ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = -4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \,, \qquad \text{με } \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \,,$$

το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α) Να δείξετε ότι $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και $\delta = 0$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = 3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$$

διέρχεται από το σημείο Μ(-2,0),

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$ (Μονάδες 12)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f, βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ με *α*, *β* $\in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι ίσο με - 4, να βρείτε τα *α*, *β* $\in \mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

β) Αν *α* = -2 και *β* = 6, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $\left(x^3-6x^2+11x-2\right):\left(x-3\right)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P\left(x\right)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P\left(x\right):\left(x-3\right)$ να έχει υπόλοιπο 0.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$ και

$Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι $3^{ου}$ βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$ (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\kappa - 6)x^2 - 7x + \kappa$.

α) Να βρείτε για ποιά τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\kappa = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

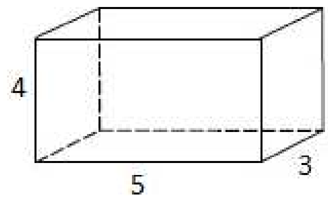
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$.

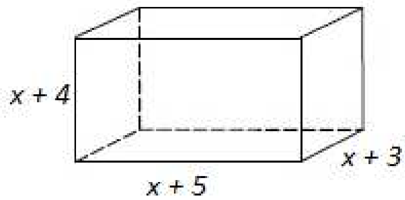
α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με 10 και $P(2) = 10$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 10$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2



Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3, δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.



Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος *x*.

α) Να αποδείξετε ότι το *x* θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.
(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις *α*, *β*, *γ* δίνεται απο τον τύπο: V = *α*·*β*·*γ*) (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο *x* λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

α) Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

(Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2

Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2-1)x^4 - 2(\lambda-1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$ είναι 3^{ου} βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x – 2)$ δίνει πηλίκο $(x^2 - 3x + 2)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό $υ$.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το $υ$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $υ = 10$, να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30cm^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $1cm$ μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$y = \frac{60}{x} \quad \text{και} \quad (x+1)^2 = x^2 + y^2.$$

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$2x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

(Μονάδες 4)

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x+1$ αφήνει υπόλοιπο $16+P(1)$ και διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο $16-P(-1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(1)=0$ και $P(-1)=16$

(Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι α = 4 και β = -3

(Μονάδες 9)

γ) να αποδείξετε ότι $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $\mathrm{P}(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε $\mathrm{P}(1)=0$ και P(2) = 8.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}(x)=x^3+x^2-2x$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(x)=8$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)>2$. (Μονάδες 9)

Στόχοι:
Πολυωνυμική εξίσωση

Πράξεις πολυωνύμων

Ανισώσεις

Γνωστικές απαιτήσεις:

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=(\kappa^2-1)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $x-1$ είναι ίσο με - 4. (Μονάδες 7)

β) Για κ = 1 και λ = -2

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)$ με το $x-1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(x)+4=x^2-1$. (Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \Re$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \Re$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$.

(Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + βx^2 – 7x + α + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των $α$ και $β$ (Μονάδες 8)

β) Για $α = 1$ και $β = 0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$ (Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x - \alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x - \alpha)$ διαιρεί το $P(x)$. (Μονάδες 6)

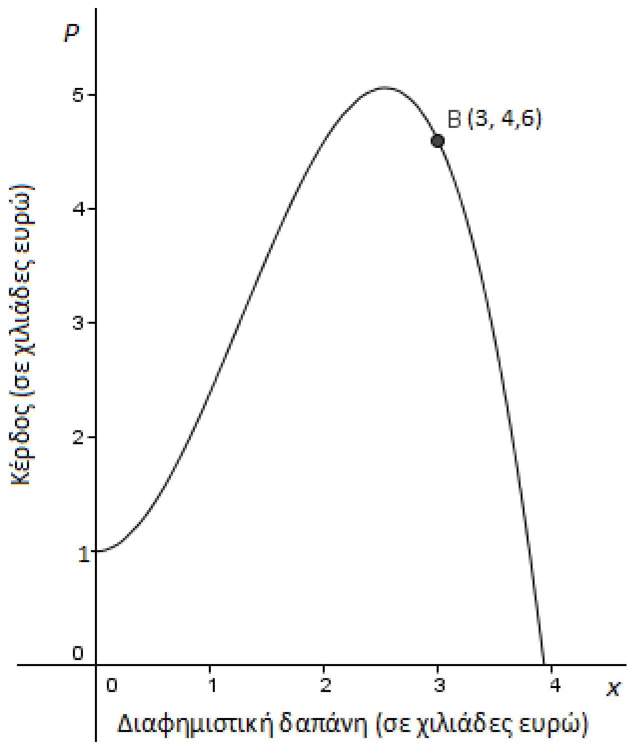
γ) Αν $\alpha = -1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x + 1)P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προιόντος ήταν: $P(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}9x^2 + 1$, $0 \leq x < 4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προιόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.



α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος. (Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i. (Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

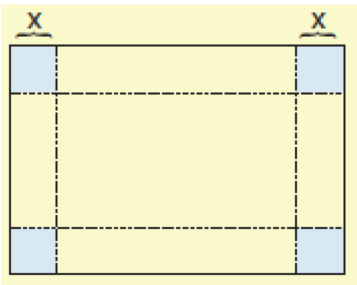
Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5*dm* και 8*dm*, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς *x*, από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του (Σχήμα 1).

α) Να δείξετε ότι ο όγκος *V* του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του *x* με τον τύπο
$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. (Μονάδες 6)

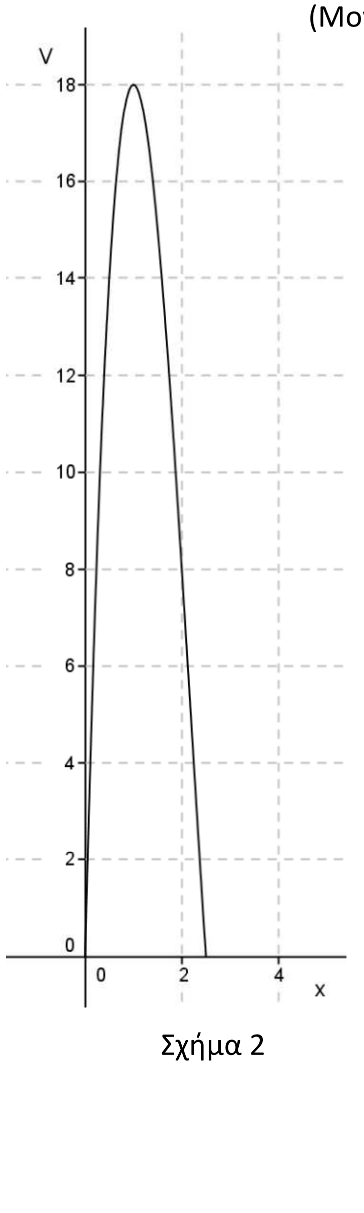
β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το *x* στο πλαίσιο του προβλήματος.
(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε *dm* με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι $8dm^3$. (Μονάδες 7)

δ) Στο σχ.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ για $x \in (0,\ 2{,}5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο. (Μονάδες 7)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α (0, 1) και Β (1, -2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας. (Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$ (Μονάδες 9)