# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

## 1. ΑΡΙΘΜΟΙ

Σύνολο Φυσικών αριθμών: $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

Σύνολο Ακέραιων αριθμών: $\mathrm{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

Σύνολο Ρητών αριθμών: $\mathrm{Q} = \left\{\frac{\alpha}{\beta} \,/\, \alpha,\beta \text{ ακέραιοι με } \beta \neq 0\right\}$

Άρρητοι αριθμοί: είναι οι μη ρητοί π.χ. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, -\sqrt{2}, \dots$

Το σύνολο Πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Τα σύνολα $\mathrm{N}-\{0\}$, $\mathrm{Z}-\{0\}$, $\mathrm{Q}-\{0\}$ και $\mathrm{R}-\{0\}$ τα συμβολίζουμε με $\mathrm{N}^*$, $\mathrm{Z}^*$, $\mathrm{Q}^*$ και $\mathbb{R}^*$ αντίστοιχα.

## 2. ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ R)

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει ο $-\alpha \in \mathbb{R}$ που ονομάζεται αντίθετος του $\alpha$ και ισχύει $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ τότε υπάρχει ένας νέος αριθμός $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^*$ που ονομάζεται αντίστροφος του $\alpha$ και ισχύει $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$

## 3. ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ (ΕΚΠ) ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Όταν έχουμε δύο ή περισσότερες παραστάσεις, ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) αυτών την ελάχιστη παράσταση που διαιρείται από καθεμία των προηγουμένων. Το ΕΚΠ σχηματίζεται από τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες γραμμένους μια φορά ο καθένας με το μεγαλύτερο εκθέτη.

## 4. ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ορίζουμε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

**Ιδιότητες**:

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$, αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma \geq \delta$ τότε $\alpha + \gamma \geq \beta + \delta$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma \geq \delta$ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί τότε $\alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \delta$
- Αν $\alpha \geq \beta > 0$ τότε $\alpha^{\nu} \geq \beta^{\nu}, \nu \in N$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\alpha, \beta$ ομόσημοι $(\alpha\beta > 0)$ τότε $\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$ τότε $\alpha \geq \gamma$
- Αν $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$ (ομόσημοι), $\beta \neq 0$
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq 0$ (ετερόσημοι), $\beta \neq 0$

## 5. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Η Απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού $\alpha$ συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται ως εξής:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Γεωμετρικά η απόλυτη τιμή $|\alpha|$ παριστάνει την απόσταση του αριθμού $\alpha$ από το μηδέν, πάνω στον άξονα xx'.

Επίσης, η απόλυτη τιμή του $\alpha-\beta\ (|\alpha-\beta|)$ παριστάνει την απόσταση των αριθμών $\alpha$ και $\beta$ πάνω στον άξονα xx'.

<u>Ιδιότητες Απολύτων</u>:

1. $|\alpha| \geq 0, |\alpha| \geq \alpha, |\alpha| \geq -\alpha$

2. $|\alpha|^2 = \alpha^2$

3. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

4. $|-\alpha| = |\alpha|$

5. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

6. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}, \beta \in R^*$

7. $|\alpha-\beta| = |\beta-\alpha|$

8. $||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ (τριγωνική ανισότητα)

9. $|x-x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0-\delta < x < x_0+\delta, \delta > 0$

10. α) Αν $\theta > 0$ τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

    β) $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

    γ) Αν $\theta > 0$ τότε $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

    δ) Αν $\theta > 0$ τότε $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$

## 6. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
- $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

## 7. ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Κάθε παράσταση της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in R,\ \alpha \neq 0$ ονομάζεται τριώνυμο.

Ορίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Ρίζες τριωνύμου:

- Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες $\rho_1, \rho_2$ με $\rho_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $\rho_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα την $\rho_1 = \rho_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta \geq 0$ τότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές
- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο $R$, δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

- Αν $\Delta > 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
- Αν $\Delta = 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
- Αν $\Delta < 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$, δηλαδή τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

Τύποι του VIETA

- $S = \rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}$
- $P = \rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

Πρόσημο τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

- Αν $\Delta>0$

| x | $-\infty$ | | $\rho_1$ | | $\rho_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | Ομόσημο του α | 0 | Ετερόσημο του α | 0 | Ομόσημο του α | |

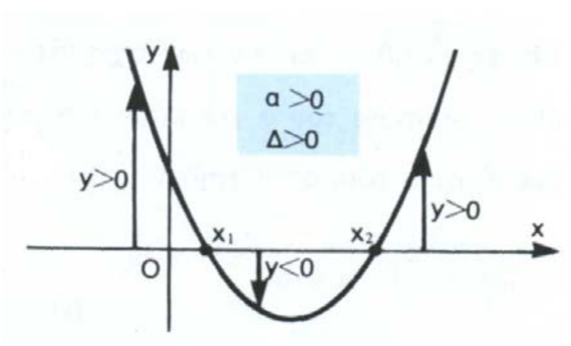
- Αν $\Delta=0$

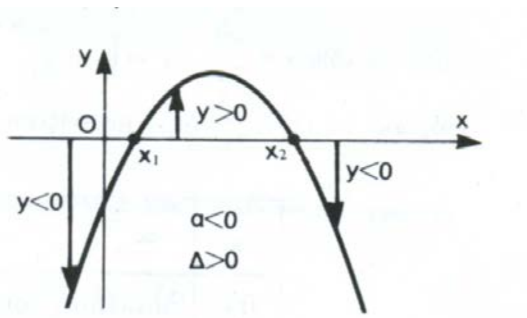
| x | $-\infty$ | | $\frac{-\beta}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | Ομόσημο του α | 0 | Ομόσημο του α | |

