



ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
Σχολικό Έτος 2017 - '18

## Ερευνητική Εργασία Α' Λυκείου Τα Μαθηματικά στις Τέχνες



Θεσσαλονίκη  
Μάιος 2018

## **Μαθητές που συμμετείχαν**

Δασκάλου-Χριστάκη Ρόζα-Αντωνία

Δημητρίου-Τσακνάκης Ανδρέας

Διαμαντοπούλου Ανδριάννα

Καλοκάση Αμαρυλλίς-Αριστέα

Κασάπογλου Πολυξένη

Κετέν Νικόλαος

Λάππας Δημήτριος

Μπένης Αθανάσιος

Μωραΐτη Ελισάβετ

Μωυσίδης Αναστάσιος

Παπάρας Δημήτριος

Παυλίδου Δήμητρα-Ελένη

Στρατουδάκης Μιχαήλ

Τακουρίδης Ιωάννης

Ταυρίδης Σωκράτης-Γεώργιος

Τσαπκίνης Χρήστος-Ευάγγελος

Φαΐτατζής Πρόδρομος-Παναγιώτης

## **Υπεύθυνη καθηγήτρια**

Μποζέλου Μαρία

*Τη ζωγραφιά του εξώφυλλου φιλοτέχνησε η μαθήτρια Πολυξένη Κασάπογλου.*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	4
Ερευνητική Μεθοδολογία.....	5
Εισαγωγή.....	6
Αριθμοί Fibonacci – Χρυσή τομή.....	7
Αριθμοί Fibonacci.....	7
Χρυσή τομή.....	9
Γραμμικό σχέδιο.....	14
Καλλιτεχνικά ρεύματα και Μαθηματικά.....	19
Ανναγεννησιακή τέχνη.....	19
Κλασικισμός.....	20
Μπαρόκ.....	21
Ροκοκό.....	21
Νεοκλασικισμός.....	22
Ρομαντισμός.....	23
Ρεαλισμός.....	23
Νατουραλισμός.....	24
Συμβολισμός.....	25
Αρ Νουβώ.....	26
Εξπρεσιονισμός.....	27
Κυβισμός.....	28
Κονστρουκτιβισμός.....	30
Νεοπλαστικισμός.....	31
Ντανταϊσμός.....	31
Υπερρεαλισμός.....	32
Μπαουχάους.....	33
Ποπ Αρτ.....	34
Καλλιτέχνες που χρησιμοποίησαν Μαθηματικά στα έργα τους.....	35
Λεονάρντο ντα Βίντσι.....	35
Μάουριτς Κορνέλις Έσερ.....	47
Βίνσεντ βαν Γκογκ.....	49
Ζωρζ Μπρακ.....	51
Βασίλι Καντίνσκι.....	56
Τα Μαθηματικά πίσω από τις οφθαλμαπάτες.....	62
Βιβλιογραφία – Διαδικτυογραφία.....	72

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πλαίσιο του μαθήματος της ερευνητικής εργασίας (project) της Α' Λυκείου, κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2017-2018, αποφασίσαμε να ασχοληθούμε με τα Μαθηματικά και τη σχέση τους με τις Τέχνες. Αναρωτηθήκαμε αν επηρεάζουν τα Μαθηματικά τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούν οι καλλιτέχνες, πώς αυτά τους βοηθούν και ποιοι καλλιτέχνες τα χρησιμοποιούν.

Ασχοληθήκαμε με:

- τους αριθμούς Fibonacci, την Χρυσή Τομή και τον ρόλο τους στις τέχνες,
- την χρήση των Μαθηματικών στο γραμμικό σχέδιο και πώς αυτό χρησιμοποιείται σε έργα τέχνης,
- κάποια καλλιτεχνικά ρεύματα που έχουν σχέση με τα Μαθηματικά,
- μερικούς καλλιτέχνες που χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά στα έργα τους,
- τις οφθαλμαπάτες και τη σχέση τους με τα Μαθηματικά.

Στόχος μας ήταν να φανεί η χρήση των Μαθηματικών στις Τέχνες και να γίνει αυτή η σύνδεση κατανοητή σε μαθητές και κοινό.

## ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η ερευνητική μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για την εκπόνηση αυτής της εργασίας βασίστηκε στη μέθοδο project, στην οποία οι μαθητές αποφασίζουν και καθορίζουν το θέμα με το οποίο θα ασχοληθούν, προγραμματίζουν τις ενέργειες που πρέπει να γίνουν και ενεργούν για την εκπλήρωση του στόχου τους.

Αρχικά, προτάθηκε από την καθηγήτρια η ερευνητική εργασία «Τα Μαθηματικά στις Τέχνες». Ο σκοπός αυτής της ερευνητικής εργασίας ήταν να ασχοληθούν οι μαθητές με τη επιρροή των Μαθηματικών στις τέχνες, πώς αυτά εφαρμόζονται και πού εμφανίζονται. Αφού καθορίστηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα με τα οποία θα ασχολούνταν, χωρίστηκαν οι μαθητές σε ερευνητικές ομάδες και έγινε ανάθεση εργασιών στις ομάδες αυτές.

Η κάθε ομάδα έκανε αναζήτηση στη βιβλιογραφία και το διαδίκτυο για το θέμα που είχε αναλάβει, έγραψε μια εργασία και όταν οι ομάδες ολοκλήρωσαν τις εργασίες τους, όλοι οι μαθητές του project συνεργάστηκαν για τη συγγραφή της εργασίας αυτής.

Τέλος, δημιουργήθηκε μια παρουσίαση, η οποία περιλαμβάνει τα σημαντικότερα κομμάτια της εργασίας αυτής.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ανάμεσα στις Τέχνες και τα Μαθηματικά θα φαινόταν εκ πρώτης όψεως ότι δεν υπάρχει καμία σύνδεση, ότι τα δύο αυτά αντικείμενα βασίζονται σε διαφορετικά μοντέλα σκέψης. Η μαθηματική γνώση, όμως, συμβάλει ως θεωρητικό όργανο στις εικαστικές τέχνες. Η τέχνη αφομοιώνει στοιχεία τα οποία πήρε τόσο από τον υλικό όσο και από τον αφηρημένο κόσμο της επιστήμης.

Η τέχνη διαφοροποιείται από την επιστήμη. Ωστόσο και οι δύο αναζητούν την αλήθεια. Ο επιστήμονας όμως αναλύει, ενώ ο καλλιτέχνης δημιουργεί. Επιπλέον, η επιστήμη βασίζεται στη λογική σκέψη, ενώ η τέχνη στην υποκειμενική αντίληψη της εικόνας, του χρώματος, του σχήματος, της ιδέας, της γενικής ερμηνείας της ζωής.

Οι καλλιτέχνες που επηρεάστηκαν από τα Μαθηματικά, ανέβασαν κατά πολύ τον πήχη στη τέχνη, δημιούργησαν καλλιτεχνικά ρεύματα και τάσεις και κατάφεραν να αφήσουν ιστορία μέσα από τη δουλειά τους. Τα Μαθηματικά υπήρξαν εργαλεία για την ανάπτυξη της τέχνης.

## ΑΡΙΘΜΟΙ FIBONACCI - ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ

Πολύ συχνά στη φύση και τις τέχνες εμφανίζονται δυο πολύ σημαντικές έννοιες των Μαθηματικών, οι αριθμοί Fibonacci και η χρυσή τομή. Οι αριθμοί Fibonacci είναι μια ακολουθία αριθμών, ενώ η χρυσή τομή μία αναλογία που όταν χρησιμοποιείται σε έργα τέχνης συμβάλλει στην αρμονία τους.

### Αριθμοί Fibonacci

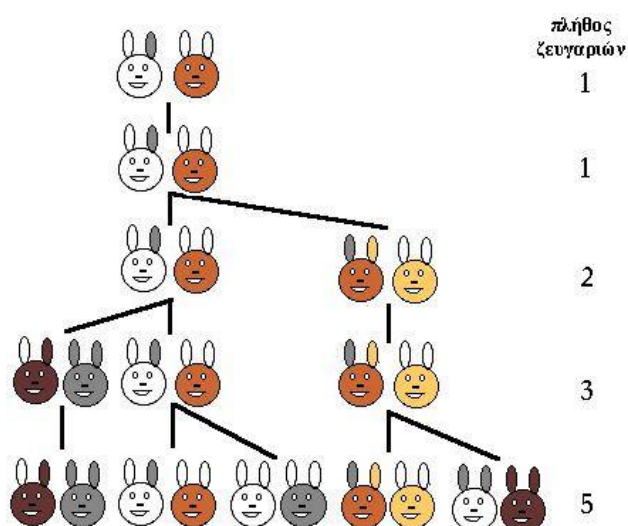
Οι αριθμοί Fibonacci είναι η ακολουθία αριθμών στην οποία οι δύο πρώτοι όροι είναι ίσοι με 1 και κάθε επόμενος όρος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι ο  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ,  $F_1 = F_2 = 1$ . Για παράδειγμα, οι 7 πρώτοι αριθμοί Fibonacci είναι οι εξής: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

### Ιστορικά Στοιχεία

Υπάρχουν πολλές θεωρίες αναφορικά με το πώς προέκυψε η ακολουθία Fibonacci. Η επικρατέστερη είναι πως η ακολουθία των αριθμών αυτών, ανακαλύφθηκε τον 13ο αιώνα από τον Ιταλό μαθηματικό Leonardo Pizanno (γνωστό και ως Leonardo Fibonacci). Στο βιβλίο του Liber Abaci έθεσε το εξής πρόβλημα:

Τοποθετούμε ένα ζευγάρι κουνέλια σε ένα κλειστό δωμάτιο. Πόσα ζευγάρια από κουνέλια θα υπάρχουν σε ένα χρόνο, αν κάθε ζευγάρι παράγει ένα επιπλέον κάθε μήνα, από τον 2ο μήνα και μετά;

Υποθέτουμε ότι τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ και αναπαράγονται απεριόριστα.



Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, ο αριθμός των ζευγαριών που θα υπάρχει στο τέλος κάθε μήνα είναι ο εξής:

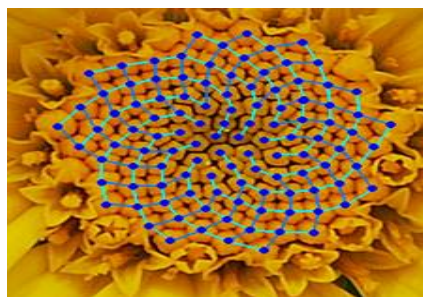
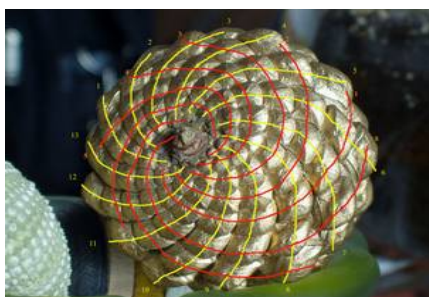
- 1ος μήνας: 1
- 2ος μήνας: 1
- 3ος μήνας: 2

- 4ος μήνας: 3
- 5ος μήνας: 5
- 6ος μήνας: 8
- 7ος μήνας: 13

δηλαδή κάθε αριθμός είναι άθροισμα των δύο προηγούμενων του. Η αρχή γίνεται εξ' ορισμού με τους αριθμούς 1 και 1 (αφού τον 1ο μήνα υπάρχει 1 ζεύγος, το οποίο δεν έχει αναπαραχθεί ακόμα τον 2 μήνα).

### Αριθμοί Fibonacci στην φύση

Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται σε διάφορες μορφές στην φύση. Πολλές φορές ο αριθμός των πετάλων στα άνθη είναι αριθμός που ανήκει στην ακολουθία Fibonacci. Για παράδειγμα, ο αριθμός των πετάλων στις περισσότερες μαργαρίτες είναι 34, 55 ή 89 και το χρυσάνθεμο έχει 34 πέταλα, που είναι αριθμοί Fibonacci. Επίσης, η ακολουθία συναντάται στο άνθος της αγκινάρας, σ' ένα κουκουνάρι ή στον φλοιό ενός ανανά. Επιπλέον, συνδέονται με την χρυσή τομή, η οποία αναλύεται παρακάτω, και έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινότητα.





## Χρυσή τομή

Δύο ποσότητες έχουν αναλογία χρυσής τομής αν ο λόγος του αθροίσματός τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με το λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη. Ο Μαθηματικός συμβολισμός της χρυσής τομής είναι  $\varphi$  και οφείλεται στον αρχαίο Έλληνα γλύπτη Φειδία. Η Μαθηματική σχέση που δίνει τον

αριθμό  $\varphi$  είναι η  $\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \varphi$  και έχει τιμή ίση με  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## Η χρυσή τομή στην Άλγεβρα

Ο χρυσός αριθμός  $\varphi$  έχει αρκετές χρήσεις στην Άλγεβρα, οι κυριότερες από τις οποίες είναι οι εξής:

- Αποτελεί την θετική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ .
- Το  $\varphi$  μπορεί να εκφραστεί και ως άπειρο συνεχές κλάσμα:  $\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$
- Η ακολουθία των λόγων κάθε δύο διαδοχικών αριθμών Fibonacci, δηλαδή οι

λόγοι  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$  τείνουν στον αριθμό  $\varphi$ .

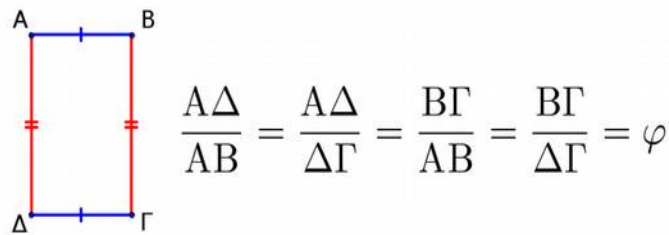
## Η Χρυσή τομή στη Γεωμετρία

- Η χρυσή τομή σε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB:

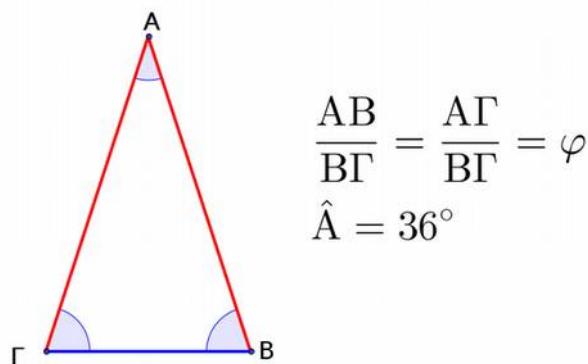


$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \varphi$$

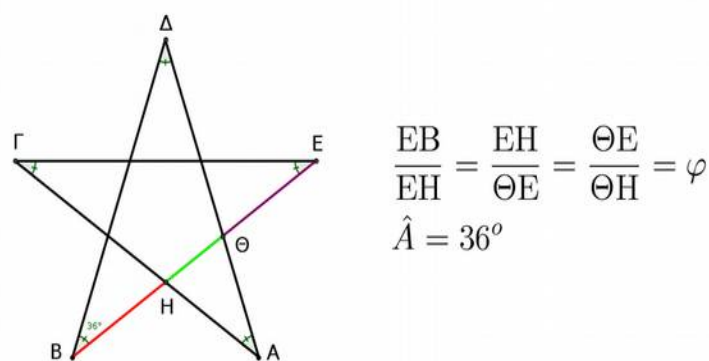
- Τα ορθογώνια των οποίων ο λόγος δύο μη παραλλήλων πλευρών ισούται με  $\varphi$  ονομάζονται χρυσά ορθογώνια.



- Κάθε ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο ο λόγος καθεμιάς από τις ίσες πλευρές προς τη βάση ισούται με τον αριθμό φ ονομάζεται χρυσό τρίγωνο. Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα η γωνία της κορυφής του τριγώνου πρέπει να ισούται με  $36^\circ$ .



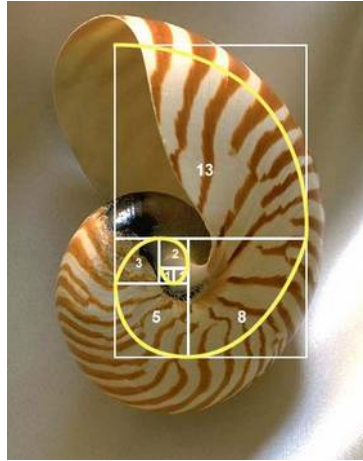
- Το «Πεντάγραμμο των Πυθαγορείων», δηλαδή το αστέρι που σχηματίζεται από τις διαγώνιους ενός κανονικού πενταγώνου, αποτελείται από χρυσά τρίγωνα και σχηματίζονται οι εξής λόγοι:



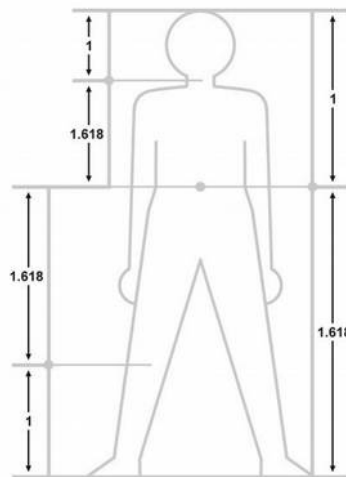
### Η Χρύση τομή στην φύση

Ο αριθμός φ συναντάται:

- στις σπείρες γαλαξιών, ορισμένων οστράκων και του DNA,



- στο λόγο των θηλυκών μελισσών προς τις αρσενικές σε μια κυψέλη,
- στις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, στον καρδιακό ρυθμό και στην απόσταση μεταξύ κύριων ζωτικών οργάνων.



### Η Χρυσή Τομή στην Τέχνη

Η Χρυσή Τομή δεν παρατηρείται μονάχα στην φύση, αλλά χρησιμοποιείται και στην τέχνη και την αρχιτεκτονική. Γενικότερα, υποστηρίζεται πως όσο περισσότερο πλησιάζουν οι αναλογίες προς τον αριθμό 1,618, τόσο πιο ωραίο είναι το δημιούργημα και τόσο πιο εύκολο για το μάτι και τον εγκέφαλο του ανθρώπου είναι να αποτυπώσουν όλες τις σημαντικές λεπτομέρειες μιας τέτοιας εικόνας.

