Τυπολόγιο

Διανύσματα

✓ **Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων**

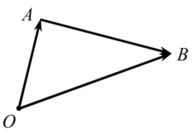
- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$
- $(\alpha+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$
- $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

✓ **Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων:** $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

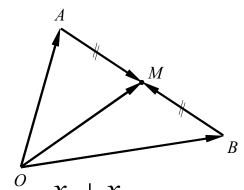
✓ **Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα**

- $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$
- $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$
- $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$
- $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$
- $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$
- Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$
- Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu$

✓ **Διάνυσμα θέσεως**
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$



✓ **Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος**
$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$



✓ **Συντεταγμένες μέσου τμήματος με άκρα** $A(x_1,y_1)$ **και** $B(x_2,y_2)$: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

✓ **Συντεταγμένες διανύσματος με άκρα** $A(x_1,y_1)$ **και** $B(x_2,y_2)$: $x=x_2-x_1$ και $y=y_2-y_1$.

✓ **Μέτρο διανύσματος:** Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

✓ **Απόσταση σημείων:** Αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ τότε $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

✓ **Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος** $\vec{\alpha}=(x,y)$: $\lambda=\dfrac{y}{x}$

✓ **Εσωτερικό γινόμενο μη μηδενικών διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot$συν$\phi$, όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

✓ **Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου**

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$
- Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
- $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\quad\lambda\in\mathbb{R}$
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
- Αν
  $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

✓ **Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου**

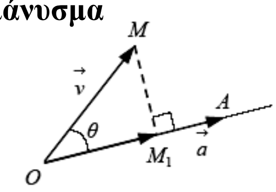
Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$ και συν$\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

✓ **Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων**

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$ αν ισχύει

- ❖ $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$
- ❖ $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$
- ❖ $\lambda_1=\lambda_2$

✓ **Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα**
$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot$προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{v}$



Ευθεία

- ✓ **Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας**

  Αν $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ τότε είναι $\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- ✓ **Συνθήκη καθετότητας και παραλληλίας ευθειών**

  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

- ✓ **Εξίσωση ευθείας**
  - Εξίσωση ευθείας με γνωστό το συντελεστή διεύθυνσης λ και ένα σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$:

    $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
  - Εξίσωση ευθείας με γνωστά τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ και $x_1 \neq x_2$:

    $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

- ✓ **Ειδικές περιπτώσεις**
  - Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\mathrm{A}(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y = \lambda x + \beta$.
  - Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι $y = \lambda x$.
  - Αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε η εξίσωσή της είναι $y = y_0$.
  - Αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ τότε η εξίσωσή της είναι $x = x_0$.

- ✓ **Γενική μορφή εξίσωση ευθείας**: $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ με $\mathrm{A} \neq 0$ ή $\mathrm{B} \neq 0$

- ✓ **Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία**
  - Η ευθεία με εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\mathrm{B}, -\mathrm{A})$.
  - Η ευθεία με εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

- ✓ **Απόσταση σημείου από ευθεία**

  Η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$d(\mathrm{M}_0, \varepsilon) = \frac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

- ✓ **Εμβαδόν τριγώνου:**

  $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})|$

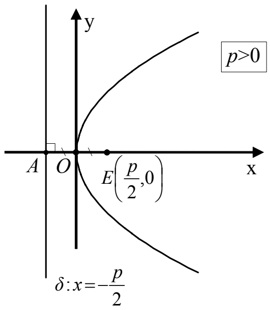
Κύκλος

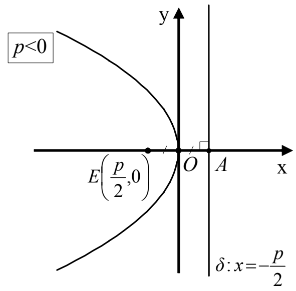
- ✓ Κύκλος με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα p: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = p^2}$.
- ✓ Κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα p: $\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = p^2}$.
- ✓ Εφαπτομένη κύκλου $x^2 + y^2 = p^2$ στο σημείο του $\mathrm{A}(x_1, y_1)$: $\boldsymbol{xx_1 + yy_1 = p^2}$.
- ✓ Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$,

  όταν $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma > 0$ με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{\mathrm{A}}{2}, -\dfrac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και ακτίνα $p = \dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$.