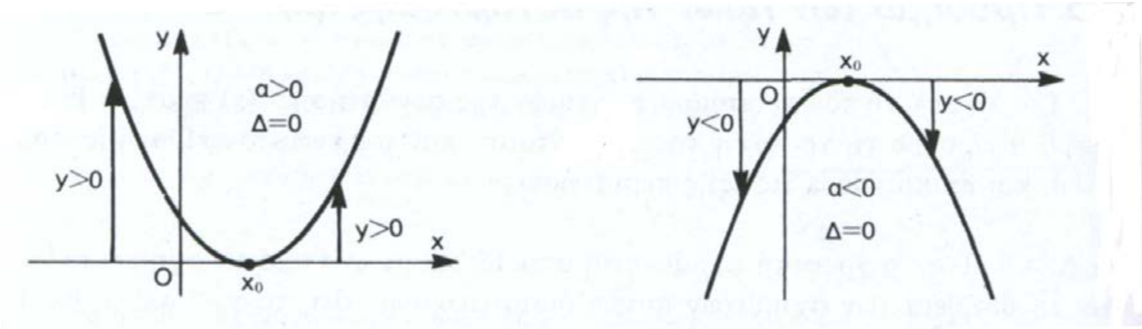
- Αν $\Delta<0$ τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δηλαδή:
  αν $\alpha>0$ τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
  Αν $\alpha<0$ τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

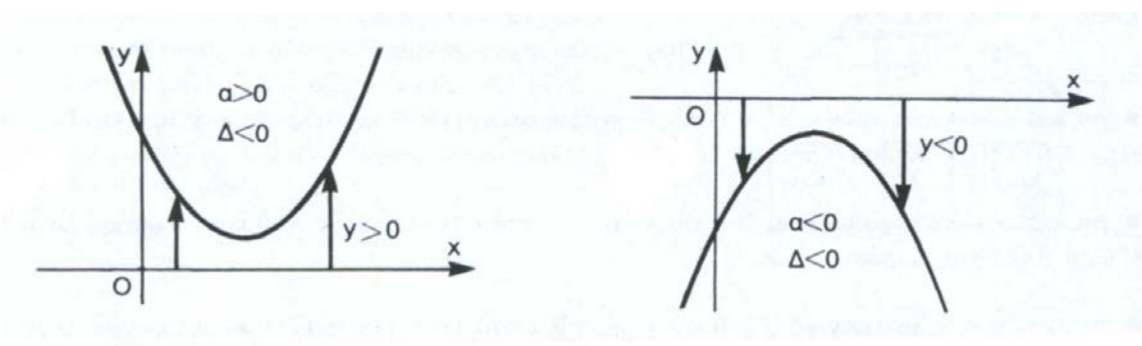
| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | | Ομόσημο του α | |

Γραφική παράσταση τριωνύμου




y
a>0
Δ=0
y>0
y>0
x
O
x0
y
x0
x
O
y<0
y<0
a<0
Δ=0


y
a>0
Δ<0
y>0
x
O
y
x
O
y<0
a<0
Δ<0

## 8. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ - ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Πολυώνυμα $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \ \alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},...,\alpha_1,\alpha_0\in\mathbb{R}$ και $\nu\in N$.

- Κάθε πολυώνυμο έχει το πολύ τόσες ρίζες όσος είναι ο βαθμός του.
- Πιθανές ακέραιες ρίζες της $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha=0,\ \ \alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\ldots\alpha_1,\alpha_0$ ακέραιοι, είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha$.
- Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το $\rho$ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.
- Παραγοντοποίηση πολυωνύμου γίνεται πιο γρήγορα με το σχήμα Horner.

## 9. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΜΕΤΑΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$

- $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$ με $B(x) \neq 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$ με $B(x) \neq 0$

- $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \geq 0$ με $B(x) \neq 0$

- $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ ομοίως

- Στις ρητές και στις άρρητες εξισώσεις ή ανισώσεις προσέχουμε τους περιορισμούς. Δηλαδή:

  $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ πρέπει $B(x) \neq 0$

  $\sqrt{A(x)} \geq \kappa$ πρέπει $A(x) \geq 0$

  $\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}} \geq \lambda$ πρέπει $B(x) > 0$

## 10. ΔΥΝΑΜΕΙΣ - ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ορίζουμε $\alpha^{\nu} = \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha$ ($\nu$ φορές), $\nu \in \mathbb{N}^{*}$ και $\nu \geq 2$

Ιδιότητες δυνάμεων

- $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$, $\beta \neq 0$
- Αν $\alpha \neq 0$, $\alpha^{0} = 1$, $\alpha^{-\nu} = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\nu}$
- Αν $\nu$ περιττός τότε $x^{\nu} = \alpha^{\nu} \Leftrightarrow x = \alpha$,

  Αν $\nu$ άρτιος τότε $x^{\nu} = \alpha^{\nu} \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Ρίζες πραγματικών αριθμών

- Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{2} = \alpha$ και ονομάζεται τετραγωνική ρίζα του $\alpha$
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$ και ονομάζεται νιοστή ρίζα του $\alpha$

Ιδιότητες ριζών

- $\sqrt{\alpha^{2}} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
- Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=\alpha$
- $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$
- $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\cdot\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, $\alpha,\beta\geq 0$, $\kappa,\nu$ θετικοί ακέραιοι