Γνωστοί καλλιτέχνες όπως ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι (Leonardo Da Vinci), ο Σαλβαντόρ Νταλί (Salvador Dali) και ο Σάντρο Μποτιτσέλι (Sandro Botticelli) χρησιμοποίησαν στα έργα τους τη χρυσή τομή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα έργων τους είναι “Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου” και η “Μόνα Λίζα” του Λεονάρντο Ντα Βίντσι που θα αναλυθούν αργότερα στην εργασία, και ο πίνακας “The Creation of Adam”

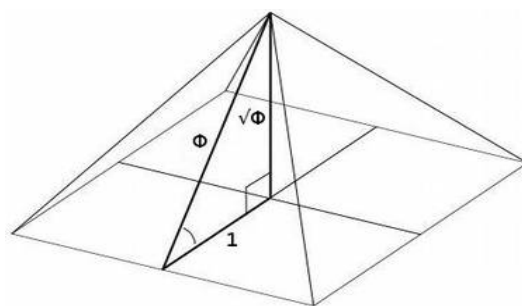
του Michelangelo, στον οποίο συναντιούνται σε πολλά σημεία χρυσές αναλογίες.



### Η χρυσή τομή στην αρχιτεκτονική

- Οι πυραμίδες

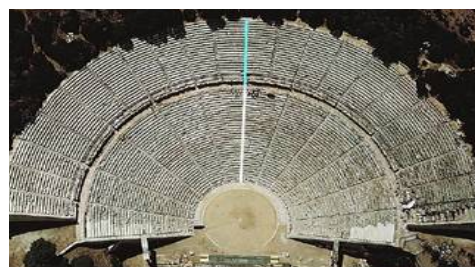
Η χρυσή πυραμίδα έχει κάθετη τομή από την κορυφή ένα ισοσκελές τρίγωνο, το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί από δύο ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 1 και  $\sqrt{\phi}$ . Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε ότι η υποτείνουσα είναι ίση με  $\phi$ .



Μία πυραμίδα κατασκευασμένη με την χρυσή τομή διαφέρει μόνο κατά 0.025% από τις πυραμίδες της Αιγύπτου.

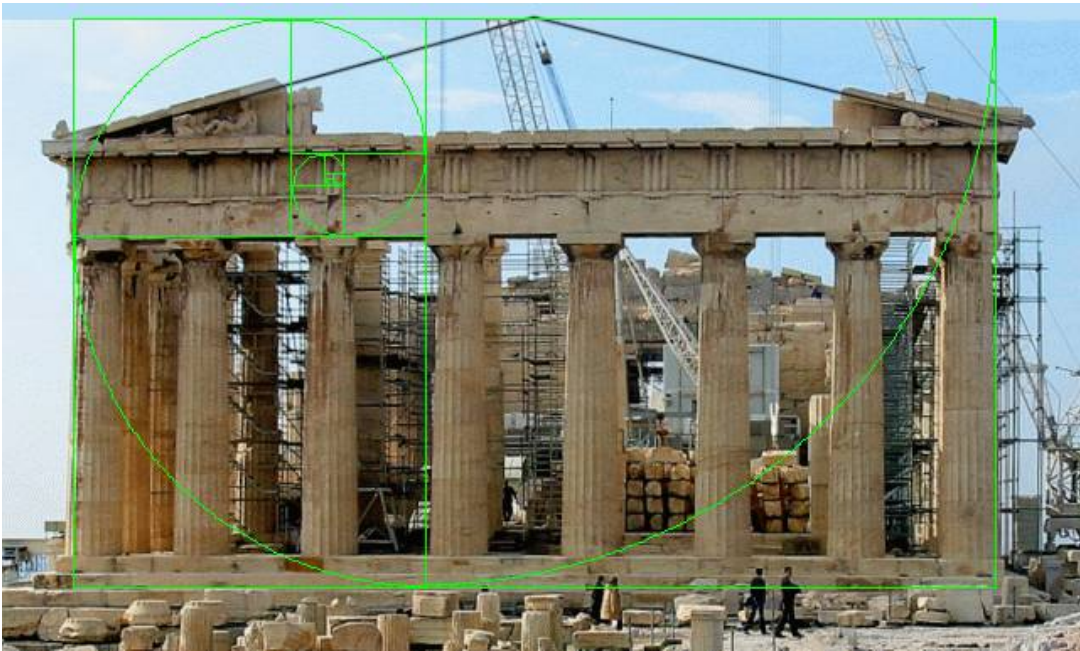
- Το αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου

Οι αρχαίοι Έλληνες πέτυχαν με τη χρήση του αριθμού  $\phi$  να χωρίσουν τα σκαλιά του θεάτρου της Επιδαύρου σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε το αισθητικό αποτέλεσμα να είναι άριστο.



- Ο Παρθενώνας

Ένα κλασικό παράδειγμα χρήσης της χρυσής τομής είναι ο Παρθενώνας, στον οποίο η χρυσή τομή εμφανίζεται παντού.



Η χρυσή τομή εμφανίζεται:

- στο εσωτερικό μήκος του ναού, που είναι 100 αττικά πόδια, δηλαδή 30,80 μέτρα. Μέσα σε αυτά τα νούμερα εκφράζεται η εξής αναλογία: ο αττικός πους (πόδι) είναι  $0,30803 = 1/(2\phi)$  μέτρα,
- στη διάμετρο του κάθε κίονα και τη μεταξύ τους απόσταση,
- στις αναλογίες των μεταξονίων,
- στη λέπτυνση του κίονα,
- στο περίγραμμα του εχίνου (το αμέσως κατώτερο σημείο το οποίο αποτελεί ομαλή μετάβαση από τον "άβακα" στον κυρίως κίονα),
- τη μορφή και τον αριθμό των τριγλύφων (δημιουργούνται όταν επάνω στην τετράπλευρη πλάκα ή επιφάνεια σκαλιστούν δύο μεσαία αυλάκια).



## ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ

Με τον όρο «Γραμμικό Σχέδιο» νοείται η σχεδίαση με όργανα, απλών ή σύνθετων γεωμετρικών μορφών, αρχιτεκτονικών σχεδίων κ.λπ.. Για παράδειγμα, γραμμικό σχέδιο χρησιμοποιείται για τη σχεδίαση

- αναλογιών μεταξύ των μερών ενός κτιρίου, ενός πύνακα, ενός γλυπτού,
- γεωμετρικών σχημάτων, όπως του κύκλου, του τριγώνου, του πενταγώνου, εξαγώνου κ.τ.λ.,
- γεωμετρικών κατασκευών, όπως η χρυσή τομή,
- μοτίβων στην τέχνη και θεμάτων που επαναλαμβάνονται με περιοδικότητα και
- της κλίμακας και της προοπτικής ενός σχεδίου.

Η χρήση των Μαθηματικών στο γραμμικό σχέδιο είναι αδιαμφισβήτητη: για την εκμάθηση του σχεδίου, εκείνο που αποτελεί προϋπόθεση δεν είναι το ταλέντο αλλά η επιμέλεια, η πειθαρχία και η τάξη και κάποιες γνώσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας και βασικών Μαθηματικών.

Για να διασφαλιστεί η σωστή αναλογία του σκίτσου χρησιμοποιούνται γεωμετρικά όργανα, όπως τα παρακάτω:

- Παραλληλογράφος
- Γνώμονας
- Μοιρογνωμόνιο
- Διαστημόμετρο
- Διαβήτη
- Στένσιλ



Με τη χρήση αυτών των οργάνων μπορεί κανείς να σχεδιάσει σκίτσα με κλίμακα, σημείο φυγής και προοπτική, τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω.

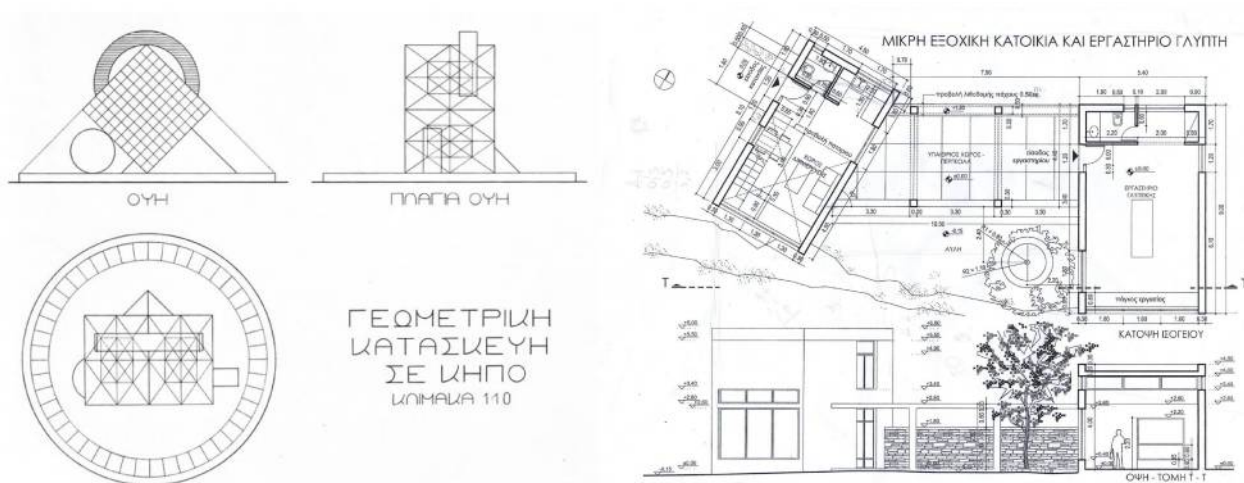
### Κλίμακα

Κλίμακα είναι ο σταθερός λόγος ενός μήκους πάνω σε γραφική, φωτογραφική ή χαρτογραφική αναπαράσταση προς το αντίστοιχο πραγματικό μήκος, ή ο λόγος της έκτασης που καταλαμβάνει κάτι σε μία παράσταση προς την πραγματική του έκταση.

Σκοπός της σχεδίασης υπό κλίμακα είναι να γίνει αναπαράσταση μεγάλων

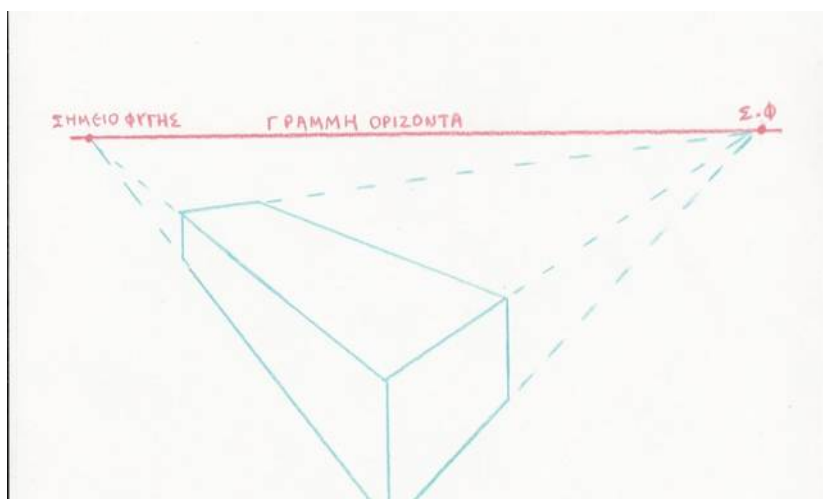
αντικειμένων σε μειωμένο μέγεθος, ώστε να χωράνε στο χαρτί σχεδίασης και να έχει κάποιος την άμεση εποπτεία τους.

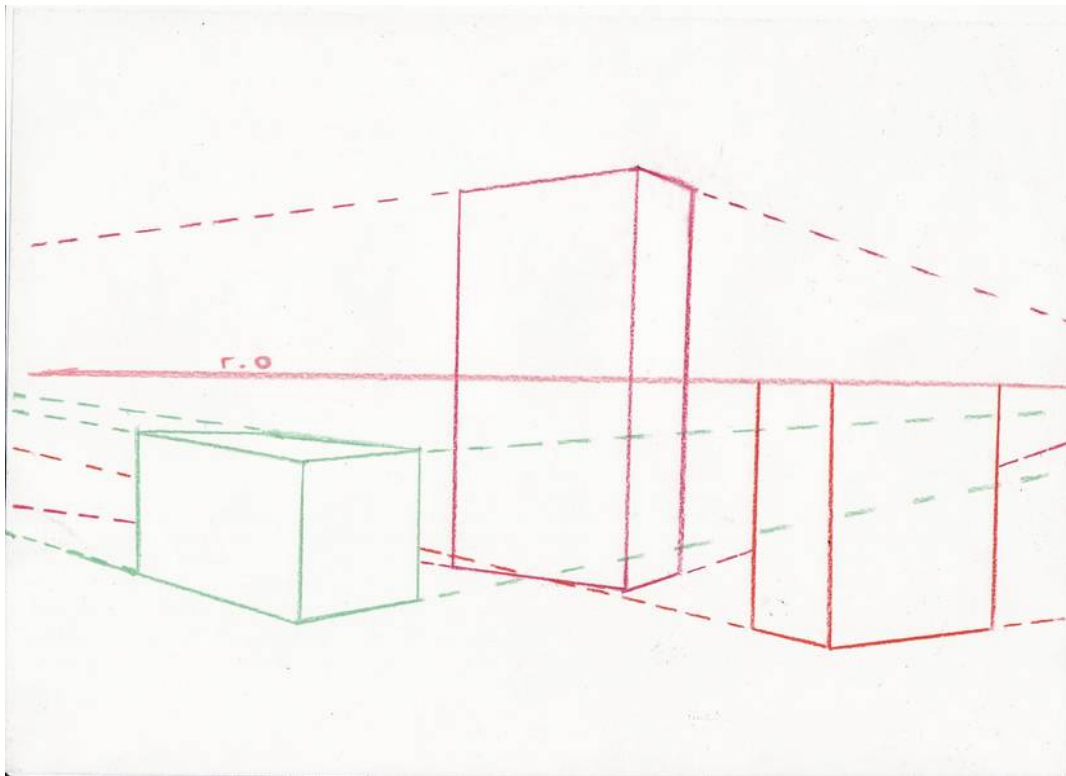
Για παράδειγμα σε ένα χάρτη που έχει σχεδιαστεί σε κλίμακα 1:10.000 (ένα προς δέκα χιλιάδες), το 1 εκατοστό του χάρτη αντιστοιχεί σε 10.000 εκατοστά στην πραγματικότητα. Πολεοδομικές κλίμακες, 1:200, 1:500, 1:1000, κ.ά. χρησιμοποιούνται κυρίως για τοπογραφικά, σχέδια οικιστικών συνόλων, χάρτες κ.λπ.. Αρχιτεκτονικές κλίμακες χρησιμοποιούνται κυρίως στη σχεδίαση κτηρίων, αρχιτεκτονικών λεπτομερειών, κατασκευαστικών λεπτομερειών και εγκαταστάσεων. Παραδείγματα σχεδίων με κλίμακα είναι τα παρακάτω:



### Σημείο φυγής και γραμμή του ορίζοντα

Σημείο φυγής είναι το σημείο στο οποίο συγκλίνουν οι νοητές γραμμές που δημιουργούν το βάθος ή την τρίτη διάσταση ώστε να αποδίδονται πιο ρεαλιστικά οι μορφές. Στα παρακάτω σχέδια φαίνονται η γραμμή του ορίζοντα και τα σημεία φυγής:





Για παράδειγμα, όταν βλέπουμε ένα ηλιοβασίλεμα βλέπουμε και την γραμμή του ορίζοντα. Αν αλλάξουμε το ύψος των ματιών μας, αν καθίσουμε χαμηλότερα, η γραμμή του ορίζοντα αλλάζει.

Η γραμμή του ορίζοντα και τα σημεία φυγής χρησιμοποιούνται πολύ στην προοπτική.

### Προοπτική

Είναι η τεχνική της αναπαράστασης του όγκου τρισδιάστατων αντικειμένων σε επίπεδη επιφάνεια σε συνάρτηση με τη θέση και την απόσταση του παρατηρητή. Στα προοπτικά σχέδια αποδίδεται η αίσθηση του βάθους. Η κλασική προοπτική θεμελιώθηκε στην Ιταλία κατά την Αναγέννηση.

Η ψευδαίσθηση του βάθους επιτυγχάνεται με δυο βασικά στοιχεία της τέχνης της ζωγραφικής, που είναι το χρώμα και το σχέδιο. Έτσι υπάρχει χρωματική προοπτική και γραμμική προοπτική.

- Η προοπτική του χρώματος λέγεται και ατμοσφαιρική προοπτική. Λέγεται έτσι διότι δίνει την εντύπωση πως στον πίνακα υπάρχει ατμόσφαιρα που ξεθωριάζει τα αντικείμενα όσο αυτά απομακρύνονται από το μάτι μας. Έτσι, για να φαίνεται ένα αντικείμενο πιο μακριά από ένα άλλο, χαμηλώνουμε τον τόνο του, δηλαδή το περνάμε με αμυδρό και αδύνατο χρώμα, ενώ αυτό που βρίσκεται πιο κοντά σε μας το φτιάχνουμε με έντονο χρώμα.
- Η γραμμική προοπτική επιτυγχάνεται με την σύγκλιση όλων των υπαρκτών και



νοητών γραμμών σε ένα σημείο που βρίσκεται στην νοητή γραμμή του ορίζοντα.

