματος όπως φαίνεται στα παρακάτω στιγμιότυπα.



☒ ΒΟΗΘΕΙΑ

Για τις τιμές των δρομέων που επέλεξε υπολόγισε την τελική διαδρομή της Ζωής που θα είναι η αρχική του Ανδρέα
Υπολόγισε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούν στη Ζωή καθώς και αυτά που σχεδίασες για τον Ανδρέα και κατέγραψε τα σε πίνακα 2 γραμμών (κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα πρόσωπο Ζωή - Ανδρέας)
Παρατήρησε το άθροισμα της κάθε στήλης του πίνακα. Τι εκφράζει;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

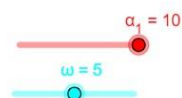
Η Ζωή σχεδιάζει να πηγαίνει στο κολυμβητήριο καθημερινά. Θέλει να βελτιώσει την κολυμβητική της ικανότητα. Έτσι αποφασίζει να κολυμπήσει τόσες φορές το μήκος της πισίνας την πρώτη ημέρα όσες δείχνει ο κόκκινος δρομέας και να αυξάνει τον αριθμό των διαδρομών που κολυμπάει σταθερά κάθε μέρα σύμφωνα με τον γαλάζιο δρομέα. Όταν πλησιάσει τις 50 διαδρομές σε μια μέρα (δεν τις ξεπεράσει) θα είναι ικανοποιημένη και θα σταματήσει να αυξάνει την άσκηση.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ - ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

ΒΗΜΑΤΑ ☐ 1α ☐ 2α ☒ 3α ☐ 4α

Η Ζωή ζήτησε από τον φίλο της Ανδρέα να έρθει μαζί της στο κολυμβητήριο. Ο Ανδρέας έβαλε προϋπόθεση ένα παιχνίδι: να ξεκινήσει η Ζωή από την αρχή το πρόγραμμά της (επέλεξε τιμές από τους δρομείς α_1 και ω), ενώ αυτός θα ξεκινήσει κολυμπώντας το πλήθος των τελικών διαδρομών της Ζωής και κάθε μέρα θα ελαττώνει το κολύμπι του σταθερά, αντίθετα με τη Ζωή.

1. Μπορείς να προσδιορίσεις το είδος της ακολουθίας που αποτελούν οι καθημερινές διαδρομές του Ανδρέα;
2. Μπορείς να απεικονίσεις τα ευθύγραμμα τμήματα που εκφράζουν το αντίστοιχο ημερήσιο πρόγραμμα του Ανδρέα;
3. Ποιο είναι το ημερήσιο άθροισμα των διαδρομών και των δύο μαζί; Μεταβάλλεται από μέρα σε μέρα;



☒ ΒΟΗΘΕΙΑ

Συσχέτισε τις τιμές των στηλών του πίνακα που υπολόγισες στο Βήμα 3 με τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που εκφράζουν το ημερήσιο άθροισμα διαδρομών των δύο φίλων κολυμβητών (γαλάζιο-Ζωή και μωβ-Ανδρέας)
Αξιοποίησε αυτή την πληροφορία και απάντησε γρήγορα στο ερώτημα της Ζωής
Τώρα μπορείς να κάνεις ένα βήμα ακόμα και να διατυπώσεις τον μαθηματικό τύπο που δίνει το άθροισμα των κολυμβητικών διαδρομών της Ζωής ή του Ανδρέα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Ζωή σχεδιάζει να πηγαίνει στο κολυμβητήριο καθημερινά. Θέλει να βελτιώσει την κολυμβητική της ικανότητα. Έτσι αποφασίζει να κολυμπήσει τόσες φορές το μήκος της πισίνας την πρώτη ημέρα όσες δείχνει ο κόκκινος δρομέας και να αυξάνει τον αριθμό των διαδρομών που κολυμπάει σταθερά κάθε μέρα σύμφωνα με τον γαλάζιο δρομέα. Όταν πλησιάσει τις 50 διαδρομές σε μια μέρα (δεν τις ξεπεράσει) θα είναι ικανοποιημένη και θα σταματήσει να αυξάνει την άσκηση.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ - ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

ΒΗΜΑΤΑ ☐ 1α ☐ 2α ☐ 3α ☒ 4α

Η Ζωή θέλει να υπολογίσει το συνολικό πλήθος των διαδρομών που κολύμπησε για τις τιμές α_1 και ω που εσύ επέλεξε από τους αντίστοιχους δρομείς. Μπορείς να σκεφτείς έναν εύκολο τρόπο για να τη βοηθήσεις;

