

## 16η Άσκηση

Μαθηματικά  
Προσανατολισμού Β' Λυκείου

Προτείνει ο Θεόδωρος Παγώνης (8/1/2017)

Δίνονται τα σημεία  $A(x+2y, 1-2y)$  και  $B(2x+y, x-1)$  με  $x \neq y$  και  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$  έτσι ώστε το διάνυσμα  $\overline{AB}$  να έχει μέτρο  $\sqrt{2}$  και να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $135^\circ$

Πηγή: Εισήγηση του Θεόδωρου Παγώνη «Επαλήθευση, πολυτέλεια ή αναγκαιότητα;» για το συνέδριο ΟΕΦΕ 2016

αποστολή λύσεων έως την Κυριακή 15/1/2017

Σύμφωνα με τις συντεταγμένες των σημείων  $A, B$  που δόθηκαν είναι:

$$\overline{AB} = (x - y, x - 2 + 2y)$$

και για να σχηματίζει γωνία  $135^\circ$  ( $2^\circ$  τεταρτημόριο) με τον άξονα των  $x'x$  πρέπει:

$$\begin{cases} x - y < 0 \Leftrightarrow x < y \\ x - 2 + 2y > 0 \Leftrightarrow x > 2 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 2 + 2y}{x - y} = -1 \Leftrightarrow x - 2 + 2y = -x + y \Leftrightarrow y = 2 - 2x \text{ σχέση (1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2y < x < y, \text{ που προκύπτει } y > \frac{2}{3} \text{ και άρα} \\ \text{από την } y = 2 - 2x \Rightarrow 2 - 2x > \frac{2}{3} \Rightarrow x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Πρέπει επίσης:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (3x - 2)^2 + (2 - 3x)^2 = 2 \Rightarrow 2 \cdot (3x - 2)^2 = 2 \Rightarrow (3x - 2)^2 = 1 \text{ οπότε}$$

$$3x - 2 = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{3}.$$

Από τους περιορισμούς που έχουμε  $\left(x < \frac{1}{3}\right)$  η πρώτη λύση απορρίπτεται, άρα:

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3} \text{ και } y = \frac{4}{3}}}$$