Διανύσματα

Η έννοια του διανύσματος

1) Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Με αρχή το σημείο Μ γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{\Gamma A}$. Να δείξετε ότι το σημείο Α είναι μέσον του τμήματος ΔΕ.

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

2) Για τέσσερα τυχαία σημεία Α, Β, Γ, Δ να αποδειχτεί ότι:
   Α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma}$
   Β) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

3) Αν για τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε ισχύει $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{E\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε συμπίπτουν.

4) Αν για δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

5) Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ και έστω Ο, το μέσο του τμήματος ΑΓ.
   Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

6) Εξωτερικά ενός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΑΛΚΓ, ΒΓΝΜ. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{E\Lambda} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{M\Delta} = \vec{0}$.

7) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma}$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

8) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ, να αποδείξετε ότι:

   α) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right)$

   β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

9) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)$

10) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε να ισχύει $(\mathrm{BM})=2(\mathrm{M\Gamma})$.

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)$

11) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{\Delta\mathrm{M}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BN}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.

12) Αν ισχύει $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}-5\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}=\vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

13) Αν $(\kappa+2)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\kappa+5)\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, και Γ είναι συνευθειακά.

14) Εάν $2\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}+3\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{BK}}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{M\Lambda}}$ είναι αντίρροπα.

15) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PB}}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{0}$.

16) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντιστοίχως.
Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=2\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$.

17) Δίνονται τέσσερα σημεία Ο, Α, Β, Γ τέτοια ώστε τα Ο, Α, Β να σχηματίζουν τρίγωνο.
Αν $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=(1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

18) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο Ο.
Αν $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$, τότε:

Α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

Β) να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά

19) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε του επιπέδου τέτοια, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

Α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

Β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι παράλληλα.

20) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

Α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{EZ}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{ZB}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$.

Β) Να αποδείξτε ότι τα σημεία Β, Ζ και Ε είναι συνευθειακά.

21) Στο επίπεδο, θεωρούμε τα σημεία Ρ, Λ, Κ, Μ για τα οποία ισχύει : $5\overrightarrow{\text{ΡΛ}} = 2\overrightarrow{\text{ΡΚ}} + 3\overrightarrow{\text{ΡΜ}}$.

Α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

Β) Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει:

$2\overrightarrow{\text{ΑΛ}} + 3\overrightarrow{\text{ΒΛ}} + 2\overrightarrow{\text{ΜΒ}} = \overrightarrow{\text{ΑΚ}} + \overrightarrow{\text{ΑΜ}} + \overrightarrow{\text{ΒΚ}}$, όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου.

22) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{ΑΒ}}, \ \overrightarrow{\text{ΑΖ}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\text{ΑΓ}} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\text{ΓΕ}} = \overrightarrow{\text{ΒΓ}}.$$

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΔΕ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΔΖ}}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$.

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

23) Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε να ισχύει: $\text{ΑΕ} = \text{ΖΓ} = \frac{1}{4}\text{ΑΓ}$

α) Αν $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΓ}} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΔΕ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΔΖ}}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο

24) Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ στην ΑΔ και τη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{\text{ΑΕ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ΑΔ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΖ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{\text{ΑΖ}} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$

β) $\overrightarrow{\text{ΕΖ}} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να υπολογίσετε το $\overrightarrow{\text{ΕΒ}}$.

γ) τα σημεία Ε, Ζ και Β είναι συνευθειακά.

Συντεταγμένες στο επίπεδο

25) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-1,3)$ και $\vec{v}=(2,-1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}=(x,y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$

γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$

δ) $\vec{w} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in R$

26) Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$, $B(7,-4)$. Να βρεθεί σημείο M του άξονα x′x, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το M

β) ορθογώνιο στο M

27) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-6,1)$, $B(-2,3)$ και $\Gamma(-10,-1)$ είναι συνευθειακά.

28) Δίνονται τα σημεία $A(5,-1)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(2,3)$. Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις πλευρές του.

29) Αν $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-2,3)$ να υπολογιστούν τα:

α) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$

β) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{\alpha}|$

30) Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

31) Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1,3)$, $B(\alpha,4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha+4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

γ) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$.

32) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4, 3) και Δ(2, 3).

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ.