Παραβολή

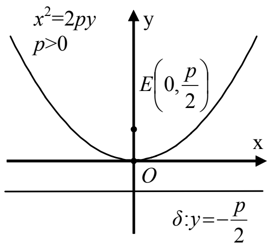
- ✓ Εξίσωση παραβολής με εστία $\text{E}\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2}$: $\boldsymbol{y^2=2px}$

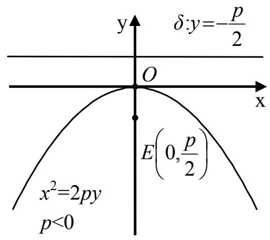




- ✓ Εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο $\text{M}_1\left(x_1,y_1\right)$: $\boldsymbol{yy_1=p\left(x+x_1\right)}$

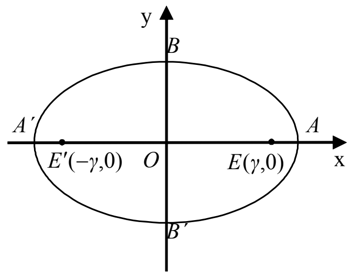
- ✓ Εξίσωση παραβολής με εστία $\text{E}\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y=-\frac{p}{2}$: $\boldsymbol{x^2=2py}$.



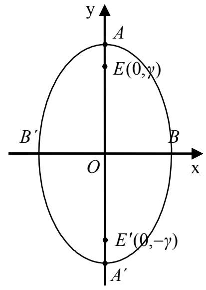


- ✓ Εφαπτομένη της παραβολής $x^2=2py$ στο $M_1(x_1,y_1)$: $\boldsymbol{xx_1=p\left(y+y_1\right)}$.

Έλλειψη

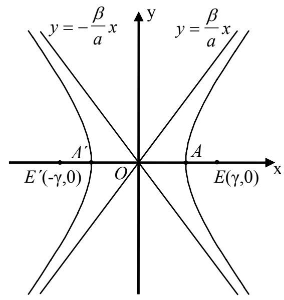


- ✓ Εξίσωση έλλειψης με εστίες τα σημεία $\text{E}'\left(-\gamma,0\right)$, $\text{E}\left(\gamma,0\right)$ και σταθερό άθροισμα 2α: $\boldsymbol{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1}$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.
- ✓ Εφαπτομένη της έλλειψης $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο $\text{M}_1\left(x_1,y_1\right)$: $\boldsymbol{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$.

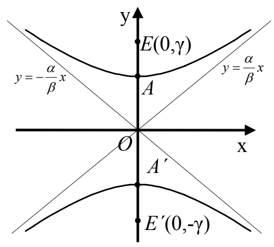


- ✓ Εξίσωση έλλειψης με εστίες τα σημεία $\text{E}'\left(0,-\gamma\right)$, $\text{E}\left(0,\gamma\right)$ και σταθερό άθροισμα 2α: $\boldsymbol{\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1}$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.
- ✓ Εφαπτομένη της έλλειψης $C:\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ στο $\text{M}_1\left(x_1,y_1\right)$: $\boldsymbol{\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$.
- ✓ Εκκεντρότητα έλλειψης: $\boldsymbol{\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1}$.
  - Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα λέγονται όμοιες.

Υπερβολή



- Εξίσωση υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερή διαφορά 2α: $\boldsymbol{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1}$ όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.
- Εφαπτομένη της υπερβολής $C:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο $M_1(x_1,y_1)$: $\boldsymbol{\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$.
- Ασύμπτωτες της υπερβολής $C:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$: $\boldsymbol{y=\frac{\beta}{\alpha}x}$ και $\boldsymbol{y=-\frac{\beta}{\alpha}x}$



- Εξίσωση υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερή διαφορά 2α: $\boldsymbol{\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1}$ όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.
- Εφαπτομένη της υπερβολής $C:\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ στο $M_1(x_1,y_1)$: $\boldsymbol{\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$.
- Ασύμπτωτες της υπερβολής $C:\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$: $\boldsymbol{y=\frac{\alpha}{\beta}x}$ και $\boldsymbol{y=-\frac{\alpha}{\beta}x}$

- Αν $\alpha=\beta$ η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και η εξίσωσή της είναι $\boldsymbol{x^2-y^2=\alpha^2}$
- **Εκκεντρότητα υπερβολής:** $\boldsymbol{\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1}$.
  - Αν $\alpha=\beta$, δηλαδή η υπερβολή είναι ισοσκελής, τότε $\varepsilon=\sqrt{2}$.