  Όλες οι ιδιότητες των ριζών ισχύουν με την προϋπόθεση οτι ορίζονται οι ρίζες

- Αν $\alpha,\beta$ μη αρνητικοί αριθμοί τότε ισχύει $\alpha<\beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$
- Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$, $\alpha>0$ και $\nu$ περιττός, έχει ακριβώς μία λύση, την $\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$, $\alpha>0$ και $\nu$ άρτιος, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$

## 11. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΡΡΗΤΟ ΠΑΡΑΝΟΜΑΣΤΗ ΣΕ ΡΗΤΟ ΠΑΡΑΝΟΜΑΣΤΗ

- $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\cdot\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta},\ \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}=\frac{\alpha\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta^3}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\beta},\ \beta>0$

- $\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}}=\frac{\alpha\left(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\right)}{\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}\right)\left(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\right)}=\frac{\alpha\left(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\right)}{\gamma-\delta},\ \sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}\neq 0,\ \gamma,\delta>0$

- $\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}}=\frac{\alpha\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}\right)}{\left(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\right)\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}\right)}=\frac{\alpha\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}\right)}{\gamma-\delta},\ \gamma,\delta>0,\ \gamma\neq\delta$

- $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}}=\frac{\alpha}{\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)-\sqrt{\delta}}=\frac{\alpha\left[\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)+\sqrt{\delta}\right]}{\left[\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)-\sqrt{\delta}\right]\cdot\left[\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)+\sqrt{\delta}\right]}=$

$$\frac{\alpha\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\right)\left[\left(\beta+\gamma-\delta\right)-2\sqrt{\beta\gamma}\right]}{\left[\left(\beta+\gamma-\delta\right)+2\sqrt{\beta\gamma}\right]\cdot\left[\left(\beta+\gamma-\delta\right)-2\sqrt{\beta\gamma}\right]}=$$

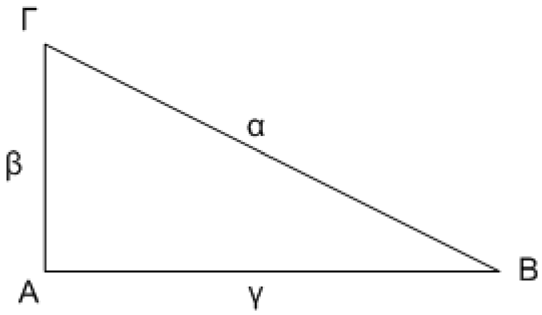
$$\frac{\alpha\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\right)\left[\left(\beta+\gamma-\delta\right)-2\sqrt{\beta\gamma}\right]}{\left[\left(\beta+\gamma-\delta\right)+2\sqrt{\beta\gamma}\right]\cdot\left[\left(\beta+\gamma-\delta\right)-2\sqrt{\beta\gamma}\right]}=$$

$$\frac{\alpha\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\right)\left(\beta+\gamma-\delta-2\sqrt{\beta\gamma}\right)}{\left(\beta+\gamma-\delta\right)^2-4\beta\gamma},\ \sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}\neq 0,\ \beta,\gamma,\delta>0$$

*Ημερομηνία τροποποίησης: 29/8/2011*

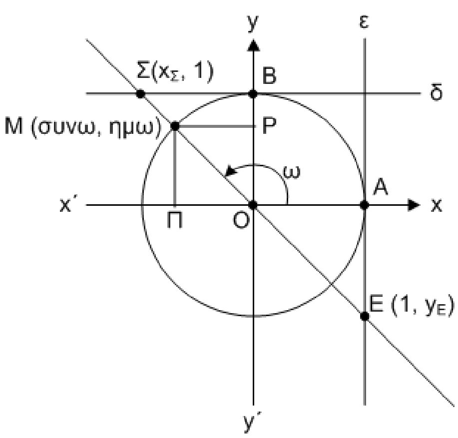
# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

## 1. ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΚΑΙ ΣΤΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΟ




- $\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ (συνημίτονο του Β)
- $\eta\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha}$ (ημίτονο του Β)
- $\epsilon\phi B = \dfrac{\beta}{\gamma}$ (εφαπτομένη του Β)
- $\sigma\phi B = \dfrac{\gamma}{\beta}$ (συνεφαπτομένη του Β)

<u>Ορισμοί στον τριγωνομετρικό κύκλο</u>



- $\sigma\upsilon\nu\omega =$ x=τετμημένη του σημείου Μ
- $\eta\mu\omega = y =$τεταγμένη του σημείου Μ
- $\epsilon\varphi\omega = y_E =$τεταγμένη του σημείου Ε
- $\sigma\varphi\omega = x_\Sigma =$τετμημένη του σημείου Σ
- Ο άξονας xx' είναι ο άξονας των συνημιτόνων
- Ο άξονας yy' είναι ο άξονας των ημιτόνων
- Η ευθεία ε λέγεται ευθεία των εφαπτομένων
- Η ευθεια δ λέγεται ευθεία των συνεφαπτομένων
- $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$
- $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$

Μοίρες - ακτίνια

Ο τύπος που μετατρέπει τις μοίρες μ σε ακτίνια α (rad) και αντίστροφα είναι ο εξής:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

π.χ. $\pi(\text{rad}) = 180^o, 1^o = \frac{\pi}{180}\text{rad}, \frac{\pi}{3}(\text{rad}) = 60^o$ κλπ.