Η γοητεία των Μαθηματικών κατά την Αναγέννηση παρότρυνε τους ζωγράφους να συνειδητοποιήσουν τον ρόλο της Γεωμετρίας στην επίτευξη της προοπτικής, δίνοντας στα έργα τους το βάθος τρισδιάστατου χώρου, όπως στο παρακάτω έργο:

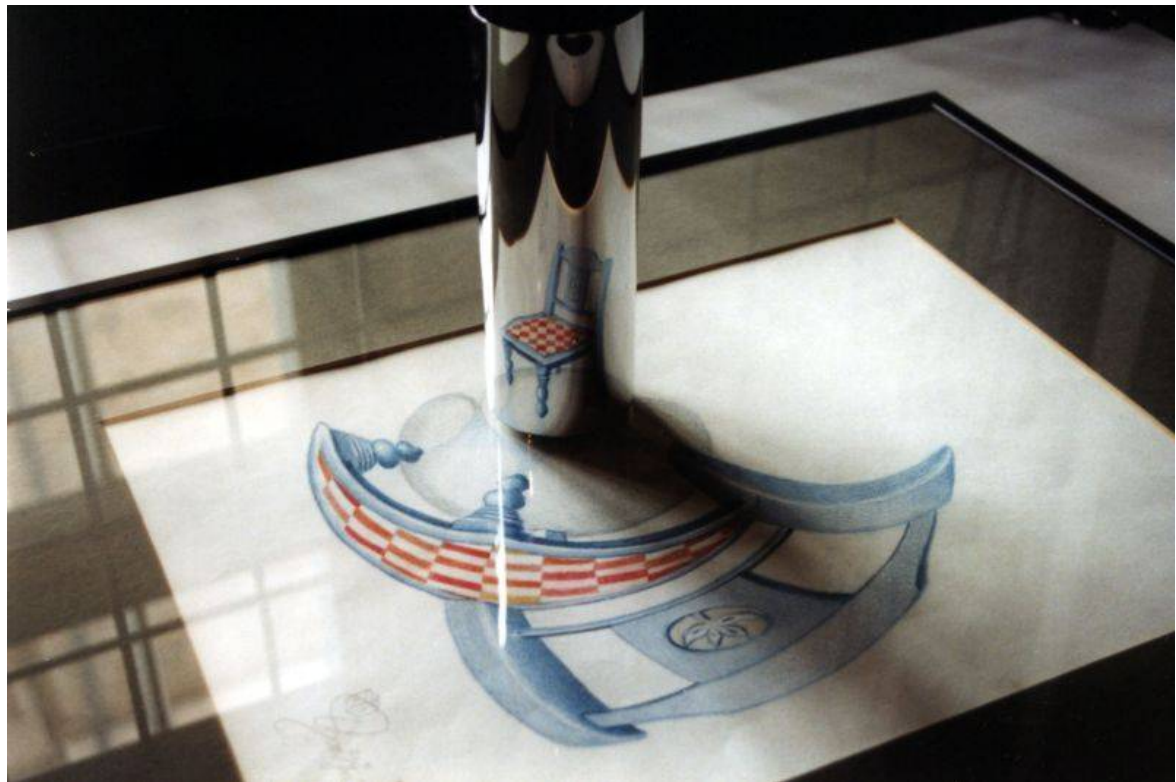
- *“The entrance to the Grand Canal”* - Canaletto (1730)

Αυτός ο πίνακας είναι ένα αριστούργημα προοπτικής: το κύριο σημείο φυγής βρίσκεται αν προεκταθεί η γραμμή που σχηματίζει η προκυμαία ως το βάθος του ορίζοντα.



### Παραμορφωτική προοπτική

Η τεχνική μαεστρία στην απόδοση της προοπτικής εντυπώσεως έφτασε στο ακρότατο της σημείο σε πίνακες αντικατοπτρισμού σαν τον παρακάτω. Η ίδια η εικόνα είναι τελείως παραμορφωμένη αλλά ξαναβρίσκει τη σωστή της όψη αν τη δούμε μέσα σε ένα κυλινδρικό καθρέφτη.



## ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΑ ΡΕΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στη συνέχεια, θα γίνει μια αναφορά στα σημαντικότερα καλλιτεχνικά ρεύματα που επηρέασαν την ιστορία της ζωγραφικής, δίνοντας έμφαση σε αυτά στα οποία είναι εμφανής η χρήση των Μαθηματικών. Επίσης, θα αναφερθούμε σε κάποιους από τους κύριους εκφραστές τους και κάποια χαρακτηριστικά έργα τους.

### Αναγεννησιακή Τέχνη

Πρόκειται για ένα ρεύμα το οποίο ξεκίνησε κατά τον 15ο αιώνα, στη Φλωρεντία. Τα έργα που το ακολουθούν έχουν θέματα κυρίως από τη Βίβλο, την ελληνική και ρωμαϊκή Μυθολογία, την Ιστορία, αλλά και τη σύγχρονη ζωή. Δίνεται έμφαση στη λεπτομέρεια και στο σχήμα, στο χρώμα και στην προοπτική, οπότε γίνεται χρήση των Μαθηματικών. Κάποιοι από τους κύριους εκφραστές είναι οι Botticelli, Michelangelo, Leonardo da Vinci, El Greco, Hieronymus Bosch, Jan van Eyck, Albrecht Dürer.

Δυο από τα πιο αντιπροσωπευτικά έργα αυτού του ρεύματος είναι τα εξής:

- “*Μόνα Λίζα*”, Λεονάρτο ντα Βίντσι, 1503-1514, που θα παρουσιαστεί αργότερα στην εργασία και
- “*Η γέννηση της Αφροδίτης*”, Σάντρο Μποτιτσέλι, 1486.



Ο Μποτιτσέλι φιλοτέχνησε την Αφροδίτη σύμφωνα με τις κλασικές αναλογίες των αρχαίων αγαλμάτων και έτσι το σώμα της θεάς παρουσιάζει χρυσές αναλογίες.

## Κλασικισμός

Είναι ένα καλλιτεχνικό ρεύμα που ξεκίνησε γύρω στα 1550 και θεωρεί ως ιδανικό την ελληνορωμαϊκή αρχαιότητα. Τα Μαθηματικά και συγκεκριμένα η Γεωμετρία χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό αφού επιδιώκεται η τελειότητα, η αρμονία, η ισορροπία, η συγκροτημένη κίνηση και τα αυστηρά περιγράμματα. Κάποιοι από τους κύριους εκφραστές είναι οι Nicolas Poussin, Annibale Carracci, Claude Lorrain.

Δυο από τα πιο αντιπροσωπευτικά έργα αυτού του ρεύματος είναι τα εξής:

- “*Λιμάνι στο ηλιοβασίλεμα*”, Λορραίν (Lorrain), 1639



Σε αυτόν τον πίνακα, η χρήση των Μαθηματικών είναι εμφανής: υπάρχει προοπτική, χρησιμοποιούνται ευθείες (π.χ. η γραμμή του ορίζοντα), στερεά (όπως τα κτήρια) αλλά και διάφορα σχήματα (π.χ. τρίγωνα για τα καράβια) κ.ά..

- “*Η επιβίβαση της βασίλισσας του Σαβά*”, Λορραίν (Lorrain), 1648



Στο συγκεκριμένο πίνακα χρησιμοποιείται Γεωμετρία ώστε να αποδοθούν οι κολώνες όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά. Επίσης χρησιμοποιείται η προοπτική.

## Μπαρόκ

Ξεκίνησε στις αρχές του 1600 στη Ρώμη, όπου χρησιμοποιήθηκε ως μέσο προπαγάνδας από την καθολική εκκλησία. Το μπαρόκ επιδιώκει να θαμπώσει με τον όγκο, τα πολύπλοκα σχέδια, τις έντονες αντιθέσεις - φωτισκιάσεις και τη φορτική πολυτέλεια της διακόσμησης, το στήσιμο του έργου και το θεατρικό ύφος. Παρόλο που τα χρώματα παίζουν τον σημαντικότερο ρόλο, πάλι υπάρχει η χρήση των Μαθηματικών με σχήματα, αναλογίες και προοπτική. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Rubens, Anton van Dyck, Caravaggio, Velázquez, Rembrandt, Pietro da Cortona.

Ένα αντιπροσωπευτικό έργο αυτού του ρεύματος είναι το “Οι δεσποινίδες επί των τιμών” του Βελάθκεθ (Velázquez), 1656. Σε αυτόν το πίνακα, παρατηρείται πάλι η χρήση των Μαθηματικών με γεωμετρικά σχήματα, κυρίως ορθογώνια (π.χ. στα κρεμασμένα κάδρα), με την τήρηση καθορισμένων αναλογιών και τέλος με την προοπτική.



## Ροκοκό

Γεννήθηκε στη Γαλλία στις αρχές του 1700. Τα έργα προσπαθούν να αποτυπώσουν ευχάριστες καθημερινές σκηνές με ειδυλλιακά τοπία και πρόσωπα από την αριστοκρατία σε διάφορες ασχολίες. Τα χρώματα είναι απαλά και διάφανα με τόνους παστέλ, χωρίς βαθιές φωτισκιάσεις. Όπως και στο μπαρόκ, έτσι και εδώ, βασικό ρόλο παίζει το χρώμα. Σε πολλά έργα του ρεύματος αυτού τα Μαθηματικά κυριαρχούν ώστε να αποδοθούν οι μορφές όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά και χρησιμοποιούνται στην προοπτική, στα γεωμετρικά σχήματα και στις αναλογίες. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Jean-Antoine Watteau, Boucher, Canaletto, Hogarth, Fragonard.

Ένα αντιπροσωπευτικό έργο είναι το

- “Λονδίνο, Άγιος Παύλος”, Καναλέττο (Canaletto), 1754



Στον παραπάνω πίνακα τα Μαθηματικά κυριαρχούν ώστε να αποδοθεί η μορφή του κτιρίου όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά.

### **Νεοκλασικισμός**

Γεννήθηκε το 1760 στη Ρώμη, ως αντίδραση στο μπαρόκ και στο ροκοκό και χαρακτηρίζεται ως απόπειρα επιστροφής στην αρχαιότητα. Εδώ, τα χρώματα δεν παίζουν τόσο μεγάλο ρόλο και έτσι η χρήση των Μαθηματικών στο σχέδιο είναι έντονη. Σε τέτοια έργα, παρατηρείται η υπεροχή του σχήματος αντί του χρώματος, τα κλειστά περιγράμματα, το ευδιάκριτο σχέδιο, ενώ τηρούνται αυστηρά οι κανόνες και οι αναλογίες. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Anton Raphael Mengs, Jacques-Louis David, Ingres.

Δύο έργα αντιπροσωπευτικά είναι τα εξής:

- “*Ναπολέον Βοναπάρτης, πρώτος ύπατος*”, Φρανσουά Ζεράρ, 1803



- “Σαββίνες”, David, 1785



Παρατηρείται ότι και στα δύο έργα τηρούνται αυστηρά οι αναλογίες και χρησιμοποιούνται σχήματα ώστε να αποδοθούν ρεαλιστικά οι ανθρώπινες μορφές και τα αντικείμενα.

### Ρομαντισμός

Πρόκειται για ένα καλλιτεχνικό ρεύμα που ξεκίνησε στη Γερμανία γύρω στο 1800. Χαρακτηρίζεται από έργα που έχουν πλούσια και παστέλ χρώματα. Στόχος τους είναι να δημιουργήσουν στον θεατή όμορφα συναισθήματα. Τα Μαθηματικά δεν παίζουν κύριο ρόλο αλλά και πάλι χρησιμοποιούνται για την τήρηση των αναλογιών και της αρμονίας, στην προοπτική και τα σχήματα. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Goya, Delacroix, Turner, David Friedric, Théodore Gericault.

Ένα γνωστό έργο είναι το “Οδοιπόρος στην ομίχλη”, Friedrich, 1818. Σε αυτόν τον πίνακα κύριο ρόλο παίζουν τα χρώματα, αν και τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται τόσο στα σχήματα όσο και στην προοπτική (η αίσθηση ότι το τοπίο που κοιτά η μορφή είναι απομακρυσμένο).



### Ρεαλισμός

Γεννήθηκε στη Γαλλία γύρω στα 1840. Είναι η ζωγραφική “της πραγματικότητας”. Στον ρεαλισμό, τα Μαθηματικά παίζουν πρωταγωνιστικό ρόλο, αφού οι ζωγράφοι προσπαθούν να αποτυπώσουν ό,τι ακριβώς βλέπουν. Παίρνουν μετρήσεις, χρησιμοποιούν σχήματα και τηρούν πιστά τις αναλογίες. Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του ρεαλισμού είχε και η εφεύρεση της φωτογραφικής μηχανής. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Gustave Courbet, Édouard Manet, Edgar Degas,

Daumier, Millet.

Δύο αντιπροσωπευτικά έργα είναι τα εξής:

- “*New Orleans Cotton Exchange*”, Degas, 1873



Σε αυτόν τον πίνακα παρατηρείται η χρήση των σχημάτων (για παράδειγμα τα παράθυρα είναι ορθογώνια), της προοπτικής και των φυσικών αναλογιών.

- “*Καλημέρα κύριε Courbet*”, Courbet, 1849



Σε αυτόν τον πίνακα παρατηρείται πάλι η χρήση της προοπτικής, των γεωμετρικών σχημάτων, ευθειών, καμπύλων αλλά και η τήρηση των φυσικών αναλογιών ώστε να αποδοθούν όλα με ρεαλισμό.

### **Νατουραλισμός**

Ξεκίνησε στη Γαλλία γύρω στα 1860. Είναι ένα είδος ρεαλιστικής ζωγραφικής, με θέμα την απεικόνιση της φύσης. Έχει περιγραφικό χαρακτήρα και καταγράφει τα πράγματα πιστά, με συνθέσεις και χρωματικούς τόνους καλοδουλεμένους. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Théodore Rousseau και Camille Corot.

Δύο από τα πιο αντιπροσωπευτικά έργα αυτού του ρεύματος είναι τα:



- “Λιβάδι με δέντρα”, Corot, 1870



- “Mare et Lisiere de Bois”, Rousseau, 1865



Στους παραπάνω πίνακες παρατηρείται η χρήση των Μαθηματικών στην τήρηση των αναλογιών αλλά και στην προοπτική. Τα γεωμετρικά σχήματα, οι ευθείες κ.τ.λ. έχουν κύριο ρόλο στην ρεαλιστική απεικόνιση του τοπίου.

### Συμβολισμός

Εμφανίστηκε γύρω στα 1885. Στα έργα αυτά κυριαρχεί η σύνθεση και η προσπάθεια της έκφρασης ιδεών μέσω σχημάτων. Μέσα από τα μάτια της ψυχής και της φαντασίας ζωγραφίζουν θέματα με συμβατικό χαρακτήρα. Από τους κύριους εκφραστές είναι: Gustave Moreau, Puvis de Chavannes, Klimt, Giorgio de Chirico. Ένα



αντιπροσωπευτικό έργο είναι το “Ο φτωχός ψαράς” του Puvis de Chavannes, 1881. Τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται για την προοπτική (γραμμή του ορίζοντα, ιδέα του βάθους) και για την τήρηση των αναλογιών. Με τα γεωμετρικά σχήματα

δημιουργούνται μορφές, που εκφράζουν τις ιδέες των ζωγράφων.

### **Αρ Νουβώ**

Δημιουργήθηκε γύρω στα 1890. Ένα βασικό χαρακτηριστικό γνώρισμα των έργων είναι η επιτήδευση της μορφής. Οι καλλιτέχνες χρησιμοποιούν συχνά διακοσμητικά σχήματα, μοτίβα λουλουδιών, αραβικά και γραμμικά ελικοειδή σχήματα. Η συμβολή των Μαθηματικών, παρατηρείται στα γεωμετρικά σχήματα και στην τήρηση των φυσικών αναλογιών. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Alfons Mucha, Gustav Klimt.

Γνωστά έργα είναι τα:

- “*Τα φρούτα*”, Mucha (1897)



Στον παραπάνω πίνακα χρησιμοποιούνται γεωμετρικά σχήματα όπως κύκλοι και καμπύλες για να δημιουργηθούν διάφορα διακοσμητικά στοιχεία, όπως τα λουλούδια που φορά η γυναίκα στα μαλλιά, τα φρούτα που κρατάει κ.ά.

- “*Tree of Life*” Gustav Klimt (1909)



Στον συγκεκριμένο πίνακα χρησιμοποιείται έντονα η Γεωμετρία, με κύκλους και

ελικοειδή σχήματα προκειμένου να δημιουργηθούν διακοσμητικά στοιχεία στον πίνακα και να σχηματιστούν τα απεικονιζόμενα κλαδιά του δέντρου με μοναδικό τρόπο.

## Εξπρεσιονισμός

Καλλιτεχνικό κίνημα που αναπτύχθηκε το 1900. Πρόκειται για μια τέχνη που εκφράζει τις εσωτερικές αναζητήσεις και τις ψυχικές αγωνίες των καλλιτεχνών μέσα από έντονα χρώματα, επιθετικές φόρμες, περίπλοκες συνθέσεις και την παραμόρφωση του ανθρώπινου σώματος και του προσώπου. Παρόλα αυτά, γίνεται ακόμη χρήση των Μαθηματικών στα βασικά γεωμετρικά σχήματα, την προοπτική κ.τ.λ.. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Wassily Kandinsky, Edvard Munch, Kirchner, Georges Rouault.

Παραδείγματα έργων εξπρεσιονισμού:

- “*Η κραυγή*”, Munch, 1893



Σε αυτόν τον διάσημο πίνακα, ο ζωγράφος χρησιμοποιεί την προοπτική για να φαίνεται ότι υπάρχει στεριά στο βάθος, ότι η μορφή στέκεται σε γέφυρα κ.τ.λ.. Ακόμη με τον τρόπο εφαρμογής του χρώματος δημιουργούνται καμπύλες, οι οποίες συμβάλλουν στην αποτύπωση της ψυχικής αγωνίας του καλλιτέχνη.

- “*Stable*”, Φραντς Μαρκ, 1913



Σε αυτόν τον πίνακα είναι πολύ έντονη η χρήση των γεωμετρικών σχημάτων (ευθείες, τεθλασμένες γραμμές, τρίγωνα, καμπύλες κ.λπ.).

