

## ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  ισχύουν:  $3 \leq x \leq 5$  και  $-2 \leq y \leq -1$ ,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α)  $y - x$

(Μονάδες 12)

β)  $x^2 + y^2$

(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ , με  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $a + \frac{4}{a} \geq 4$

(Μονάδες 12)

β)  $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε

α) να αποδείξετε ότι:  $\alpha^3 < \alpha$

(Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10 \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς  $x, y$  ώστε:  $x^2+y^2-2x+6y+10=0$  (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση:  $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $A$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι:  $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\sqrt[3]{30}$  και  $6 - \sqrt[3]{30}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση:  $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι:  $A = 4$ .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $|x+A|=1$ .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση  $|2x - 1| = 3$  (Μονάδες 12)

β) Αν  $\alpha, \beta$  με  $\alpha < \beta$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση  $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$  (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση  $|2x - 1| = 3$  (Μονάδες 12)

β) Αν  $\alpha, \beta$  με  $\alpha < \beta$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση  $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$  (Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του  $x$  που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση  $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$ , με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση:  $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ , με παράμετρο  $\lambda \neq 0$ .

α) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό  $-2$ .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε  $\lambda \neq 0$ .

(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη  $x$  και  $y$ , για τα οποία ισχύουν:  $|x-3| \leq 2$  και  $|y-6| \leq 4$ .

α) Να δείξετε ότι:  $1 \leq x \leq 5$  και  $2 \leq y \leq 10$ . (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις  $2x$  και  $y$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός  $x$ , για τον οποίο ισχύει:  $d(x,-2)<1$ .

Να δείξετε ότι:

α)  $-3<x<-1$ .

(Μονάδες 10)

β)  $x^2+4x+3<0$ .

(Μονάδες 15)

## ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει:  $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι  $x \leq \frac{3}{2}$ . (Μονάδες 12)

β) Αν  $x \leq \frac{3}{2}$ , να αποδείξετε ότι η παράσταση:  $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ .

(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί  $y$ , για τους οποίους ισχύει:  $|y-2| < 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $y \in (1, 3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$

(Μονάδες 13)



## ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει  $|2x - 1| < 1$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $0 < x < 1$  (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1, x, x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)