## 2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ

| Γωνία ω | | Τριγων. αριθμοί | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| σε μοίρες | σε rad | ημω | συνω | εφω | σφω |
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 | Δεν ορί-ζεται |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | Δεν ορί-ζεται | 0 |

## 3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

- $\epsilon\phi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

- $\sigma\phi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

- $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$

- $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega}$

- $\eta\mu^2\omega = \dfrac{\epsilon\phi^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega}$

## 4. ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

- $συν(α-β)=συνα\cdot συνβ+ημα\cdot ημβ,\ α,β\in\mathbb{R}$
- $συν(α+β)=συνα\cdot συνβ-ημα\cdot ημβ,\ α,β\in\mathbb{R}$
- $ημ(α-β)=ημα\cdot συνβ-ημβ\cdot συνα,\ α,β\in\mathbb{R}$
- $ημ(α+β)=ημα\cdot συνβ+ημβ\cdot συνα,\ α,β\in\mathbb{R}$
- $συν2α=συν^2α-ημ^2α=1-2ημ^2α=2συν^2α-1$

  ομοίως

  $συνα=συν^2\frac{α}{2}-ημ^2\frac{α}{2}=1-2\cdot ημ^2\frac{α}{2}=2\cdot συν^2\frac{α}{2}-1$
- $εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφα\cdot εφβ}$
- $εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$
- $σφ(α-β)=\frac{σφα\cdot σφβ+1}{σφβ-σφα}$
- $σφ(α+β)=\frac{σφα\cdot σφβ-1}{σφβ+σφα}$
- $ημ2α=2ημα\cdot συνα$
- $εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$
- $σφ2α=\frac{σφ^2α-1}{2σφα}$
- $συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$
- $ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2}$
- $εφ^2α=\frac{1-συν2α}{1+συν2α}$

- $\eta\mu 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1+\epsilon\phi^2\alpha}$

- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-\epsilon\phi^2\alpha}{1+\epsilon\phi^2\alpha}$

## 5. ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΙΣ ΘΕΣΕΙΣ π/2 ΚΑΙ 3π/2

- $\sigma\upsilon\nu(180^o - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\eta\mu(180^o - \theta) = \eta\mu\theta$
- $\epsilon\phi(180^o - \theta) = -\epsilon\phi\theta$
- $\sigma\phi(180^o - \theta) = -\sigma\phi\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$
- $\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta$
- $\epsilon\phi(-\theta) = -\epsilon\phi\theta$
- $\sigma\phi(-\theta) = -\sigma\phi\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(180^o + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\eta\mu(180^o + \theta) = -\eta\mu\theta$
- $\epsilon\phi(180^o + \theta) = \epsilon\phi\theta$
- $\sigma\phi(180^o + \theta) = \sigma\phi\theta$
- $\eta\mu(90^o - \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(90^o - \theta) = \eta\mu\theta$
- $\epsilon\phi(90^o - \theta) = \sigma\phi\theta$
- $\sigma\phi(90^o - \theta) = \epsilon\phi\theta$
- $\eta\mu(90^o + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(90^o + \theta) = -\eta\mu\theta$
- $\epsilon\phi(90^o + \theta) = -\sigma\phi\theta$
- $\sigma\phi(90^o + \theta) = -\epsilon\phi\theta$
- $\eta\mu(270^o - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(270^o - \theta) = -\eta\mu\theta$

- $\epsilon\phi(270^o - \theta) = \sigma\phi\theta$
- $\sigma\phi(270^o - \theta) = \epsilon\phi\theta$
- $\eta\mu(270^o + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(270^o + \theta) = \eta\mu\theta$
- $\epsilon\phi(270^o + \theta) = -\sigma\phi\theta$
- $\sigma\phi(270^o + \theta) = -\epsilon\phi\theta$

## 6. ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΠΛΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- Αν $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$ ή $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ και θ είναι μια λύση της $\sigma\upsilon\nu x = \alpha,$ τότε οι λύσεις δίνονται από τους τύπους:

  $x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta, k \in Z$

- Αν $\eta\mu x = \eta\mu\theta$ ή $\eta\mu x = \alpha$ τότε οι λύσεις δίνονται από τους τύπους:

  $x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta), k \in Z$

- Αν $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta$ ή $\epsilon\phi x = \alpha$ , τότε οι λύσεις δίνονται από τον τύπο:

  $x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in Z$

- Αν $\sigma\phi x = \sigma\phi\theta$ ή $\sigma\phi x = \alpha$ , τότε οι λύσεις δίνονται από τον τύπο:

  $x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in Z$

## 7. ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ-ΑΡΤΙΑ-ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ, ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός T>0 τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

  1. $x+T \in A, x-T \in A$

  2. $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

  3. Ο πραγματικός αριθμός T ονομάζεται περίοδος της f.

  π.χ. Περιοδικές συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \epsilon\phi x$, $f(x) = \sigma\phi x$ (x σε rad)

- Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται άρτια αν:

  1. για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και

  2. $f(x) = f(-x)$ για κάθε $x \in A$

<u>Παρατήρηση</u>: Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy'.

- Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται περιττή αν:

  1. για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και

  2. $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$

<u>Παρατήρηση</u>: Η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O(0,0)

<u>Μονοτονία συνάρτησης</u>:

1. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$

2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$

3. Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γνησίως μονότονη.

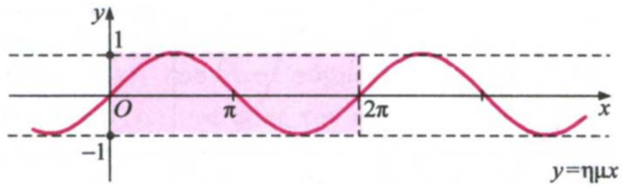
Ακρότατα:

1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$. Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται ελάχιστο της συνάρτησης f.

2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$. Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο της συνάρτησης f.

Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $f(x) = \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \eta\mu x \leq 1$

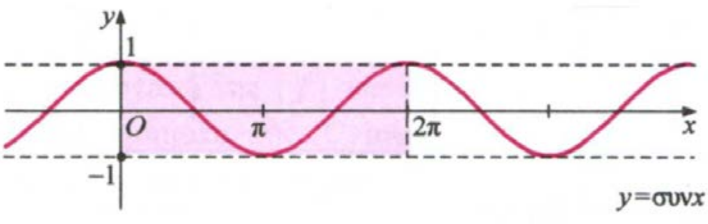



Η f είναι περιοδική με περίοδο 2π και για αυτό τη μελετάμε σε διάστημα πλάτους 2π π.χ. [0,2π].

| x | 0 | | π/2 | | π | | 3π/2 | | 2π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ημx | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | -1 | ↗ | 0 |
| | | | Μέγιστο | | | | Ελάχιστο | | |

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιττή γιατί $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$ και έτσι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O(0,0) των αξόνων. Ακόμα έχει μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ με $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ και ελάχιστο στο $x_1 = \frac{3\pi}{2}$ με $f(\frac{3\pi}{2}) = -1.$

- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

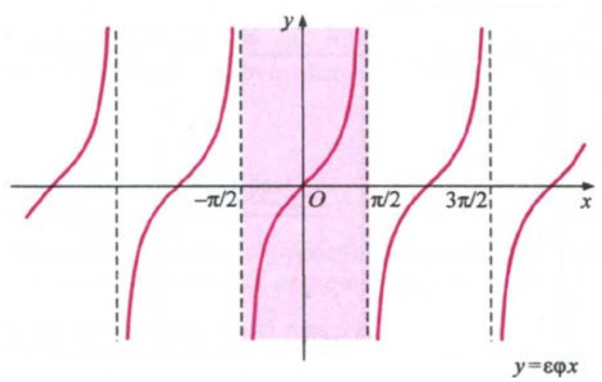



Η f είναι περιοδική με περίοδο 2π και τη μελετάμε συνήθως στο διάστημα [0,2π].

| x | 0 | | π/2 | | π | | 3π/2 | | 2π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| συνx | 1 | ↘ | 0 | ↘ | -1 | ↗ | 0 | ↗ | 1 |
| | Μέγιστο | | | | Ελάχιστο | | | | Μέγιστο |

Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι άρτια γιατί $f(-x)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x=f(x)$ οπότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy'. Ακόμα έχει μέγιστο στα $x_1=0, x_2=2\pi$ και είναι $f(0)=1, f(2\pi)=1$ και ελάχιστο στο $x_3=\pi$ με $f(\pi)=-1$.

- $f(x)=\epsilon\phi x, x\in\mathbb{R}$




Η $f(x)=\epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο π, οπότε αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Η $\epsilon\phi x$ δεν ορίζεται στα $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ άρα $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$.

| x | -π/2 | π/2 |
|---|---|---|
| εφx | ↗ | |

Η $f(x)=\epsilon\phi x$ είναι περιττή συνάρτηση γιατί $\epsilon\phi(-x)=-\epsilon\phi x$. Η $f(x)=\epsilon\phi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Οι ευθείες $x=\frac{-\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφοι ασύμπτωτοι της γραφικής παράστασης της f.

- $f(x)=\sigma\phi x, x\in\mathbb{R}$

Η $f(x)=\sigma\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το (0,π).

Η $f(x)=\sigma\phi x$ δεν ορίζεται στα $0,\pi$ άρα $x\neq k\cdot\pi$.

| x | 0 | π |
|---|---|---|
| σφx | $\searrow$ | |

Η $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι περιττή γιατί $\sigma\varphi(-x)=-\sigma\varphi x$. Η ευθεία $x=\pi$ και ο άξονας yy' είναι κατακόρυφοι ασύμπτωτοι της γραφικής παράστασης της f. Η $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,π).

*Ημερομηνία τροποποίησης: 29/8/2011*

# ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

## 1. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ) - ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ-ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Εκθετική συνάρτηση ορίζουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha^x, \alpha>0$ και $\alpha\neq 1$, δηλαδή $\alpha\in(0,1)\bigcup(1,\infty)$

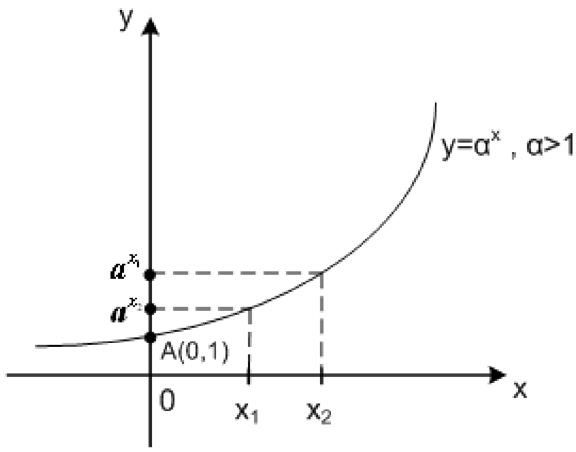
- Αν $\alpha>1$ τότε για την $f(x)=\alpha^x$ ισχύουν:

  1. έχει πεδίο ορισμού το R

  2. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών

  3. είναι γνησίως αύξουσα στο R δηλαδή για κάθε $x_{1,}x_2\in\mathbb{R}$ , αν $x_1<x_2$ τότε $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$