### **Κυβισμός (cubism)**

Ο κυβισμός είναι ένα καλλιτεχνικό ρεύμα της ζωγραφικής και της γλυπτικής στην Ευρώπη του 20ου αιώνα και συσχετίζεται άμεσα με τα Μαθηματικά διότι στα έργα τέχνης κυβιστών τα αντικείμενα χωρίζονται, αναλύονται, και συνθέτονται ξανά σε μια αφηρημένη μορφή – αντί οι καλλιτέχνες να αποδίδουν τα αντικείμενα από μια συγκεκριμένη γωνία – βλέποντας έτσι ταυτόχρονα πολλές διαφορετικές διαστάσεις ή όψεις των αντικειμένων. Η απεικόνιση της τρίτης διάστασης καταργείται, καθώς επίσης η ψευδαίσθηση του βάθους αμφισβητείται. Κύριοι εκπρόσωποι του κυβισμού είναι ο Πάμπλο Πικάσσο (Pablo Picasso), Ζωρζ Μπράκ (Georges Braque), Χουάν Γκρί (Juan Gris) και Φερνάν Λεζέ (Fernand Leger).

Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- “*Glass on a Table*”, Georges Braque, 1909–10



- “*Violin and grapes*”, Pablo Picasso



- “*Composition*”, Pablo Picasso



## Κονστρουκτιβισμός

Στις αρχές του 20ου αιώνα αναπτύχθηκαν τα κυριότερα ρεύματα που έχουν σχέση με τη Γεωμετρία όπως ο κονστρουκτιβισμός, ο οποίος είναι ένα καλλιτεχνικό ρεύμα που αναπτύχθηκε από το 1913 ως το 1930 στη Ρωσία και ιδρύθηκε από τον Βλαντιμίρ Τάτλιν. Σε μια από τις διακηρύξεις του κινήματος αναφέρεται πως η τέχνη «κατασκευάζεται» και ένα από τα συνθήματα ήταν το «Η τέχνη στη Ζωή».

Οι ρίζες του κινήματος μπορούν να αναζητηθούν στο κίνημα του Κυβισμού και σε κάποια από τα έργα του Picasso κυρίως. Κύριο χαρακτηριστικό του κινήματος του κονστρουκτιβισμού αποτελούν οι απολύτως αφηρημένες κατασκευές (construction σημαίνει κατασκευή). Απουσιάζουν οι συμβατικές αναπαραστάσεις αντικειμένων ενώ δίνεται έμφαση στην απεικόνιση γεωμετρικών μορφών. Η απόδοση των θεμάτων είναι τις περισσότερες φορές μινιμαλιστική και συχνά με διάθεση πειραματισμού. Οι κονστρουκτιβιστές θαύμαζαν τις μηχανές και την τεχνολογία της εποχής σε βαθμό που χρησιμοποιούσαν πολλά βιομηχανικά υλικά (πλαστικό, γυαλί ή σίδηρο) στην κατασκευή των έργων τους. Σημαντικοί εκπρόσωποι είναι οι Βλαντιμίρ Τάτλιν, Καζιμίρ Μαλέβιτς, Ελ Λισίτσκι, Αλεξάντερ Ροντσένκο, Όλγα Ροζάνοβα κ.ά..

Χαρακτηριστικά παραδείγματα έργων είναι τα:

- “*Μαύρο τετράγωνο*”, Καζιμίρ Μαλέβιτς, 1915



Βασικό χαρακτηριστικό της ζωγραφικής του παραπάνω καλλιτέχνη είναι η χρήση του μαύρου, του άσπρου και των τριών βασικών χρωμάτων με τα οποία χρωματίζονται τα μοναδικά γεωμετρικά σχήματα, το τετράγωνο και ορθογώνιο.

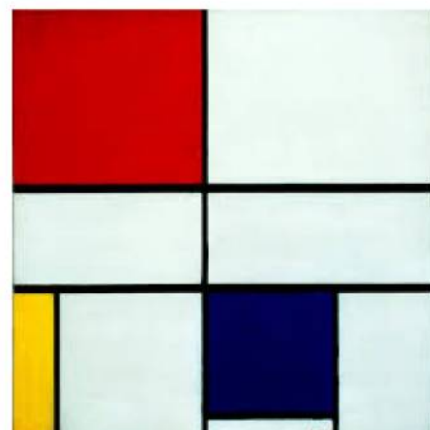
- “*Νικήστε τους λευκούς με την κόκκινη σφήνα*”, Ελ Λισίτσκι, 1925



Εδώ είναι εμφανής η χρήση των γεωμετρικών σχημάτων (τρίγωνο, κύκλος, τετράγωνο κ.λπ.) και η αλληλοεπικάλυψή τους δίνει ένα αισθητικά ωραίο αποτέλεσμα.

### Νεοπλαστικισμός

Την ίδια περίοδο αναπτύχθηκε και ο Νεοπλαστικισμός στην Ολλανδία (1917-1920). Βασικό χαρακτηριστικό του είναι η αφαίρεση, ώστε να χρησιμοποιούνται θεμελιώδεις φόρμες και σχήματα, κάθετες και οριζόντιες γραμμές ταυτόχρονα με τη χρήση σχεδόν αποκλειστικά βασικών χρωμάτων (κόκκινο, μπλε, κίτρινο, λευκό και μαύρο), όπως διαφαίνεται και στον πίνακα *"Painting Wallpaper 002"* του Πητ Μοντριάν.



### Ντανταϊσμός

Καλλιτεχνικό κίνημα που εμφανίστηκε κατά τον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο, γύρω στα 1915, στην Ελβετία. Γενικά εκφράζει το παράλογο, το φανταστικό, την επίθεση εναντίον κάθε κατεστημένου της εποχής. Η χρήση των Μαθηματικών γίνεται ανάλογα με το έργο τέχνης. Συνήθως, τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται με γεωμετρικά σχήματα, καμπύλες, προοπτική κ.τ.λ.. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Francis Picabia, Marcel Janco, Jean Arp, Hans Richter, Marcel Duchamp.

Ένα αντιπροσωπευτικό έργο αυτού του κινήματος είναι *"Η Μόνα Λίζα με μουστάκι"* του Duchamp (1919). Σε αυτόν τον πίνακα παρατηρείται ό,τι και σε αυτόν του Leonardo Da Vinci. Αυτό που τον διαφοροποιεί είναι η χρήση διαφορετικών

χρωμάτων αλλά και το γεγονός ότι η Μόνα Λίζα έχει μουστάκι.



### Υπερρεαλισμός ή Σουρεαλισμός

Γεννήθηκε γύρω στο 1920 στο Παρίσι ως αντίδραση στην καταστροφικότητα του Ντανταϊσμού. Πραγματικά και ρεαλιστικά στοιχεία συνυπάρχουν σε συνθέσεις που είναι πέρα από τη λογική και τη φαντασία. Παρατηρείται η χρήση των Μαθηματικών σε γεωμετρικά σχήματα, καμπύλες και προοπτική. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Giorgio de Chirico, Salvador Dalí, Joan Miró.

Δύο γνωστά έργα του κινήματος είναι τα εξής:

- “*Έκτορας και Ανδρομάχη*”, De Chirico, 1917



Για την υλοποίηση του έργου θα πρέπει να προηγήθηκαν μετρήσεις προκειμένου να υπάρχει η σωστή προοπτική και αναλογίες. Ακόμη, φαίνεται η χρήση γεωμετρικών σχημάτων, καμπυλών και ευθειών για να δημιουργηθούν οι μορφές.



- “The garden”, Miro, 1925



Στους πίνακες του Καταλανού Joan Miró υπάρχει έντονο το γεωμετρικό στοιχείο. Κύκλοι, τρίγωνα, τετράπλευρα και καμπύλες αλλάζουν χρώματα και εντυπωσιάζουν το θεατή.

### **Μπαουχάους**

Δημιουργήθηκε γύρω στα 1925 στο Βερολίνο. Βασικά χαρακτηριστικά του Μπαουχάους ήταν η απλότητα, με ιδιαίτερη έμφαση στις γεωμετρικές φόρμες και στο χρώμα. Στο συγκεκριμένο ρεύμα υπάρχει έντονη χρήση γεωμετρικών σχημάτων, καμπυλών, ευθειών κ.τ.λ.. Από τους κύριους εκφραστές είναι οι Paul Klee, Wassily Kandinsky.

Βασικά έργα του ρεύματος αυτού είναι τα:

- “Black and Violet”, Kandinsky, 1923



Πολλά έργα του Kandinsky έχουν γεωμετρικά στοιχεία. «Η Γεωμετρία μετατρέπεται σε κώδικα, ο οποίος με τη σειρά του μετατρέπεται σε μαγεία», έγραψε. Στο παραπάνω έργο, παρατηρείται η χρήση της Γεωμετρίας, καθώς όλο το έργο αποτελείται από γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα, κύκλοι, τετράγωνα, ορθογώνια,

κυρτά σχήματα, ημικύκλια, διάσπαρτα ευθύγραμμα τμήματα, καμπύλες κ.τ.λ.).

- “*Black Columns in a Landscape*”, Paul Klee, 1987



Όπως και στο προηγούμενο έργο τα γεωμετρικά σχήματα έχουν πρωταρχικό ρόλο. Παρατηρούνται τρίγωνα, τετράγωνα, ημικύκλια, καμπύλες κ.ά..

### **Ποπ Αρτ**

Αναπτύχθηκε γύρω στα 1950. Χαρακτηριστικά γνωρίζει άνθηση μαζί με την έξαρση της ποπ μουσικής. Τα έργα δανείζονται θέματα από κόμικς και διαφημίσεις, συνοδευόμενα από αυθορμητισμό και ανάλαφρη διάθεση. Τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται για την δημιουργία μορφών αλλά και των διάφορων περιγραμμάτων με ευθείες, σχήματα και καμπύλες. Ο κυριότερος εκφραστής είναι ο Andy Warhol και ένα γνωστό του έργο είναι το “*Elvis Presley*”. Στον πίνακα αυτό τετράγωνα και ευθείες σχηματίζουν περιγράμματα σαν κάδρα. Η κλίμακα χρησιμοποιείται ώστε να τηρηθούν οι φυσικές αναλογίες των προσώπων.



## ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΕΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΑΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥΣ

Παρακάτω θα σας παρουσιάσουμε κάποια βιογραφικά στοιχεία και μερικά σημαντικά έργα καλλιτεχνών που χρησιμοποίησαν Μαθηματικά στα έργα τους.

### Λεονάρντο ντα Βίντσι

Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι (15 Απριλίου 1452 - 2 Μαΐου 1519) έζησε την περίοδο της Αναγέννησης και ήταν Ιταλός αρχιτέκτονας, ζωγράφος, γλύπτης, μουσικός, εφευρέτης, μηχανικός, ανατόμος, γεωμέτρης, γιατρός και παλαιοντολόγος. Εκτός από τα παραπάνω ενδιαφερόταν για την αστρονομία, τη βοτανική, τη συγγραφή, την ιστορία και τη χαρτογραφία.



Θεωρείται χαρακτηριστική μορφή του αναγεννησιακού ουμανιστή και επιστήμονα, του αναγεννησιακού καλλιτέχνη Homo Universalis και μια ιδιοφυής προσωπικότητα. Μεταξύ των πιο διάσημων έργων του συγκαταλέγονται η Μόνα Λίζα και ο Μυστικός Δείπνος.

Ο Ντα Βίντσι πίστευε στην ενότητα των διαφόρων γνωστικών πεδίων. Η γεωγραφία, η ανθρώπινη ανατομία, η αρχιτεκτονική και τα αφηρημένα Μαθηματικά συνδέονταν μεταξύ τους, κι αν κάποιος είχε σπουδάσει ένα από αυτά τα αντικείμενα, θα μπορούσε να ασχοληθεί και με τα υπόλοιπα.

### Η ζωή του

Ο Ντα Βίντσι γεννήθηκε στο Βίντσι της Ιταλίας στις 15 Απριλίου 1452. Το πλήρες όνομά του ήταν Leonardo di ser Piero da Vinci, αν και υπέγραφε τα έργα του ως «Leonardo» ή «Io, Leonardo» («Εγώ, ο Λεονάρντο»). Ήταν καρπός του έρωτα του Πιέρο ντα Βίντσι και της Κατερίνας, της οποίας δεν γνωρίζουμε την πλήρη ταυτότητα. Οι δυο τους δεν έγιναν ποτέ νόμιμο ζευγάρι.

Σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών εισήλθε ως μαθητευόμενος στο εργαστήριο του φλωρεντινού ζωγράφου και αρχιτέκτονα Αντρέα ντελ Βερρόκκιο στη Φλωρεντία – Ιταλός ζωγράφος, γλύπτης και χρυσοχόος, ο οποίος εργάστηκε στην Αυλή του Λορέντσο των Μεδίκων (Lorenzo de' Medici) στην Φλωρεντία της πρώιμης Αναγέννησης – που μάλλον ήταν γνωστός του πατέρα του Λεονάρντο, διότι του είχε δώσει νομικές συμβουλές.



Αντρέα ντελ Βερρόκκιο, 1435 – 1488

Οι πρώτες φιλοσοφικές και επιστημονικές γνώσεις του, αποκτώνται από την συζήτηση με τους καλλιεργημένους ανθρώπους οι οποίοι επισκέπτονταν τον Βερρόκκιο στο εργαστήριό του. Σε λιγότερο από έξι χρόνια θα πρέπει από μαθητής να έγινε δάσκαλος, διότι ήδη από το 1472 ήταν καταγεγραμμένος ως δάσκαλος στη συντεχνία των ζωγράφων. Το πιο πρώιμο γνωστό έργο του αποτελεί το επονομαζόμενο “*Σχέδιο τοπίου στην κοιλάδα του Άρνου*”, το οποίο βρίσκεται σήμερα στην Πινακοθήκη Ουφίτσι της Φλωρεντίας.

Όταν έφυγε από το εργαστήριο του Βερρόκκιο το 1480, και για τα επόμενα δύο χρόνια έπαιρνε παραγγελίες από άρχοντες του Μιλάνου, οπότε το 1482, μετοίκησε στο Μιλάνο. Εκεί πρόσφερε τις υπηρεσίες του ως μηχανικός, ζωγράφος και γλύπτης στον ηγεμόνα του Μιλάνου, Λουδοβίκο Σφόρτσα. Το ταξίδι του στο Μιλάνο πρέπει να δικαιολογηθεί ως μια απόπειρα αναζήτησης καλλιτεχνικών και επαγγελματικών ευκαιριών. Εκεί διέθετε δικό του εργαστήριο με βοηθούς και δώδεκα μαθητές.



Λουδοβίκος Σφόρτσα,  
3/08/1452 – 27/05/1508

Την ίδια περίπου περίοδο εργάστηκε ως σύμβουλος αρχιτέκτονα στον καθεδρικό ναό του Μιλάνου, ενώ το διάστημα 1495-1498, μετά από παραγγελία του Λουδοβίκου Σφόρτσα ζωγραφίζει τον “*Μυστικό Δείπνο*” στο μοναστήρι της Σάντα Μαρία ντελ Γκράτσια και, μεταξύ 1483 και 1508, την “*Παναγία των Βράχων*” ύστερα από παραγγελία της Αδελφότητας της Άμωμης Σύλληψης του Μιλάνου.

Ως καλλιτέχνης της αυλής, ο Λεονάρντο δέχθηκε αρκετές παραγγελίες για έργα που τις περισσότερες φορές, ωστόσο, άφηνε ημιτελή. Επίσης, οργάνωνε τις γιορτές της αυλής των Σφόρτσα, στις οποίες ήταν ταυτόχρονα ενδυματολόγος και σκηνοθέτης.

Το καλοκαίρι του 1490 έλαβε υπό την προστασία του ένα δεκάχρονο αγόρι ονόματι Τζαν Τζάκομο Καπρότι ή Σαλαΐνο, γιο αγρότη, που πιθανώς τον πούλησε στον Λεονάρντο ως μοντέλο-υπηρέτη με τη ελπίδα μιας καλύτερης ζωής. Μάλλον ο χαρακτήρας της μεταξύ τους σχέσης ήταν πατέρα-γιου, καθώς ο ντα Βίντσι σημείωσε τον απείθαρχο χαρακτήρα του, αλλά και τα δώρα που του έκανε.

Το καλοκαίρι του 1493 τον επισκέπτεται η μητέρα του Κατερίνα, η οποία επιθυμούσε μετά τον πρόσφατο θάνατο του συζύγου της να περάσει το υπόλοιπο του βίου της μέχρι τον θάνατό της, κοντά στον γιο της.

Το 1499, ο Λουδοβίκος Σφόρτσα ηττήθηκε από τους Γάλλους και ο Λεονάρντο ντα Βίντσι, έπειτα από λίγες περιπλανήσεις, μεταβαίνει στη Βενετία. Εκεί καταλαμβάνει τη θέση του στρατιωτικού συμβούλου του Καίσαρα Βοργία το 1502. Στα πλαίσια των καθηκόντων του, ταξιδεύει στην κεντρική και άνω Ιταλία σχεδιάζοντας στρατιωτικούς χάρτες, επιβλέποντας οχυρωματικά έργα και φροντίζοντας για το αμυντικό σύστημα των στρατευμάτων για λογαριασμό του Καίσαρα Βοργία.

Το 1504 επιστρέφει στη Φλωρεντία όπου αναλαμβάνει μία σειρά πινάκων, τους περισσότερους από τους οποίους αφήνει ημιτελείς. Τότε είναι που ξεκινά η σύνθεση της διάσημης “*Μόνας Λίζας*”, μία παραγγελία του Φραντσέσκο ντελ Τζοκόνο, Φλωρεντικού εμπόρου, που παρήγγειλε πορτραίτο της γυναίκας του. Ο πίνακας ολοκληρώνεται λίγο πριν πεθάνει, το 1519.

Κάπου μεταξύ στο 1503 και 1504, λαμβάνει τα δυσάρεστα νέα για το χαμό του θείου του, Φραντσέσκο. Ο Λεονάρντο είναι ο μοναδικός κληρονόμος της περιουσίας του, σύμφωνα με επιθυμία του Φραντσέσκο, γεγονός για το οποίο συγκρούεται με τα ετεροθαλή αδέρφια του για ένα χρόνο.