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

33) Θεωρούμε τα σημεία $Α(1+2α,\ 4α-2)$ και $Β(5α+1,-α)$, $α \in \mathbb{Z}$.

α) Να γράψετε το $\overrightarrow{ΑΒ}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overrightarrow{ΑΒ}|=10$.

β) Έστω $α=2$. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

34) Δίνονται τα σημεία $Α(2,3)$, $Β(-1,5)$ και $Γ(-2,-4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του Β ως προς το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

35) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{β}=2\vec{i}-5\vec{j}$ και $\vec{γ}=(7,3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{α}, \vec{β}, \vec{γ}$ είναι μη συγγραμικά ανά δύο.

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{γ}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

Εσωτερικό γινόμενο

36) Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}|=1$, $\vec{\beta}=\sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$

γ) $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{3}$, $\vec{\beta}=\sqrt{12}$ και $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})=135^{o}$

37) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$.

Αν $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$, να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$

γ) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$

ε) $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta})$

38) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(-1,4)$ και $\vec{\beta}=(1,-2)$.

39) Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})=\frac{\pi}{4}$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\alpha})$.

40) Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$.

41) Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}$

42) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,3)$ και $\vec{\beta}=(4,-3)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{w}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{w}\perp(3\vec{\beta}-5\vec{\alpha})$.

43) Αν για κάθε κ, $\lambda \in R$ ισχύει $\left(\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}\right) \perp \left(\kappa\vec{\alpha}-2\lambda\vec{\beta}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $\left|\vec{\beta}\right|$ στην περίπτωση που είναι $\left|\vec{\alpha}\right| = 2$.

44) Θεωρούμε τα σημεία Α,Β,Γ ώστε $\overrightarrow{AB} = (-1,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου.

45) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ και $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{\beta}\right| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του κ.

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

46) Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{AB} = (-4,-6)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (2,-8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$,όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.

47) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $2\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = 2\sqrt{2}$ και $\left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}\right) = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2$

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

48) Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \left(\kappa^2-6\kappa+9, \kappa-3\right)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1,6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

γ) Για $\kappa = 1$, να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

49) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\left|\vec{\beta}\right| = 2\left|\vec{\alpha}\right| = 4$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}+2\vec{\alpha} = \vec{0}$.

50) Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{u}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

51) Έστω $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν: $3|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=9,\ 2|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

52) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης: $\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\beta}\right)$.

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}$.

53) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(\sqrt{3},3)$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$

β) το διάνυσμα $\vec{u}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\cdot\vec{\alpha}$

54) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-\frac{1}{2})$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}=\left(x^2,x-1\right)$ είναι κάθετα.

55) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{v}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{u}\perp\vec{v}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}-3\vec{v}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u}-3\vec{v}|=14$.

56) Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\beta}=\left(\frac{1}{7},1\right)$ και

$\vec{\alpha}+7\vec{\beta}=\left(\mu+2,7-2\mu\right),\ \mu\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ.

β) Αν μ=2, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\left(3,-4\right)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$.

ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

57) Έστω $\vec{\alpha}=\left(2,-3\right)$ και $\vec{\beta}=\left(-5,1\right)$ δύο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

58) α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει:

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\beta}\right|^2$.

β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha},\ \overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$.

Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

59) Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{OB}=(1,2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

β) Αν Γ (α, β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:

β1. να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\alpha-4,\beta+2)$

β2. να αποδείξετε ότι: $4\alpha+3\beta=10$

β3. αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

60) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$ και

$\vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

β) Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

β1. να αποδείξετε ότι: $\kappa=-2$

β2. να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

β3. να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

61) Α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες:

Α1. $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$

Α2. $|\vec{u}+\vec{v}|=\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|$

Β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{7}$

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$

Β2. Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$

62) Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{x}\parallel\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$ και $\left(\vec{\alpha}+\vec{x}\right)\perp\vec{\beta}$.

63) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1)$ και $\vec{\beta}=(5,10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

64) Αν $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ με $1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=\frac{\vec{\alpha}.\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$

65) Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

66) Αν το $\vec{x}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του επιπέδου, να δείξετε ότι το διάνυσμα

$\vec{\alpha}=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}-\vec{x}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

67) Αν $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$

β) $\vec{\alpha}\parallel\vec{p}$

γ) $\vec{q}\perp\vec{\beta}$

68) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$.

Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, και $|\vec{\gamma}|=5$ να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$