  4. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x



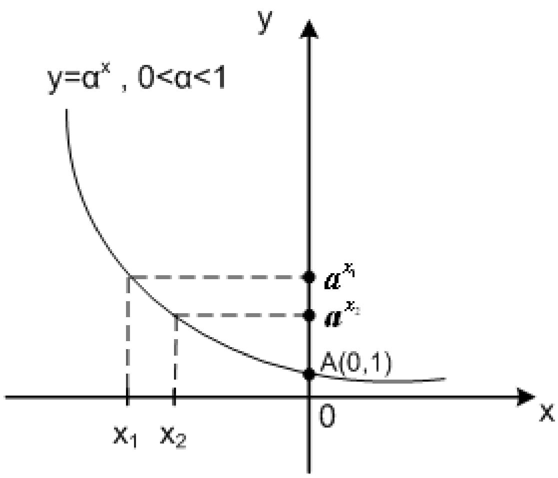

- Αν $0<\alpha<1$ τότε για την $f(x)=\alpha^x$ ισχύουν:

  1. έχει πεδίο ορισμού το R

  2. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών

  3. είναι γνησίως φθίνουσα στο R, δηλαδή για κάθε $x_{1,}x_2\in\mathbb{R}$, αν $x_1<x_2$ τότε $\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$

  4. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα των x




<u>Σχόλιο χρήσιμο για ασκήσεις με εκθετικές εξισώσεις</u>

- Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $\alpha^{x_1} \neq \alpha^{x_2}$ (λόγω μονοτονίας της $f(x)=\alpha^x$) οπότε με απαγωγή σε άτοπο έχουμε $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- Για την επίλυση εκθετικών ανισώσεων εφαρμόζουμε τη μονοτονία της $f(x)=\alpha^x$, προσέχοντας αν $\alpha>1$ ή $0<\alpha<1$
- Στη διαδικασία επίλυσης εκθετικών εξισώσεων ή ανισώσεων μπορούμε να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

**2. ΕΝΝΟΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ (ΟΡΙΣΜΟΣ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ) - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΑΥΤΗΣ**

Λογαριθμική συνάρτηση ορίζουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\log_\alpha x, \alpha>0$ και $\alpha\neq 1, x>0.$

Ισχύει $\log_\alpha x=\theta \Leftrightarrow \alpha^\theta = x$

'Οταν $\alpha=e$ γράφουμε lnx και έχουμε φυσικό λογάριθμο του x.

Όταν α=10, τότε γράφουμε logx.

Για τη συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$ ισχύουν:

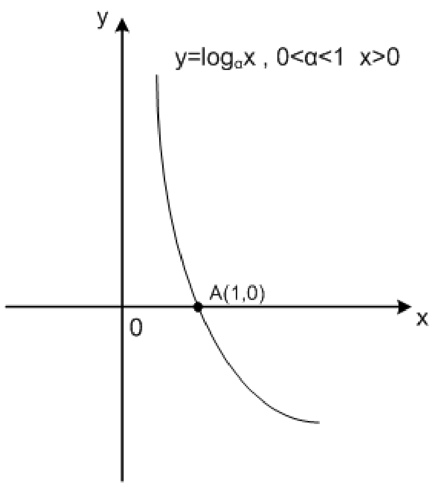
$x\in(0,+\infty)$

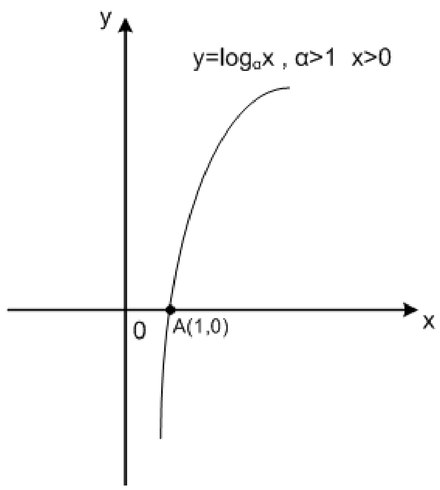
$y\in\mathbb{R}$

Αν $0<\alpha<1,$ η f είναι γνησίως φθίνουσα δηλαδή αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$

Αν $\alpha>1,$ η f είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$

Έτσι η $f(x)=\ln x,$ όπου α=e, είναι γνησίως αύξουσα.




<u>Ιδιότητες Λογαρίθμων</u>

- $\log_\alpha(x_1\cdot x_2)=\log_\alpha x_1+\log_\alpha x_2$

- $\log_{\alpha}(\frac{x_1}{x_2}) = \log_{\alpha}x_1 - \log_{\alpha}x_2$

- $\log_{\alpha}x_1^k = k \cdot \log_{\alpha}x_1$

- $\log_{\alpha}\alpha = 1$ και $\log_{\alpha}1 = 0$

- $\log_{\alpha}\alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_{\alpha}x} = x$

- Αν:

  (i) $\alpha > 1$ τότε $\log_{\alpha}x_1 < \log_{\alpha}x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

  (ii) $0 < \alpha < 1,$ τότε $\log_{\alpha}x_1 < \log_{\alpha}x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

- $\alpha^x = e^{x \cdot \ln\alpha},$ αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$

- $\log_{\beta}\theta = \frac{\log_{\alpha}\theta}{\log_{\alpha}\beta}, \theta > 0, \alpha, \beta > 0$ και $\alpha, \beta \neq 1$

- $\log_{\beta}\theta = \frac{\ln\theta}{\ln\beta}$

- $\log_{\beta}\theta = \frac{\log\theta}{\log\beta}$

- Αν:

  (i) $\alpha > 1$ και $0 < x < 1$ τότε $\log_{\alpha}x < 0$

  (ii) $\alpha > 1$ και $x > 1$ τότε $\log_{\alpha}x > 0$

- Αν:

  (i) $0 < \alpha < 1$ και $x > 1$ τότε $\log_{\alpha}x < 0$

  (ii) $0 < \alpha < 1$ και $0 < x < 1$ τότε $\log_{\alpha}x > 0$

## 3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ - ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

- Από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει:

  Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $\log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2$

  έτσι με απαγωγή σε άτοπο έχουμε ότι ισχύει:

  $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

- Εφαρμόζουμε τον ορισμό του λογαρίθμου και τις ιδιότητες.