Περνώντας την περίοδο 1508-1512 κυρίως στο Μιλάνο, βρίσκει έναν άλλο προστάτη αυτή τη φορά, τον κυβερνήτη της πόλης Σαρλ ντ’ Αμπουάζ. Έχοντας γίνει πολύ γνωστός καλλιτέχνης ως τότε, αναλαμβάνει αρκετές παραγγελίες, ενώ παράλληλα

συνεχίζει τη μελέτη του στην ανατομία και ασχολείται με την αρχιτεκτονική. Με το θάνατο του Σαρλ ντ' Αμπρουάζ, καταφεύγει στη Ρώμη και μπαίνει κάτω από την ομπρέλα του Πάπα Λέοντα Ι', Τζουλιάνο των Μεδίκων. Εκεί ασχολείται περισσότερο με επιστημονικά πειράματα, ενώ προετοιμάζει το σχέδιο για την αποξήρανση των ελών της περιοχής και το έργο για το λιμάνι Τσιβιταβέκια.

Το 1516 δέχεται την πρόσκληση του βασιλιά της Γαλλίας Φραγκίσκου Α'. Αφού ταξίδεψε τρεις μήνες με εύθραυστη υγεία εγκαταστάθηκε στο παλάτι του Φραγκίσκου Α' στην περιοχή Αμπρουάζ (Amboise) της Γαλλίας. Το ισόγειο έγινε το εργαστήριό του και ο πρώτος και δεύτερος όροφος στέγασαν τον Λεονάρντο και την ακολουθία του. Ο Φραγκίσκος του έδωσε αμοιβή χιλίων χρυσών σκούδων για τις υπηρεσίες του. Στην διάρκεια της παραμονής του εκεί περιορίστηκε στην ταξινόμηση των χειρογράφων και σημειώσεών του και δεν ζωγράφιζε. Άλλωστε δεν σώθηκε κάποιο έργο του από εκείνη την περίοδο, ενώ κατάρτισε σχέδια για το νέο παλάτι που επιθυμούσε να χτίσει ο Φραγκίσκος Α'.



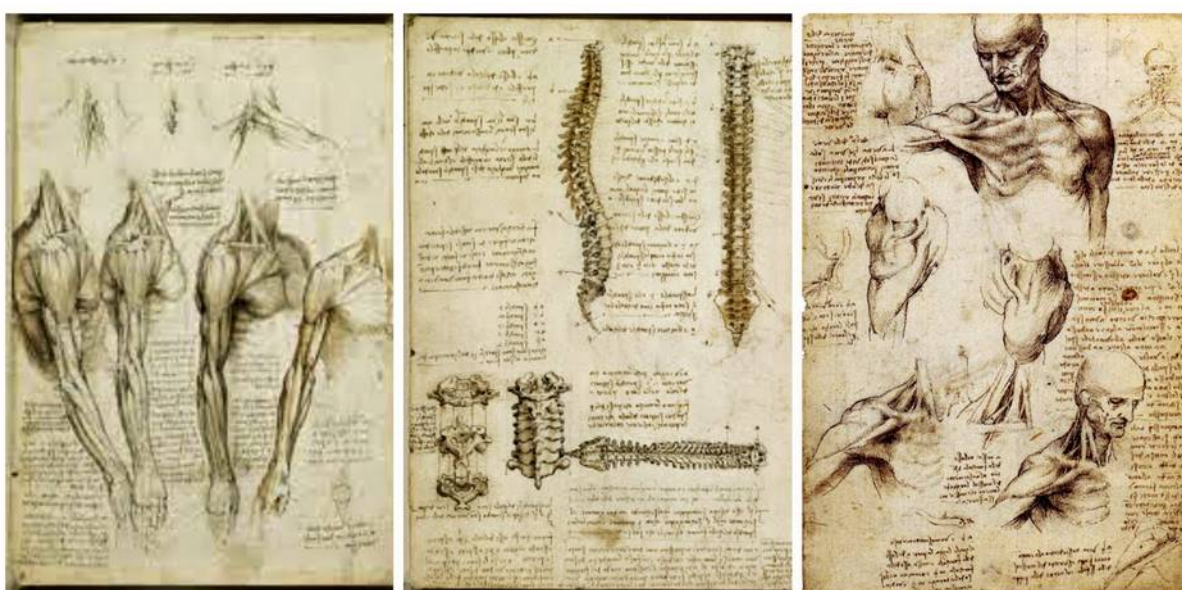
Φραγκίσκος Α',  
12/09/1494 -  
31/05/1547

Στις 23 Απριλίου του 1519 συντάσσει τη διαθήκη του, αφήνοντας στους ετεροθαλείς αδελφούς του 400 χρυσά σκούδα και τη μικρή περιουσία του, που κάποτε ανήκε στο θείο του, Φραντσέσκο. Πέθανε στις 2 Μαΐου 1519 στο Κλου (Cloux) της Γαλλίας, κοντά στον βασιλικό πύργο του Αμπρουάζ. Σύμφωνα με προσωπική του επιθυμία, τάφηκε στην εκκλησία Sainte Florentine, στο Αμπρουάζ. Ο τάφος του συλήθηκε την περίοδο της Γαλλικής Επανάστασης, ενώ υπό τις οδηγίες του Ναπολέοντα κατεδαφίστηκε και τα θαμμένα εκεί οστά του διασκορπίστηκαν.

Στη δεκαετία του 1860, ένας ποιητής ονόματι Arsene Houssaye πραγματοποίησε ανασκαφές και βρήκε ένα τάφο με σκελετό, δίπλα στον οποίο υπήρχε η επιγραφή EO DUC VINC, που μπορεί να σημαίνει LEONARDUS VINCIUS. Την άνοιξη του 2016 οι Ιταλοί ιστορικοί Αλεσάντρο Βετσόζι και την Ανίζε Σαμπάτι υποστήριξαν βάσει εγγράφων και όχι γενετικού υλικού (αφού παιδιά ο Λεονάρντο δεν απέκτησε ποτέ) πως δεκάδες σύγχρονοι Ιταλοί είναι μακρινοί συγγενείς του.

## Οι μαθηματικές ικανότητές του

Ήταν γνώστης στοιχειώδους Γεωμετρίας ενώ δεν ήταν ακριβής στην αριθμητική του, γεγονός που έκανε ορισμένους μελετητές του έργου του να ισχυριστούν πως δεν ήταν αληθινός επιστήμονας. Ωστόσο είχε γεμάτα σημειωματάρια από γεωμετρικά σχήματα, αριθμητικά σκαριφήματα, υπολογισμούς και μαθηματικά σύμβολα. Υπογραμμίζοντας την σημασία των μαθηματικών γνώσεων έλεγε πως καμία ανθρώπινη έρευνα δεν μπορεί να ονομαστεί αληθινή επιστήμη αν δεν περνά μέσα από μαθηματικές αποδείξεις. Η όποια ανεπάρκειά του στα Μαθηματικά τον εμπόδιζε να κατανοήσει πλήρως τη θεωρητική βάση της μηχανικής, αν και σχεδίαζε δεκάδες μηχανές.



Σημειώσεις του Ντα Βίντσι

## Τα έργα του

Παρακάτω σας παρουσιάζουμε κάποια από τα πιο διάσημα έργα του Ιταλού καλλιτέχνη. Ανάμεσα τους η “Μόνα Λίζα”, ο “Άνθρωπος του Βιτρούβιου”, ο “Μυστικός Δείπνος” κ.ά.. Κατά την διάρκεια της κατασκευής πολλών από αυτά, ο Ντα Βίντσι βασίστηκε στα Μαθηματικά, ίσως λόγω της μεγάλης αγάπης που διέθετε για αυτήν την επιστήμη. Επίσης, θα αναλύσουμε τα πιο γνωστά από αυτά.

- “*Η Προσκύνηση των Μάγων*”, 1481-1482, Μιλάνο



- “*Η Παρθένος των Βράχων*”, 1483-1486, Μιλάνο



Η Παναγία των βράχων είναι ένα από τα πιο διάσημα έργα του Ντα Βίντσι. Στο έργο του αυτό μπορεί να διακριθεί η χρήση της προοπτικής στο πίσω μέρος του πίνακα στους βράχους.

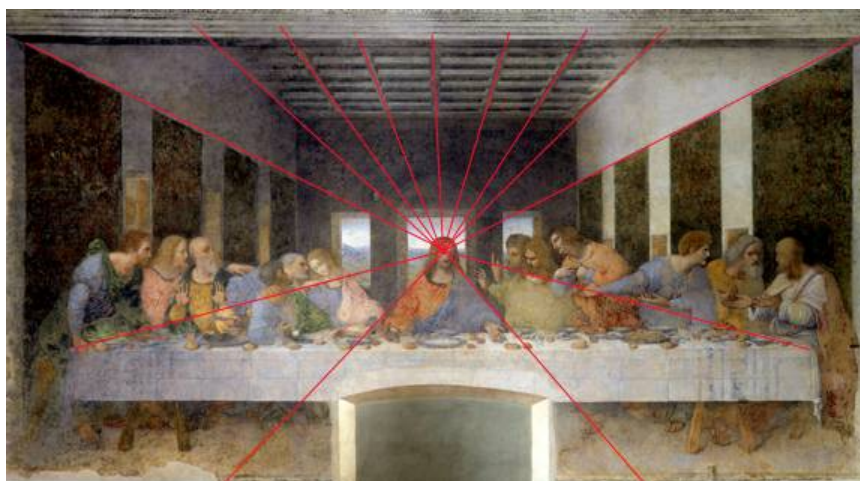


- “Ο Μυστικός Δείπνος”, 1494-1498, Μιλάνο



Για τον Μυστικό Δείπνο, ο Leonardo χρησιμοποίησε την «προοπτική ενός σημείου», κατηγορία εικονογραφικού σχεδιασμού που κατά την εποχή του ήταν σχετικά καινούργια – καθώς τα πρώτα παραδείγματά της βρέθηκαν λίγο πριν την Αναγέννηση, από το 1425 και μετά. Σε ένα τέτοιο έργο ο θεατής μπορεί εύκολα να αναγνωρίσει τον τρόπο με τον οποίο ο προσανατολισμός των άκρων των οικοδομικών δομών είναι σύμφωνος με μια σειρά γραμμών με κοινό σημείο αναφοράς.

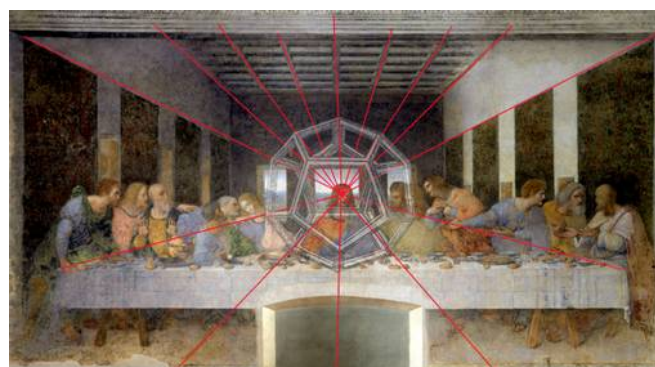
Εδώ, αυτή η προοπτική είναι εμφανής μέσω της δομής του τόπου όπου λαμβάνει χώρα η σκηνή. Το «σημείο εξαφάνισης» φαίνεται να συναντάται στο δεξί μάτι του Χριστού καθώς οι γραμμές της οροφής και οι γραμμές των ανοιγμάτων των τοίχων στην αίθουσα συναντώνται σε αυτό το σημείο.



Ωστόσο, υπάρχουν και άλλα σημεία στα οποία μπορούμε να επεκταθούμε. Με την κατάρτιση τεσσάρων ακόμη γραμμών για την ενσωμάτωση χαρακτηριστικών στο κάτω μισό της ζωγραφικής, επεκτείνεται το ακτινικό σχέδιο για να καλύψει το μεγαλύτερο μέρος της περιμέτρου της ζωγραφικής. Εδώ, χρησιμοποιείται στις επάνω γωνίες της επιφάνειας του τραπέζιού, καθώς και στις δύο διαγώνιες γραμμές που εμφανίζονται στον πίνακα ανάμεσα στο κάτω τραπεζομάντιλο και το κάτω μέρος του πλαισίου. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργήθηκαν 12 γραμμές που μοιάζουν με προφανή σημεία σύνδεσης στη ζωγραφική.



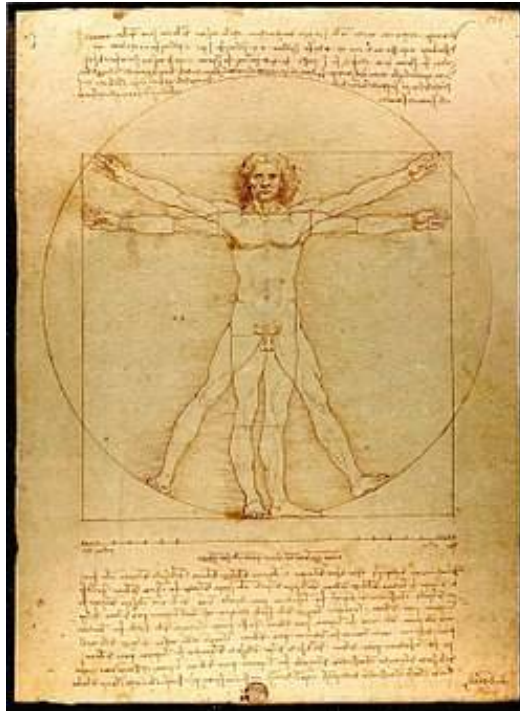
Τέλος, διακρίνεται η παρουσία ενός γεωμετρικού στερεού ως μέσου για τη σύνθεση της ζωγραφικής. Πιο συγκεκριμένα, το δωδεκάεδρο. Όπως φαίνεται, οι ακτινικοί βραχίονες του σημείου εξαφάνισης διέρχονται από τις κορυφές του δωδεκαέδρου.



- “Η κυρία με την ερμίνα”, 1488-1490, Φλωρεντία



- “Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου”, 1492



Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου είναι διάσημο σχέδιο με συνοδευτικές σημειώσεις του Λεονάρντο ντα Βίντσι, που σχεδιάστηκε περίπου το 1490 σε ένα από τα ημερολόγιά του. Απεικονίζει μία γυμνή αντρική φιγούρα σε δύο αλληλοκαλυπτόμενες θέσεις με τα μέλη του ανεπτυγμένα και συγχρόνως εγγεγραμμένα σε ένα κύκλο και ένα τετράγωνο. Το σχέδιο και το κείμενο συχνά ονομάζονται “Κανόνας των Αναλογιών”.

Σύμφωνα με τις σημειώσεις του ντα Βίντσι στο συνοδευτικό κείμενο, οι οποίες είναι γραμμένες με καθρεπτιζόμενη γραφή, το σχέδιο έγινε ως μελέτη των αναλογιών του (ανδρικού) ανθρώπινου σώματος όπως περιγράφεται σε μια πραγματεία του Ρωμαίου αρχιτέκτονα Βιτρούβιου, που είχε γράψει για το ανθρώπινο σώμα:

- μια παλάμη έχει πλάτος τεσσάρων δακτύλων,
- ένα πόδι έχει πλάτος τέσσερις παλάμες,
- ένας πήχης έχει πλάτος έξι παλάμες,
- το ύψος ενός ανθρώπου είναι τέσσερις πήχεις (και άρα 24 παλάμες),
- μια δρασκελιά είναι τέσσερις πήχεις,
- το μήκος των χεριών ενός άντρα σε διάταση είναι ίσο με το ύψος του,
- η απόσταση από την γραμμή των μαλλιών ως την κορυφή του στήθους είναι το 1/7 του ύψους του άνδρα,
- η απόσταση από την κορυφή του κεφαλιού ως τις θηλές είναι το 1/4 του ύψους του άνδρα,

- το μέγιστο πλάτος των ώμων είναι το  $\frac{1}{4}$  του ύψους του άνδρα,
- η απόσταση από τον αγκώνα ως την άκρη του χεριού είναι το  $\frac{1}{5}$  του ύψους του άνδρα,
- η απόσταση από τον αγκώνα ως την μασχάλη είναι το  $\frac{1}{8}$  του ύψους του άνδρα,
- το μήκος του χεριού είναι το  $\frac{1}{10}$  του ύψους του άνδρα,
- η απόσταση από την άκρη του πηγουνιού ως την μύτη είναι το  $\frac{1}{3}$  του μήκους του προσώπου,
- η απόσταση από τη γραμμή των μαλλιών ως τα φρύδια είναι το  $\frac{1}{3}$  του μήκους του προσώπου,
- το μήκος του αυτιού είναι το  $\frac{1}{3}$  του μήκους του προσώπου.

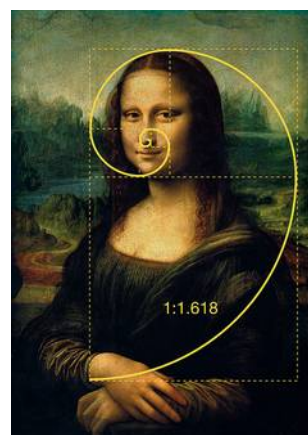
- “Μόνα Λίζα” ή “Τζοκόντα”, 1503-1514, Φλωρεντία



Η Μόνα Λίζα είναι ένα έργο του δεκάτου έκτου αιώνα, ζωγραφισμένο κατά την διάρκεια της ιταλικής Αναγέννησης. Είναι σχεδιασμένο το πρόσωπό της με τέτοιο τρόπο ώστε να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο αλλά και η δομή του υπόλοιπου έργου είναι χωρισμένη πάλι σε χρυσά ορθογώνια. Αρκετοί πιστεύουν πως η Μόνα Λίζα είναι η “θηλυκή” εκδοχή του Leonardo Da Vinci καθώς υποστήριζε πως έπρεπε να υπάρχει ισορροπία ανάμεσα στα δυο φύλα.

Στο έργο αυτό συναντάμε τη χρυσή αναλογία σε πολλά σημεία, όπως στο λόγο:

- του πλάτους του προσώπου στο ύψος της κορυφής της μύτης προς την απόσταση από τη δεξιά πλευρά του προσώπου ως τη δεξιά πλευρά της κορυφής της μύτης,
- της απόσταση από τη βάση του λαιμού μέχρι την κορυφή του μετώπου προς την απόσταση από τη βάση του λαιμού μέχρι το κέντρο της κόρης,
- της απόσταση από το κάτω μέρος τους πηγουνιού μέχρι το κάτω μέρος της μύτης προς το κάτω μέρος τους πηγουνιού μέχρι τον πυθμένα των χειλιών και αλλού.