Οι μαθητές θα πρέπει διερευνώντας τις συνθήκες του προβλήματος να ανακαλύψουν ότι τα αθροίσματα $\alpha_1 + \alpha_n, \alpha_2 + \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_n + \alpha_1$ είναι σταθερά, οπότε θα μπορούν μετά να ανακαλύψουν τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος των n - πρώτων όρων $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$. Ο εκπαιδευτικός συζητά με τους μαθητές τις απεικονίσεις των μηκών και τις γενικότερες παρατηρήσεις τους.

Πρόβλεψη του σχεδίου μαθήματος σε περίπτωση μη επαρκούς χρόνου:

Σε περίπτωση που η χρονική διάρκεια του μαθήματος εξαντληθεί προτού οι μαθητές ασχοληθούν με όλα τα βήματα, το υλικό έχει αναρτηθεί στο eclass του ΠΣΔ. Οι ομάδες των μαθητών θα μπορούν εκεί ασύγχρονα και συνεργατικά να πειραματιστούν και να απαντήσουν στα υπόλοιπα ερωτήματα. Οι απαντήσεις τους να συζητηθούν στο επόμενο μάθημα.

Φύλλο εργασίας:

ΒΗΜΑ 1°

1. Τοποθέτησε τον δρομέα α_1 στην τιμή 10 και τον δρομέα ω στη τιμή 5.
Τι εκφράζουν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων; (Θα απαντηθεί συζητώντας με όλες τις ομάδες).

.....

2. Τι αρκεί να μετρήσω για να υπολογίσω το σύνολο των διαδρομών; Μπορείτε να σκεφτείτε άλλους τρόπους για τον υπολογισμό αυτό; (Θα απαντήσουν οι ομάδες στο φύλλο, θα συζητηθεί αμέσως μετά).

.....

.....

.....

ΒΗΜΑ 2°

1. Μπορείτε να βρείτε το είδος της ακολουθίας που εκφράζει τα δεδομένα του προβλήματος; (Θα απαντηθεί συζητώντας με όλες τις ομάδες).

.....

.....

2. Κρατήστε τη θέση του δρομέα α_1 σταθερή και αλλάξτε τη θέση του ω . Τι παρατηρείτε; Πότε αυξάνεται ο αριθμός των ημερών που χρειάζεται η Ζωή και πότε μειώνεται; (Θα απαντήσουν οι ομάδες στο φύλλο).

.....

.....

.....

ΒΗΜΑ 3°

1. Αν για τη Ζωή ισχύει $\alpha_1=10$ και $\omega=5$, τι είδους ακολουθία προκύπτει για τον Ανδρέα; (Απάντηση με συζήτηση μεταξύ των ομάδων και του εκπαιδευτικού).

.....

.....

2. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα (οι ομάδες μόνες τους):

Διαφορά προόδου:	$\omega=5$	$\omega=-5$	
Όροι	Ζωή	Ανδρέας	Άθροισμα
α_1	10	50	
α_2			
α_3			
α_4			
α_5			
α_6			
α_7			
α_8			
α_9			
		Σύνολο:	

ΒΗΜΑ 4^ο

1. Τι παρατηρείτε στα παραπάνω αθροίσματα; (Θα απαντηθεί συζητώντας με όλες τις ομάδες).

.....

2. Προσπαθήστε να βρείτε το συνολικό αριθμό των διαδρομών που έκανε και τις 9 ημέρες η Ζωή. (Θα απαντήσουν οι ομάδες στο φύλλο).

.....

3. Μήπως ο τρόπος που υπολογίσατε την προηγούμενη ερώτηση ισχύει γενικά; (Θα απαντηθεί συζητώντας με όλες τις ομάδες).

.....

Στ) Τρόποι αξιολόγησης του σχεδίου μαθήματος μετά την εφαρμογή

Ανατροφοδότηση μέσω της συζήτησης και των απαντήσεων των μαθητών. Με την αξιολόγηση επίσης της χρονικής διάρκειας του μαθήματος. Ήταν επαρκής; Με την αξιολόγηση του υλικού (τεχνικού και φύλλου) του μαθήματος. Λειτουργήσε πλήρως; Βοήθησε τα παιδιά να φτάσουν στον στόχο του μαθήματος;