- Για την επίλυση των λογαριθμικών ανισώσεων εφαρμόζουμε:
  - τον ορισμό του λογαρίθμου και τις ιδιότητες
  - τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης

## 4. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ-ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Εφαρμόζοντας τους ορισμούς και τις ιδιότητες της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης προσπαθούμε να μετατρέψουμε την εκθετική εξίσωση/ανίσωση σε λογαριθμική ή το αντίστροφο ανάλογα με το ποιο είναι πιο εύκολο.

*Ημερομηνία τροποποίησης: 29/8/2011*

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### Α. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

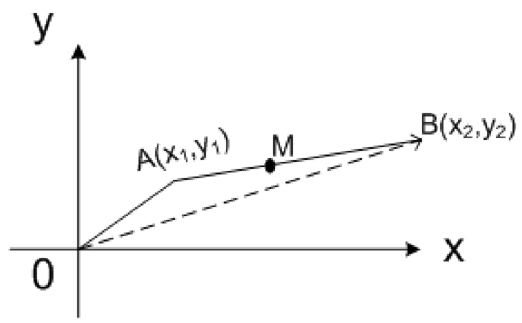
### Α1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Έστω διάνυσμα $\vec{AB}$ με άκρα τα $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

  $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

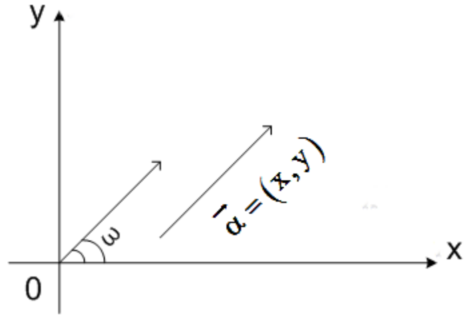
  $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (συντεταγμένες του $\vec{AB}$)

  Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του $\vec{AB}$ είναι $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$




- Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y),\ x \neq 0$. Τότε καλούμε συντελεστή διεύθυνσης λ=εφω όπου ω είναι η γωνία του $\vec{\alpha}$. Είναι $\lambda = \frac{y}{x}, x \neq 0$ .

  Δηλαδή για το $\vec{AB}$ ισχύει $\lambda_{\vec{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 - x_1 \neq 0$



- Μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$:

  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Έτσι για το $\vec{AB}$ είναι $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ δηλαδή η ευκλείδια απόσταση μεταξύ των σημείων Α,Β.

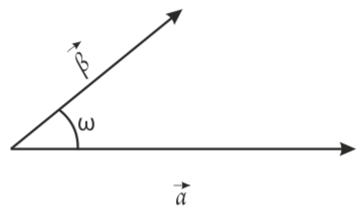
- Δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_{1,} y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι παράλληλα δηλαδή $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, εάν και μόνο εάν η ορίζουσα (det) των συντεταγμένων τους είναι μηδέν δηλαδή:

  $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

## Α2. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω $\vec{\alpha} = (x_{1,} y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

Καλούμε εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων τον αριθμό $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$.




Άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$ ή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}}$

# Β. ΕΥΘΕΙΑ

## Β1. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ, ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ, ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ, ΓΩΝΙΑ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

- Μια ευθεία (δ) καθορίζεται από τη διεύθυνσή της. Ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης αυτής $\lambda = \epsilon\varphi\omega$ όπου ω η γωνία της (δ) με τον άξονα Οx. Ισχύει $0 \leq \omega \leq \pi$.

- Εξίσωση ευθείας:

1. $\epsilon :\ y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ , αν δίνονται ο συντελεστής διεύθυνσης της λ και η ευθεία περνάει από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Αν $\omega = \frac{\pi}{2}$ δεν υπάρχει $\lambda \in R$ και τότε $x = x_0$.

Αν δίνεται σημείο Α με παραμετρική έκφραση για να ορίσουμε την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το Α εργαζόμαστε ως εξής :

Έστω $A(2\lambda - 1, \lambda + 2)$. Θέτουμε $x = 2\lambda - 1$ και $y = \lambda + 2$ και απαλείφουμε την παράμετρο $\lambda$ δηλαδή $\lambda = y - 2$ άρα $x = 2\cdot(y-2) - 1 \Leftrightarrow x = 2y - 4 - 1 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$.

2. $\epsilon :\ Ax + By + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$ αν $B \neq 0$ τότε $\lambda_\epsilon = -\frac{A}{B}$

Αν $(\delta_1) \parallel (\delta_2)$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2$

Αν $(\delta_1) \perp (\delta_2)$, τότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

- Για να βρούμε τη γωνία δύο ευθειών $(\delta_1), (\delta_2)$ εργαζόμαστε ως εξής:

Λαμβάνουμε διάνυσμα $\vec{\alpha} \parallel (\delta_1)$ και $\vec{\beta} \parallel (\delta_2)$

Βρίσκουμε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

**Β2. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ**

Απόσταση $d$ σημείου $A(x_{0,}y_0)$ από την ευθεία $(\epsilon)$: $Ax + By + \Gamma = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## Β3. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (ΑΒΓ)

Εμβαδόν τριγώνου (ΑΒΓ) όπου $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$:

$\mathrm{E} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}})|$, όπου $\det(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}})$ είναι η ορίζουσα των συντεταγμένων των $\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}}$.