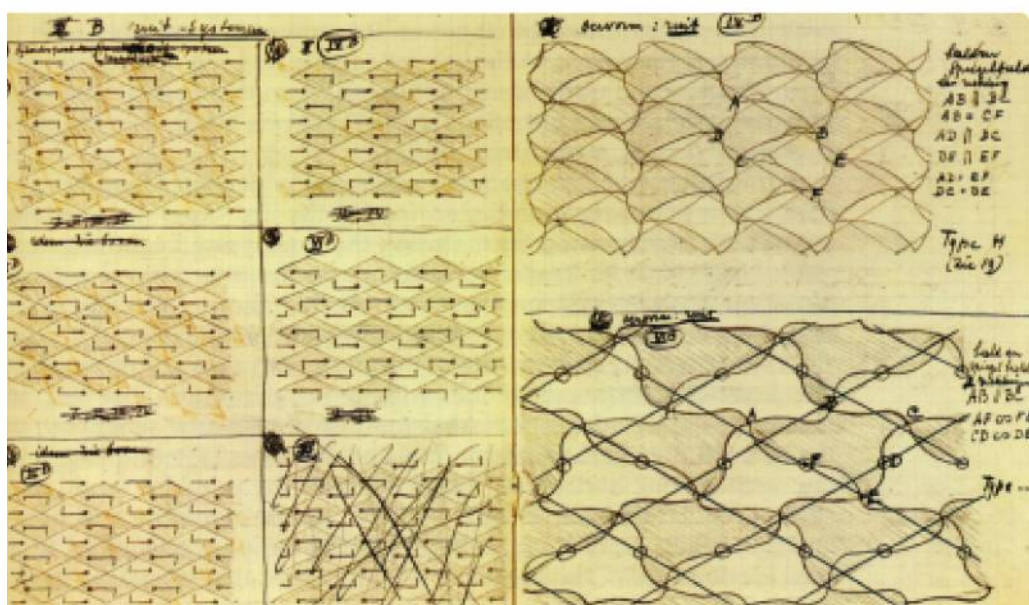
- “Άγιος Ιωάννης ο Βαπτιστής”, 1508-1513<sup>1</sup>, Φλωρεντία



## Maurits Cornelis Escher

Ο Μάουριτς Κορνέλις Έσερ (Maurits Cornelis Escher) ήταν Ολλανδός εικαστικός καλλιτέχνης. Γεννήθηκε στο Λέουβαρντεν (Leeuwarden) στη Φριζία της Ολλανδίας, μια περιοχή στα παράλια της Βόρειας Θάλασσας. Το 1922, ο Έσερ εγκατέλειψε το σχολείο, αφού απέκτησε εμπειρία στον σχεδιασμό της ξυλογραφίας. Σπούδασε για λίγο αρχιτεκτονική, αλλά απέτυχε σε αρκετά μαθήματα (εν μέρει εξαιτίας χρόνιας δερματικής μόλυνσης) και άλλαξε κατεύθυνση προς τις εικαστικές τέχνες. Τα πρώτα χρόνια, ο Έσερ σχεδίαζε τοπία και τη φύση. Επίσης σχεδίαζε έντομα, τα οποία εμφανίζονται συχνά σε μεταγενέστερα έργα του.

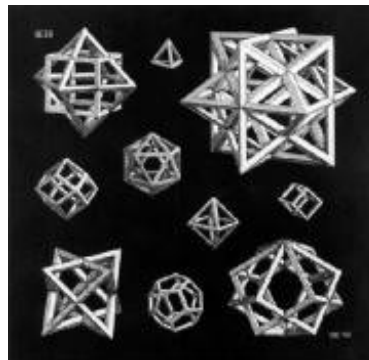
Εκτός από το σχέδιο και τη γραφιστική, ο Έσερ δούλεψε επίσης με τις τεχνικές της λιθογραφίας και της χαλκογραφίας. Παρατηρείται ότι στα έργα του υπάρχει μια στενή σχέση με τη Γεωμετρία. Οι πίνακές του αποτέλεσαν αντικείμενο σχολιασμού και στοχασμού για απλούς και πολλούς οπαδούς της τέχνης αλλά και Μαθηματικούς. Είναι άξιο αναφοράς ότι ο Έσερ έχει εμμονή με την απεικόνιση του απείρου και ότι ασχολήθηκε ο ίδιος μόνος του με τα Μαθηματικά, κάνοντας δικές τους έρευνες με ορμητήριο τις δικές του σκέψεις και τα έργα. Ο συγκεκριμένος ζωγράφος αποτελεί τη γέφυρα ανάμεσα στην επιστήμη και την τέχνη.



Προσχέδιο μελέτης του Escher

## Τα έργα του

Η σχέση των έργων του Έσερ, αλλά και του ίδιου του ζωγράφου με τα Μαθηματικά είναι εμφανής. Παρατηρείται πολύ συχνά στους πίνακές του η χρήση της Γεωμετρίας και ειδικών τεχνικών, οι οποίες υπήρξαν καταλύτες στην σύνθεση και στη σύλληψη των εικόνων και των έργων.



Πιο συγκεκριμένα, ο Έσερ χρησιμοποίησε ιδιαίτερα την προοπτική, τα πολυέδρα σχήματα, κατοπτρικά είδωλα από κώνους, σφαίρες, κύβους, δακτυλίους, έλικες, ψευδαισθήσεις, παραμορφώσεις, όπως επίσης καμπύλες και υπερβολές. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό στους περισσότερους από τους πίνακές του αποτελεί το στοιχείο του παράδοξου, ειδικά στις ψευδαισθήσεις.

Για παράδειγμα, αν ακολουθήσει κανείς την πορεία του νερού στον πίνακα *“Waterfall”* καταλαβαίνει ότι ενώ υπάρχει μια ανοδική πορεία και έπειτα απότομη καθοδική, η αρχική θέση είναι ίδια με την τελική από τη στιγμή που βρισκόμαστε στο ίδιο επίπεδο, χωρίς αζομείωση ύψους, πράγμα το οποίο δεν υφίσταται λογικά. Εμφανίζεται γενικώς μια συσχέτιση μορφών και γεγονότων μέσα στους πίνακες, η οποία εμφανώς είναι και παράδοξη διότι αν εξεταστεί ο πίνακας με ρεαλιστικά δεδομένα οδηγούμαστε σε άτοπο. Το θέμα αυτό των οφθαλμαπατών θα μελετηθεί αργότερα στην εργασία.



*Waterfall*



## Vincent van Gogh

Ο Vincent van Gogh ήταν Ολλανδός ζωγράφος και σήμερα αναγνωρίζεται ως ένας από τους σημαντικότερους ζωγράφους όλων των εποχών.

Για έναν από τους πιο γνωστούς του πίνακες, την “*Έναστρο Νύχτα*” (Starry Night), σημειώνονται έρευνες και προκαλείται ενδιαφέρον, κυρίως για τη σχέση που έχει ο πίνακας με τα Μαθηματικά. Ειδικότερα, ο πίνακας ζωγραφίστηκε λίγο πριν ο Βαν Γκογκ αυτοκτονήσει σε ηλικία 37 ετών, όταν ήταν πνευματικά ασταθής και ακολουθούσε φαρμακευτική αγωγή για τις κρίσεις του, και όχι στην «ήρεμη» περίοδο της ζωής του.



Μετά από έρευνες φυσικών και μαθηματικών και με ανάλυση πινάκων σαν την “*Έναστρο Νύχτα*” στον υπολογιστή, αποκαλύφθηκε ένα μοτίβο φωτεινών και σκοτεινών περιοχών που ακολουθούν τις εξισώσεις του Αντρεϊ Κολμογκόροφ, ο οποίος τη δεκαετία του 1940 κατάφερε να περιγράψει εν μέρει τη δυναμική του στροβιλισμού των ρευστών. Έτσι, οι χαοτικές δίνες ακολουθούν με ακρίβεια τις Μαθηματικές περιγραφές των



αναταράξεων σε ρευστά υλικά, όπως οι στροβιλισμοί του νερού σε ένα παραγμένο ρυάκι ή οι πραγματικοί ανεμοστρόβιλοι. Μια πιο λεπτομερής ανάλυση αυτών έκανε ο Natalya St. Clair στη διάλεξή του "*The unexpected math behind Van Gogh's "Starry Night"*"<sup>2</sup>.

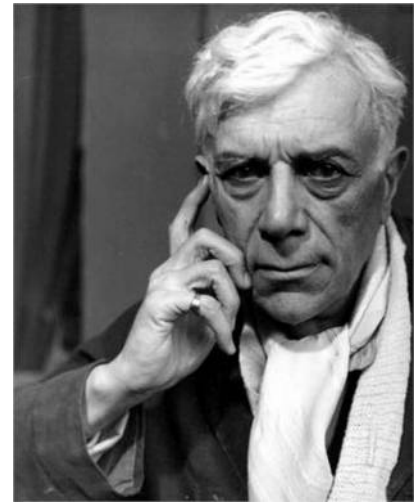
Ο Βαν Γκογκ είχε μια μοναδική ικανότητα να απεικονίζει αναταράξεις σε περιόδους παρατεταμένης ψυχωτικής αναστάτωσης, όπως σχολιάζει ο Αραγκόν στη μελέτη του που δημοσιεύεται στη διαδικτυακή πύλη [arXiv.org](https://arxiv.org)

<sup>2</sup> [https://www.ted.com/talks/natalya\\_st\\_clair\\_the\\_unexpected\\_math\\_behind\\_van\\_gogh\\_s\\_starry\\_night/transcript#t-278500](https://www.ted.com/talks/natalya_st_clair_the_unexpected_math_behind_van_gogh_s_starry_night/transcript#t-278500)

## **Ζωρζ Μπρακ**

### Βιογραφία

Ο Ζωρζ Μπρακ (Georges Braque) ήταν Γάλλος ζωγράφος, γλύπτης και χαράκτης, ο δημιουργός, μαζί με τον Πικάσο, του κυβισμού. Γεννήθηκε στις 13 Μαΐου του 1882 στο Argenteuil, μια κωμόπολη πάνω στον Σηκουάνα και κοντά στο Παρίσι. Ο πατέρας του ήταν ερασιτέχνης ζωγράφος και είχε μια επιχείρηση διακοσμήσεων. Το 1890 εγκαταστάθηκαν στη Χάβρη και το 1897 επηρεασμένος από τον πατέρα του, ξεκίνησε βραδινά μαθήματα στη σχολή καλών τεχνών της πόλης. Μετά από 2 χρόνια εργάστηκε ως βοηθός του ζωγράφου και διακοσμητή Ρονέ ενώ το 1900 εγκαταστάθηκε στο Παρίσι για να διευρύνει τους καλλιτεχνικούς του ορίζοντες. Σταθμός της ζωής του υπήρξε το 1907 η επίσκεψη σε εκθέσεις ζωγραφικής του Σεζάν και η γνωριμία του με τον Πικάσο. Μέχρι το 1909 είχαν διατυπώσει με τον Πικάσο τις τελικές αρχές του κυβισμού, ζωγραφίζοντας μαζί, στα Πυρηναία. Το 1910 ο Μπρακ γνώρισε την Marcelle Lapré, που του την είχε συστήσει ο Πικάσο. Παντρεύτηκαν το 1912 και έζησαν σε μια μικρή πόλη, το Sorgues στη νοτιοανατολική Γαλλία. Ο Μπρακ πολέμησε και τραυματίστηκε σοβαρά στον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο και από το 1917 ξανάρχισε να ζωγραφίζει, απομακρυσμένος πλέον από τον Πικάσο. Μέχρι το 1920 ήταν διάσημος ζωγράφος και γλύπτης, έκανε εκθέσεις σε όλο τον κόσμο, κερδίζοντας πολλά βραβεία, όπως το 1937 στο Πίτσμπουργκ των ΗΠΑ και το 1948 στην Μπιενάλε της Βενετίας. Στα γεράματά του η κακή κατάσταση της υγείας του τον απέτρεψε από το να ασχοληθεί με σημαντικές εργασίες. Ο Μπρακ πέθανε στις 31 Αυγούστου του 1963 στο Παρίσι.



### Τα έργα του

Νωρίς στην ζωή του, Ο Ζωρζ Μπρακ ήθελε να ασχοληθεί με τη ζωγραφική και γι' αυτό μετακόμισε απ' την μικρή πόλη που γεννήθηκε στο Παρίσι. Αυτό, εκτός από το ότι του επέτρεψε να είναι κοντά σε άλλους ζωγράφους της εποχής, τον βοήθησε να δει ποια στυλ ήταν επικρατέστερα εκείνη την περίοδο.

Νωρίς στην καλλιτεχνική καριέρα του, επικεντρώθηκε κυρίως στον ιμπρεσιονισμό,

κίνημα του 19ου αιώνα που ξεκίνησε από το Παρίσι από καλλιτέχνες όπως τον Μονέ και τον Βαν Γκονγκ. Ένα ξεχωριστό χαρακτηριστικό των έργων του κατά την διάρκεια εκείνης της περιόδου δεν ήταν μόνο η ξεχωριστή διακοσμητική ομορφιά του αλλά και το γεγονός ότι ήταν πιο έντονα τα χρώματα σε σχέση με τους άλλους καλλιτέχνες. Σε αντίθεση με τους άλλους ζωγράφους του φωβισμού, ο Μπρακ δεν έδωσε μόνο προσοχή στην θέση των χρωματικών στοιχείων στο κύριο μέρος της εικόνας αλλά και στο περίγραμμα.

Κατά την διάρκεια του πολέμου, τα έργα του άλλαζαν με σκοπό να αντιπροσωπεύσουν τη σοβαρή, σκοτεινή περίοδο που διέσχιζε ο κόσμος. Επίσης άλλαζε το στυλ και τα θέματα των έργων του για να αντιπροσωπεύσει πιο ευτυχισμένες εποχές και τα χαρούμενα πράγματα που συνέβαιναν γύρω του. Παρά την επιλογή χρωμάτων και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων του, ποτέ δεν απομακρύνθηκε από τον κυβισμό. Γεωμετρικό λεξιλόγιο, αντιρρεαλιστικά χρώματα, άλλοτε ασκητικά άλλοτε έντονα, σχηματοποίηση των μορφών (άνθρωποι και νεκρές φύσεις με μουσικά όργανα), πολλοί πίνακες με θέμα τα πουλιά, υπαινικτικά, συμβολικά στοιχεία χαρακτηρίζουν την τέχνη του μεγάλου δημιουργού.

Εκτός από την ίδρυση του κυβισμού, ασχολήθηκε και με άλλα κινήματα τέχνης τα οποία ήταν επίσης σημαντικά την εποχή του. Έκανε έργα που άγγιξαν τον ιμπρεσιονισμό, τον φωβισμό και είχαν στοιχεία τύπου κολλάζ, τα οποία έφεραν μια σειρά από φανταστικά κομμάτια, έντονα χρώματα, ιδιαίτερα σχήματα και στυλ στην δουλειά του.

Ο Ζωρζ Μπρακ αποσυνθέτει τον κόσμο σε επίπεδα και σχεδιάζει με τη βοήθεια γεωμετρικών στοιχείων. Πολλές φορές οι επιφάνειες τέμνονται σε γωνίες που δεν έχουν κάποιο ιδιαίτερο βάθος. Οι πίνακές του δεν είχαν αναφορές στην πραγματικότητα, αλλά παρουσίαζαν εικόνες πολύ διαφορετικές από τις συνηθισμένες. Παριστάνουν συνήθως αφηρημένες εικόνες αποτελούμενες από γεωμετρικά σχήματα. Δηλαδή οι κύκλοι, τα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα ορθογώνια έχουν κυρίαρχο ρόλο στους πίνακές του.

Από το 1907 έως το 1909, η λεγόμενη Σεζανική περίοδος, ο Μπρακ ζωγράφησε μια σειρά πινάκων στους οποίους η αναλυτική διάσπαση της μορφής που γινόταν με μεγάλη λογική συνέπεια, αλλά και με ελεύθερη φαντασία συνοδευόταν από

εξαιρετικό περιορισμό του χρώματος. Παράλληλα δυνάμωνε η τάση της καταργήσεως της τρίτης διαστάσεως και της προβολής όλων των σημείων του αντικειμένου στη δισδιάστατη επιφάνεια, για τις ιδιαίτερες διακοσμητικές και εκφραστικές του δυνατότητες. Ήταν η συνθετική φάση του κυβισμού (1912-1914), αντίθετη από την προηγούμενη και χαρακτηριστική αντίληψη, ότι ο πίνακας είναι ένας οργανισμός που υπακούει αποκλειστικά σε δισδιάστατη επιφάνεια του μουσαμά, με τέτοιο τρόπο ώστε το πραγματικό αντικείμενο να παρουσιάζεται ταυτόχρονα από διάφορες οπτικές γωνίες.



Μετά την καταστροφή της ενιαίας “σύλληψης του χώρου”, ο Πικάσσο και ο Μπρακ, προχώρησαν στη διάλυση του συμπαγούς των αντικειμένων. Οι όγκοι κομματιάζονται και σκορπίζονται, έτσι βλέπουμε τις επιφάνειες από αδιαφανείς να γίνονται διάφανες και να χάνονται. Οι γραμμές παύουν να είναι μονοσήμαντες. Δεν ξεχωρίζεις που σταματούν τα αντικείμενα και που αρχίζει ο χώρος. Το φόντο είναι αφηρημένο και δεν επιτρέπει προσανατολισμό. Στο χρώμα διαφαίνεται η τάση προς τη μονοχρωμία. Το μορφικό λεξιλόγιο περιορίζεται, υπάρχουν μόνο ευθείες και καμπύλες. Η ψευδαίσθηση χάνεται, τα αντικείμενα δεν αναγνωρίζονται και έχουν πολλαπλά νοήματα.