## Γ. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

### Γ1. ΚΥΚΛΟΣ-ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥ

1. $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=\rho^2$, όπου $K\left(x_0,y_0\right)$ είναι το κέντρο του και $\rho=$ακτίνα του

Όταν το κέντρο είναι η αρχή των αξόνων η εξίσωση γίνεται:

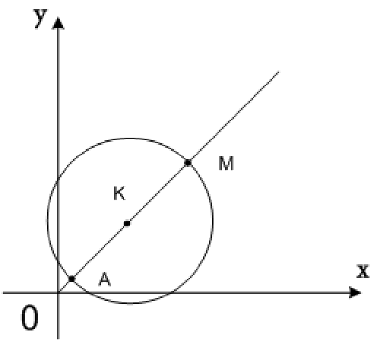
$x^2+y^2=\rho^2$ και η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) σε ένα σημείο του $A\left(x_1,y_1\right)$ είναι

ε: $xx_1+yy_1=\rho^2$

2. $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0$

Ο κύκλος τότε έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

**Γ2. ΜΕΓΙΣΤΗ-ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ**




(OA)=ελάχιστη απόσταση από το O(0,0), (OM)=μέγιστη απόσταση από το O(0,0)

## Γ3. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

- Η εξίσωση παραβολής C με εστία $E(\frac{\rho}{2},0)$ και διευθετούσα $\delta:\ x=-\frac{\rho}{2}$ είναι $y^2=2\rho x$
- Η εφαπτόμενη της παραβολής $y^2=2\rho x$ στο σημείο $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση:

  $yy_1=\rho(x+x_1)$
- Εξίσωση παραβολής C με εστία $E\left(0,\frac{\rho}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta:\ y=-\frac{\rho}{2}$ είναι: $x^2=2\rho x$
- Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2=2\rho x$ στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση
  $xx_1=\rho(y+y_1)$

**Γ4. ΕΛΛΕΙΨΗ**

- Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha$ είναι:

  $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$

- Η εφαπτόμενη της έλλειψης C στο σημείο της $M_1\left(x_{1,}y_1\right)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$

- Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha$ είναι:

  $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $M_1\left(x_{1,}y_1\right)$ έχει εξίσωση $\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1$

- Η εκκεντρότητα της έλλειψης ορίζεται ως: $\epsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$ ή $\epsilon=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$

  Άρα $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\epsilon^2}$

- Αν $M_1,M_2$ είναι δύο οποιαδήποτε σημεία της έλλειψης συμμετρικά ως προς O τότε το ευθύγραμμο τμήμα $M_1M_2$ λέγεται διάμετρος της έλλειψης και ισχύει $2\beta\le\left(M_1M_2\right)\le 2\alpha$

  $2\alpha$ =μήκος μεγάλου άξονα, $2\beta$ =μήκος μικρού άξονα

## Γ5. ΥΠΕΡΒΟΛΗ

- Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερή διαφορά $2\alpha$ είναι:

  $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$

- Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ είναι $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1.$

- Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερή διαφορά $2\alpha$ είναι:

  $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1,$ όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$

- Αν $\alpha=\beta$ τότε έχουμε $x^2-y^2=\alpha^2$ που λέγεται ισοσκελής υπερβολή

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $y=\frac{\beta}{\alpha}x,\ y=-\frac{\beta}{\alpha}x$

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ είναι $y=\frac{\alpha}{\beta}x,\ y=-\frac{\alpha}{\beta}x$

- Η εκκεντρότητα της υπερβολής ορίζεται ως: $\epsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1, \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\epsilon^2-1}$

- Εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ σε σημείο της $M_1\left(x_{1,}y_1\right)$ είναι: $\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1$

*Ημερομηνία τροποποίησης: 29/8/2011*

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

## 1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.) λέγεται μια ακολουθία $(\alpha_\nu)$, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, τον οποίο ονομάζουμε διαφορά της προόδου και συμβολίζουμε με ω.

Δηλαδή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$

Οι όροι της Α.Π. είναι $\alpha_1, \alpha_1+\omega, \alpha_1+2\omega, \ldots, \alpha_1+(\nu\text{-}1)\omega$

Άρα $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega, \nu \in \mathbb{N}^*$.

- Τρεις αριθμοί $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

  Ο $\beta$ λέγεται αριθμητικός μέσος των $\alpha$ και $\gamma$.

- Το άθροισμα των $\nu$ πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$ με διαφορά $\omega$ είναι:

  $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ ή $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$

## 2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Γεωμετρική πρόοδος (Γ.Π.) λέγεται μια ακολουθία $(\alpha_\nu)$, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί το ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό, τον οποίο ονομάζουμε λόγο της προόδου και τον συμβολίζουμε με $\lambda$.

Αν $\lambda \neq 0$ ισχύει $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ ή $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$

Οι όροι της Γ.Π. είναι: $\alpha_1, \alpha_1 \cdot \lambda, \alpha_1 \cdot \lambda^2, \ldots, \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

Έτσι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}, \nu \in \mathrm{N}^*$.

- Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

  Ο $\beta$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των $\alpha$ και $\gamma$.

- Το άθροισμα των πρώτων $\nu$ όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(\alpha_\nu)$ με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

*Ημερομηνία τροποποίησης: 29/8/2011*