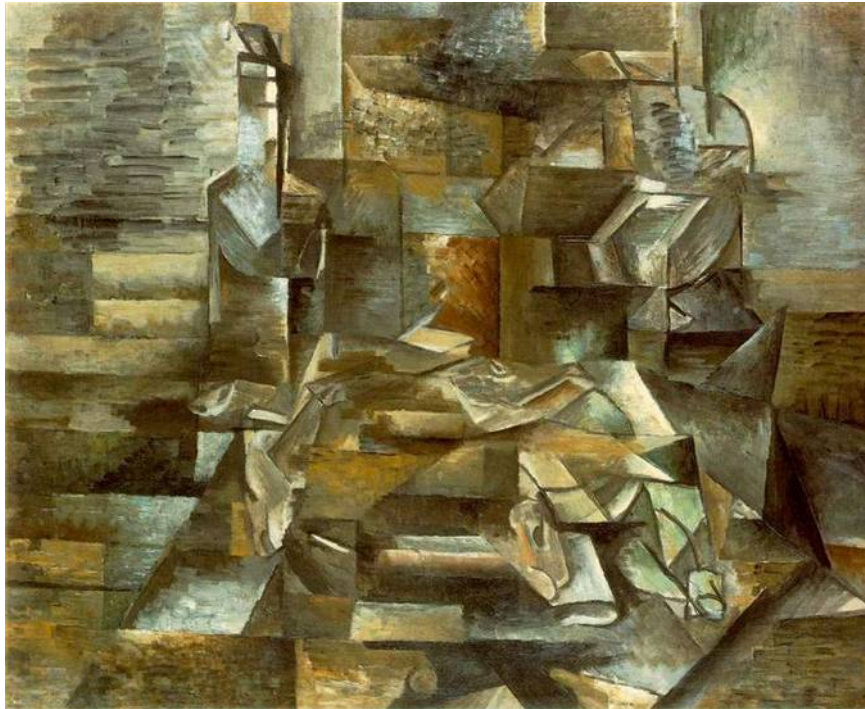
Δυο αντιπροσωπευτικά του έργα είναι τα εξής:

- “Κλαρίνο και μπουκάλι Ρούμι στο ράφι πάνω από το τζάκι”, 1911



Το έργο αυτό είναι μία ελαιογραφία του Ζωρζ Μπρακ. Η σύνθεσή της αποτελείται από μία ποικιλία αντικειμένων που παρουσιάζονται από μια σειρά από διασκορπισμένα, γεωμετρικά σχήματα τα οποία σχηματίζουν αιχμηρές γωνίες και γραμμές κατά μήκος του καμβά. Ένα κλαρινέτο, ένα μπουκάλι ρούμι, ένα καρφί και ένα τζάκι μπορούν να γίνουν αντιληπτά. Το κλαρινέτο εμφανίζεται ακριβώς πάνω από το κέντρο της σύνθεσης και στέκεται οριζόντια σε σχέση με την έντονη διαγώνιο του τζακιού. Το κλαρινέτο απεικονίζεται από πάνω και σχεδόν διχοτομεί τον καμβά, ενώ το ράφι πάνω από το τζάκι παρουσιάζεται από δύο έντονες μαύρες γραμμές, παράλληλες και διαγώνιες και ξεκινούν από την αριστερή κάτω γωνία και καταλήγουν στην πάνω πλευρά του πίνακα. Η λέξη “Valse” (“waltz”) εμφανίζεται χαμηλά στο κέντρο για να προσθέσει στο μουσικό θέμα του πίνακα, όπως επίσης και διάφορα μικρά σχήματα που μοιάζουν με μουσικές νότες.

- “Μπουκάλι και ψάρια”, 1910-12



Ο Μπρακ απεικόνισε και τα μπουκάλια και τα ψάρια στην διάρκεια της καλλιτεχνικής του καριέρας. Καθημερινά αντικείμενα, ένα μπουκάλι και ψάρια σε ένα πιάτο, πάνω στο τραπέζι, έχουν διαιρεθεί δραματικά για να σχηματίσουν ένα πλέγμα από αλληλοδιεισδυόμενα επίπεδα. Αυτός ο πίνακας έχει το περιορισμένο χαρακτηριστικό των γήινων χρωμάτων που αποδίδει τα δύσκολα αντιληπτά αντικείμενα καθώς διαχωρίζονται στο μήκος του οριζόντιου επιπέδου.

## Kandinsky

### Βιογραφία

Ο Βασίλι Καντίνσκι (Wassily Kandinsky) (1866–1944) ήταν Ρώσος ζωγράφος και θεωρητικός της τέχνης. Θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους καλλιτέχνες του 20ου αιώνα και ήταν ένας από τους πρωτοπόρους της αφηρημένης τέχνης. Σπούδασε νομικά και οικονομικά στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας και σε ηλικία 30 ετών μετακόμισε στο Μόναχο για να σπουδάσει ζωγραφική. Τα πρώτα του έργα είχαν έντονες επιρροές από το ρώσικο συμβολισμό και τους καλλιτέχνες της Απόσχισης. Το 1906 πήγε στο Παρίσι, όπου συμμετείχε σε εκθέσεις και είχε την ευκαιρία να έρθει σε επαφή με τα καλλιτεχνικά κινήματα του φωβισμού και του Ναμπί τα οποία καθόρισαν τα επόμενα έργα του.



Η ρωσική λαϊκή τέχνη δεν έπαψε ποτέ να τον επηρεάζει και να τον συνδέει με τη ρωσική πρωτοπορία. Το 1910, ζωγράφισε τα πρώτα του αφηρημένα έργα, αν και η αποστασιοποίηση από τη φύση και τις ρεαλιστικές αναπαραστάσεις είχε αρχίσει να εκδηλώνεται νωρίτερα. Το 1911 ήταν ένας από τους ιδρυτές της καλλιτεχνικής ομάδας «Γαλάζιος Καβαλάρης» (Der Blaue Reiter), ενώ το 1912 έκανε την πρώτη του ατομική έκθεση στην γκαλερί «Θύελλα» του Βερολίνου. Την ίδια χρονιά κυκλοφόρησε και το βιβλίο του «Για το πνευματικό στην τέχνη», ένα έργο καθοριστικό για την εξέλιξη της μοντέρνας τέχνης. Το 1921 εντάχθηκε στη σχολή του Μπιάουχαους (Bauhaus) στη Βαϊμάρη, όπου και δίδαξε ως τη στιγμή της διάλυσής της από τους Ναζί. Το 1926, κυκλοφόρησε το δεύτερο βιβλίο του, επίσης σημαντικό για την ιστορία της μοντέρνας τέχνης «Σημείο και Γραμμή σε σχέση με την Επιφάνεια». Το 1933 μετά την εγκατάστασή του στο Παρίσι, όπου και έμεινε μέχρι το τέλος της ζωής του, το έργο του θα γίνει πιο ρευστό και σουρεαλιστικό, κάτω από την επίδραση του Χουάν Μιρό.

### Τα έργα του

Ο Καντίνσκι στις αρχές της δεκαετίας του 1920 όταν ανέλαβε θέση διδασκαλίας στο Bauhaus άρχισε να ενδιαφέρεται για τις ιδιότητες της Γεωμετρίας και χρησιμοποίησε όλο και περισσότερο γεωμετρικά μοτίβα στην τέχνη του. Όρισε τα Μαθηματικά του συναισθήματος: μοναδικό κίνητρο της τέχνης είναι να μπορεί να συγκινήσει.



Προσπάθησε να αναπτύξει μια θεωρία για τη ζωγραφική με όρους βασικών γεωμετρικών μορφών. Ο Καντίνσκι χρησιμοποίησε τη Γεωμετρία του κύκλου, αναφέρθηκε στο σημείο, τη γραμμή και το επίπεδο αντιμετωπίζοντάς τα ως ζωντανά όντα.

Κάποια αντιπροσωπευτικά έργα του είναι τα εξής:

- “Ο γαλάζιος καβαλάρης”, 1903



Αυτό το πρωτοποριακό έργο είναι παραπλανητικά απλό. Απεικονίζει έναν μοναχικό αναβάτη που βρίσκεται σε ένα φυσικό τοπίο. Στη πραγματικότητα, στον πίνακα, φαίνεται το αναπτυσσόμενο ύφος του Καντίνσκι. Υπάρχει μια σύνδεση με το ιμπρεσιονιστικό στυλ που φαίνεται από τις αντιθέσεις του φωτός και του σκοταδιού. Επίσης η ενασχόληση του Καντίνσκι με την αφαίρεση φαίνεται στην ασάφεια της μορφής της φιγούρας του καβαλάρη που έχει γίνει με χρώματα που σχεδόν αναμιγνύονται. Ο καβαλάρης είναι μια μορφή που χρησιμοποιείται σε πολλά από τα έργα του. Για τον Καντίνσκι αυτή η επανάληψη συμβόλιζε την αντίστασή του απέναντι στη συμβατική αισθητική της εποχής καθώς και τις δυνατότητες για μια πιο πνευματική ζωή μέσω της τέχνης.

- “Σύνθεση IV”, 1911



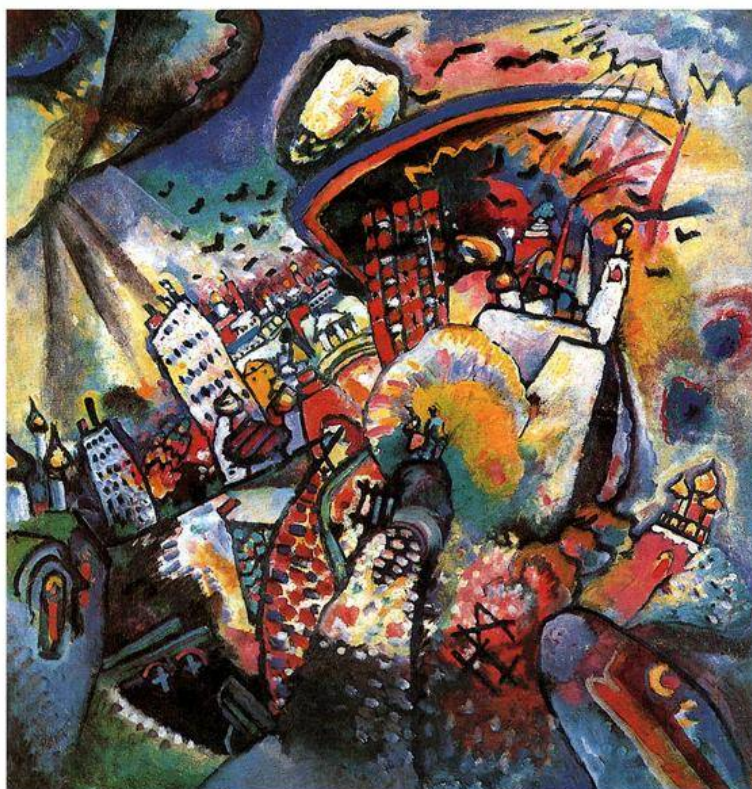
Ανάμεσα στα φωτεινά χρώματα και τις μαύρες γραμμές, απεικονίζονται Κοζάκοι με λόγχες, βάρκες, ανακλινόμενες φιγούρες και ένα κάστρο σε μια κορυφή λόφου. Η πολεμική αυτή σκηνή αντιπροσωπεύει την αποκαλυπτική μάχη που θα οδηγήσει στην αιώνια ειρήνη. Η ιδέα της μάχης δίνεται από τους Κοζάκους, ενώ η ηρεμία των υπόλοιπων ανθρωπίνων μορφών αντιπροσωπεύει την ειρήνη και την λύτρωση που ακολουθούν. Το μη αντικειμενικό στυλ ζωγραφικής του Καντίνσκι δίνεται μειώνοντας τα αντικείμενα σε είδωλα σύμβολα. Πολλά από αυτά επαναλαμβάνονται σε μεταγενέστερα έργα ενώ όλο και περισσότερο αφαιρούνταν καθώς το αφηρημένο στυλ του ζωγράφου εξελισσόταν.

- “Ομόκεντροι κύκλοι μέσα σε τετράγωνο”, 1913



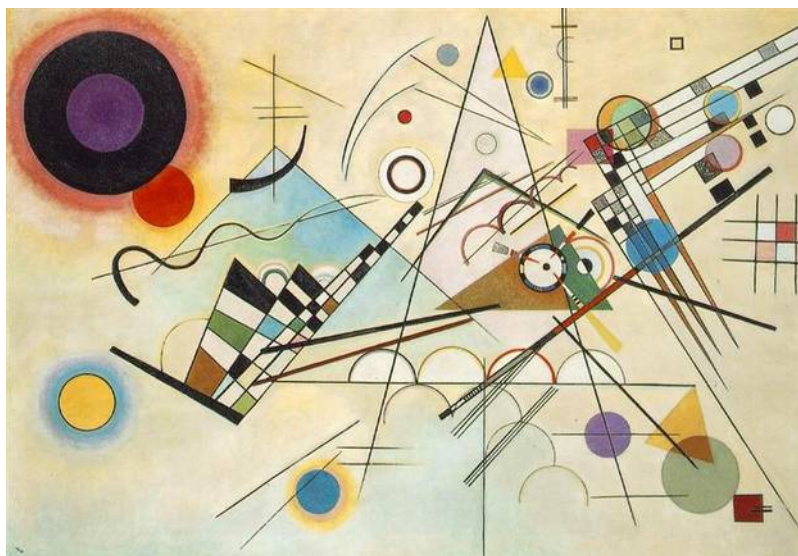
Τα τετράγωνα με ομόκεντρους κύκλους, ίσως το πιο αναγνωρίσιμο έργο του Kandinsky, στην πραγματικότητα δεν είναι μια συγκεκριμένη εικόνα. Είναι μια μελέτη για τους συνδιασμούς και τις σχέσεις των χρωμάτων. Το χρώμα για τον Kandinsky, είναι πολύ σημαντικό, είναι η ψυχή του. Στα βιβλία του περιέγραψε λεπτομερώς την οπτική του για το πώς τα χρώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και με τον θεατή. Είναι ενδιαφέρον ότι, η οργάνωση των κύκλων έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε δημιουργήθηκε ασυνείδητα ένα έργο τέχνης στην τεχνική Serial Imagery.

- “*Moscow I (Red Square)*”, 1916



Ο πίνακας έγινε δύο χρόνια μετά τη μετακόμησή του στη Μόσχα αφού είχε περάσει μια περίοδο απραξίας και κατάθλιψης. Επιθυμία του ήταν να ζωγραφίσει ένα πορτρέτο της Μόσχας. Παρόλο που συνέχισε να αναπτύσσει την αφαίρεση, σε αυτόν τον πίνακα εκπροσώπησε τα μνημεία και κατέλαβε το πνεύμα της πόλης. Ζωγράφισε το χώρο με κυκλικό τρόπο σαν να στέκεται και να περιστρέφεται στο κέντρο της Κόκκινης Πλατείας. Η πνευματική έκφραση της τέχνης που είχε υιοθετήσει δεν εγκαταλείπεται στο πίνακα παρόλο που αναφέρεται στον εξωτερικό κόσμο.

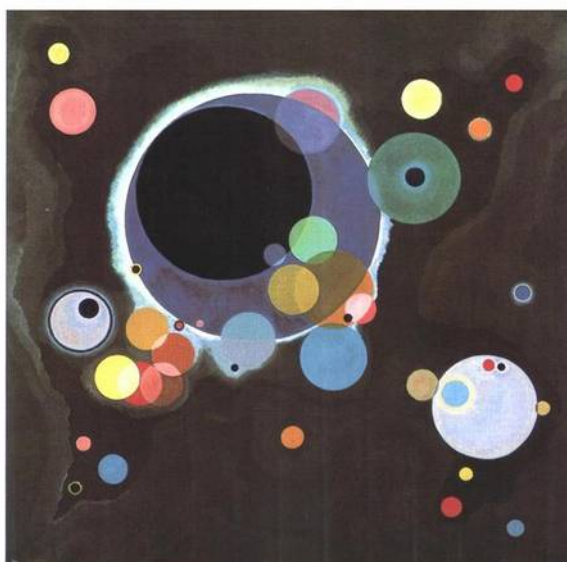
- “Σύνθεση VIII”, 1923



Ζωγραφισμένο ενώ δίδασκε στο Bauhaus, στον πίνακα φαίνεται πως ο Καντίνσκι συνθέτει στη ζωγραφική του, στοιχεία από τον σουπρεματισμό, τον κονστρουκτιβισμό και το Bauhaus. Με αυτό το συνδυασμό έφτασε στην καθαρή, γραμμική ποιότητα που παρατηρείται σε αυτό το έργο.

Στο έργο φαίνονται οι ιδέες του Καντίνσκι σχετικά με τη σημασία των σχημάτων στη σύγχρονη τέχνη όπως τα τρίγωνα, οι κύκλοι και η σκακιέρα.

- “Αρκετοί κύκλοι”, 1926



Την εποχή που ζωγραφίστηκε ο πίνακας αυτός ο Καντίνσκι ήταν επηρεασμένος από τη ρωσική πρωτοπορία. Ο Καντίνσκι υποστήριζε πως ο κύκλος είναι η σύνθεση των μεγαλύτερων αντιθέσεων. Συνδυάζει το ομόκεντρο και το έκκεντρο σε μια ενιαία μορφή και σε ισορροπία.

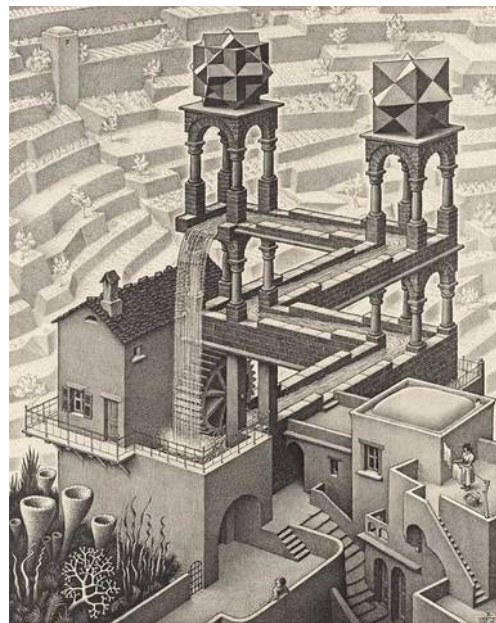
Ο ζωγράφος εφάρμοσε τις θεωρητικές σπουδές του στο συγκεκριμένο πίνακα. Περιορίστηκε μόνο με μια μορφή, τον κύκλο, έδωσε προσοχή στα χρώματα και τη σχετική θέση των σχημάτων στον καμβά.

## ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΙΣΩ ΑΠΟ ΤΙΣ ΟΦΘΑΛΜΑΠΑΤΕΣ

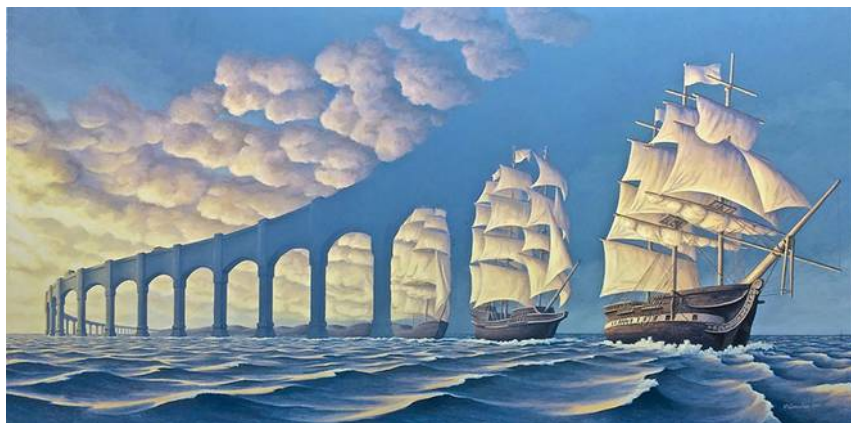
Πολλοί καλλιτέχνες έχουν εργαστεί με οφθαλμαπάτες, συμπεριλαμβανομένου των M.C. Escher, Bridget Riley, Salvador Dali, Giuseppe Arcimboldo, Marcel Duchamp, Victor Vasarely, Oscar Reutersvard και Charles Allan Gilbert. Επίσης, σύγχρονοι καλλιτέχνες πειραματίζονται με τις οφθαλμαπάτες, όπως οι Dick Termes, Shigeo Fukuda, Patrick Hughes, István Orosz, Rob Gonsalves και Akiyoshi Kitaoka.

Κάποια παραδείγματα έργων που έχουν οφθαλμαπάτες είναι:

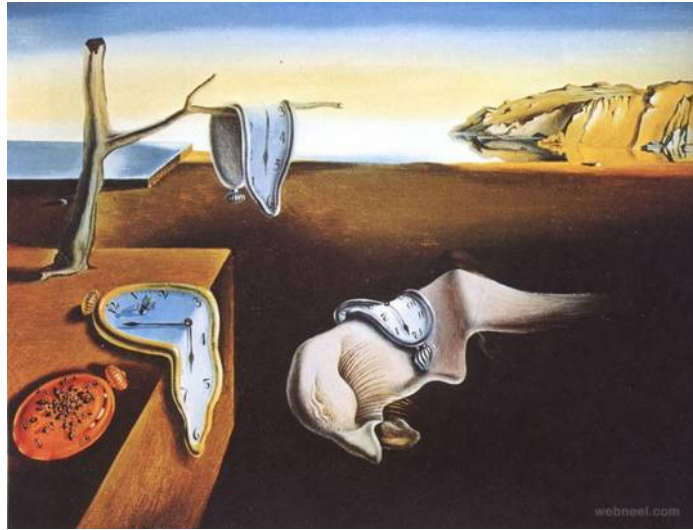
- έργα του M.C. Escher



- έργα του Rob Gonsalves



- έργα του Salvador Dali



### Τι είναι οι οφθαλμαπάτες

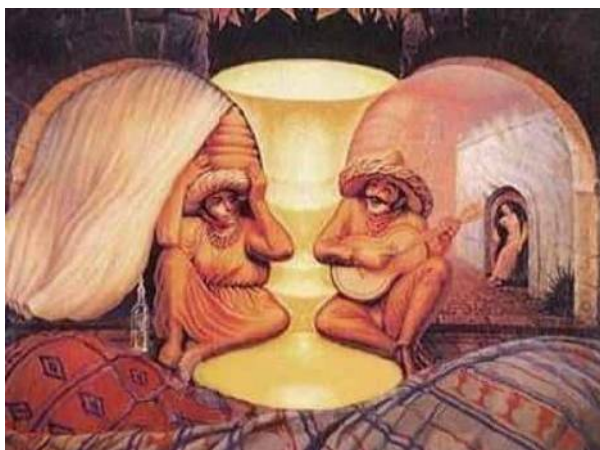
Οι οφθαλμαπάτες είναι ψευδαισθήσεις, δηλαδή εικόνες που παίζουν κόλπα στα μάτια μας και παραποιούν την αντίληψή μας. Δεν είναι αποτέλεσμα ελαττωματικής όρασης. Ανάλογα με το φως, τη γωνία θέασης ή τον τρόπο με τον οποίο είναι ζωγραφισμένη η εικόνα, μπορεί να δούμε πράγματα που δεν υπάρχουν - και συχνά δεν βλέπουμε τι πραγματικά υπάρχει.

Αυτά τα τεχνάσματα του ματιού και του νου είναι μέρος της ανθρώπινης εμπειρίας από την αρχή της ιστορίας. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν οφθαλμαπάτες για να τελειοποιήσουν την εμφάνιση των μεγάλων ναών τους, όπως τον Παρθενώνα που θα αναλύσουμε στη συνέχεια. Σε πιο πρόσφατες περιόδους, δημιουργήθηκαν και εφαρμόστηκαν πολλές άλλες οφθαλμαπάτες στις γραφικές τέχνες.

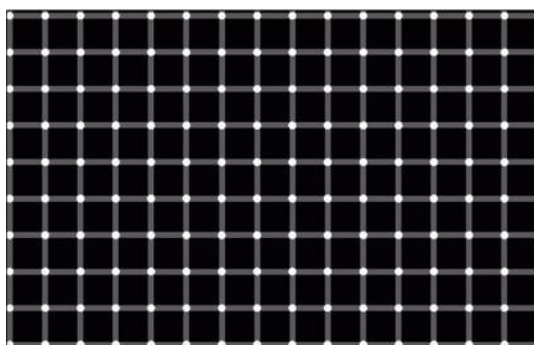
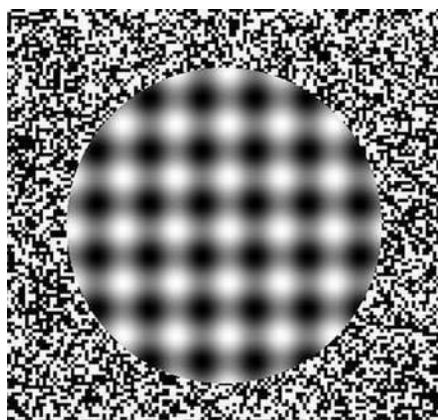
Υπάρχουν 3 τύποι οφθαλμαπατών:

- *Κυριολεκτικές Οφθαλμαπάτες*: Δημιουργούν εικόνες διαφορετικές από τα

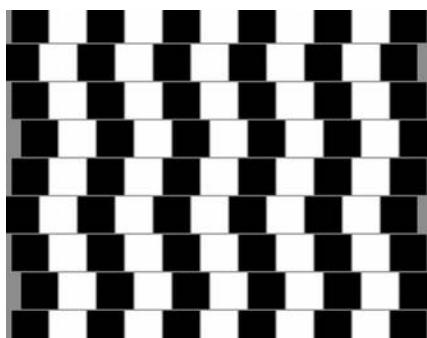
αντικείμενα που τις αποτελούν.



- *Φυσικές Οφθαλμαπάτες*: Οφείλονται στην υπερβολική έκθεση σε ερεθίσματα όπως φωτεινότητα, χρώμα, μέγεθος, θέση, κλίση και κίνηση.

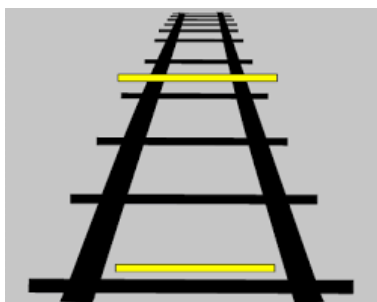


- *Αντιληπτικές Οφθαλμαπάτες*: Οι οφθαλμαπάτες αυτές παραποιούν το πραγματικό μέγεθος, σχήμα και την θέση εξαιτίας των στοιχείων που το περιβάλλουν. Οδηγούν σε ασυνείδητα συμπεράσματα. Προτάθηκαν για πρώτη φορά τον 19ο αιώνα από τον Hermann Helmholtz.





Σε αυτήν την εικόνα, οι ευθείες που βρίσκονται ανάμεσα στις σειρές με τα κουτάκια είναι στην πραγματικότητα παράλληλες μεταξύ τους, όμως λόγω της θέσης των κουτιών και του σχήματός τους φαίνεται σαν οι ευθείες να μην είναι παράλληλες.

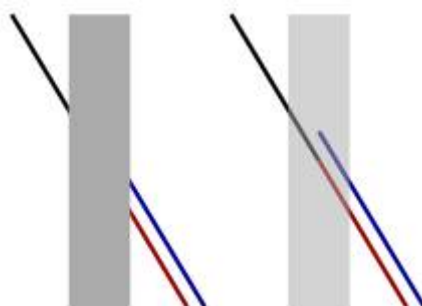


Σε αυτή την εικόνα η κίτρινη γραμμή που είναι στην κορυφή φαίνεται να είναι μεγαλύτερη σε μήκος από αυτήν που βρίσκεται χαμηλότερα και αυτό συμβαίνει εξαιτίας του μεγέθους και της θέσης των μαύρων γραμμών που τις περιβάλλουν.

#### Πως Σχετίζονται οι Οφθαλμαπάτες με τα Μαθηματικά

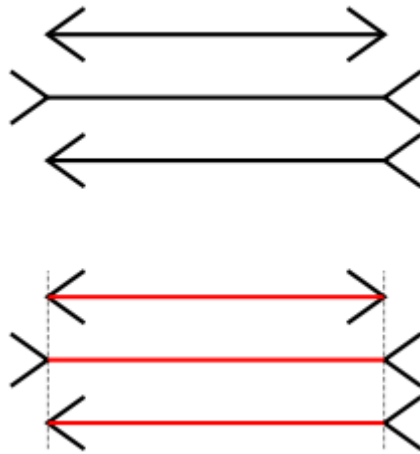
Οι οφθαλμαπάτες αποτελούνται κυρίως από γραμμές, γωνίες, τρίγωνα, τετράγωνα, γενικά γεωμετρικά σχήματα και σπείρες, και εκμεταλλεύονται τον χώρο δημιουργώντας την αίσθηση της κίνησης. Η Γεωμετρία, η Αριθμητική και η Άλγεβρα σχετίζονται άμεσα με τις οφθαλμαπάτες. Οι οφθαλμαπάτες μπορούν να σχετίζονται με τα εξής στοιχεία:

- τη θέση (όπως στην οφθαλμαπάτη του Poggendorff)



Στην πρώτη εικόνα η μαύρη γραμμή φαίνεται να είναι προέκταση της μπλε ενώ στην δεύτερη εικόνα όπου το ορθογώνιο γίνεται διαφανές, βλέπουμε πως η μαύρη είναι προέκταση της κόκκινης γραμμής, ενώ η μπλε διακόπτεται μέσα στο ορθογώνιο.

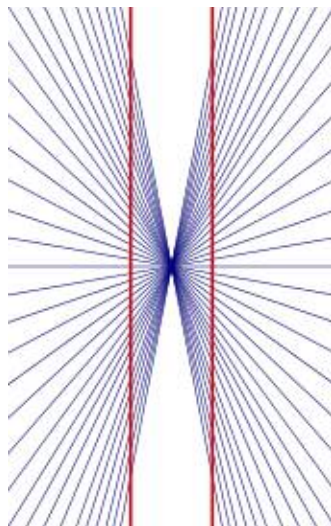
- το μήκος (η οφθαλμαπάτη του Müller-Lyer)



- την κατεύθυνση (η οφθαλμαπάτη του Zöllner ή αυτή του Münsterberg)

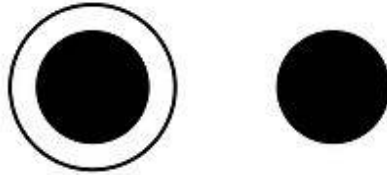


- την ευθύτητα των γραμμών (όπως στην οφθαλμαπάτη του Hering)



Όταν παρουσιάζονται δύο παράλληλες ευθείες γραμμές μπροστά σε ακτινωτό υπόβαθρο (όπως οι ακτίνες ενός ποδηλάτου), οι γραμμές φαίνονται σαν να είναι στραμμένες προς τα μέσα.

- το μέγεθος (όπως στην οφθαλμαπάτη του Delboeuf)



Οι δύο κύκλοι έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος, όμως ο αριστερός κύκλος φαίνεται σαν να είναι για κάποιους μεγαλύτερος και για άλλους μικρότερος.

### Οφθαλμαπάτες στην Αρχιτεκτονική

- Οφθαλμαπάτη του μηδενικού βάρους

Τα αρχιτεκτονικά στοιχεία μπορούν να φανούν σαν να αιωρούνται στο διάστημα παρά την τεράστια δομή τους, όπως σε ορισμένες βασικές περιπτώσεις στην ιστορία. Για παράδειγμα, στην Κωνσταντινούπολη, στην Τουρκία, η εκκλησία της Αγίας Σοφίας, που χτίστηκε από τον Ισίδωρο και τον Ανθέμιο, είναι μια βυζαντινή εκκλησία, που αργότερα χρησίμευσε ως οθωμανικό τζαμί, και σήμερα λειτουργεί ως μουσείο. Ο τεράστιος θόλος της, παρόλο που έχει μεγάλο βάρος, φαίνεται από το εσωτερικό του να στερεώνεται ελαφρά στο κάτω μέρος του κτηρίου, αν και υπάρχουν κρυφοί στύλοι που παρέχουν την απαραίτητη υποστήριξη.



*Το εσωτερικό της Αγίας Σοφίας, Κωνσταντινούπολη*

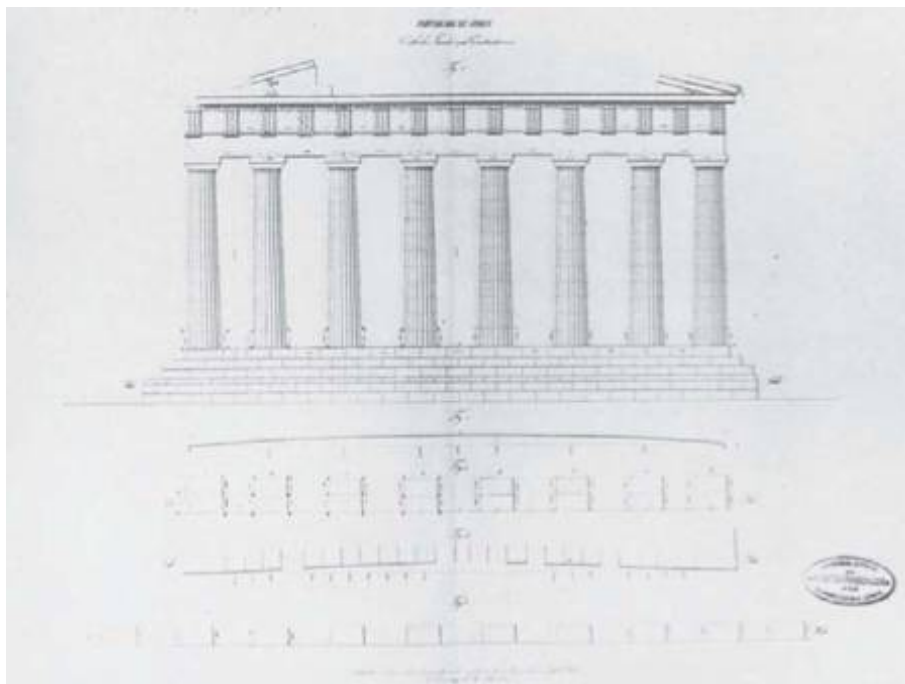
Οι εκκλησίες Γοτθικού ρυθμού παρουσιάζουν παρόμοιο αποτέλεσμα, όπου εξωτερικά στηρίγματα χρησιμοποιούνται για τη διατήρηση του βάρους της στέγης ενώ παραμένουν κρυμμένα από τους παρατηρητές, παράγοντας έτσι την αίσθηση της ελαφρότητας.



*Το εσωτερικό του Καθεδρικού ναού Salisbury*

- Οφθαλμαπάτες με στόχο την βελτίωση/διόρθωση της όψης.

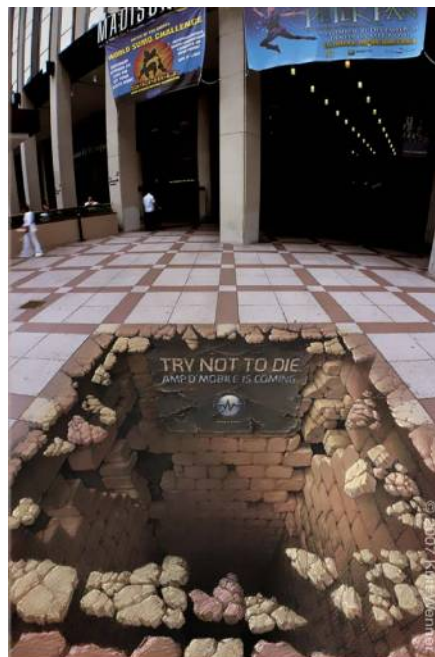
Οι οφθαλμαπάτες ενσωματώθηκαν σκόπιμα ως αρχιτεκτονικά στοιχεία από την αρχαιότητα ακόμα, συνήθως για να βελτιώσουν τα αποτελέσματα της οπτικής παραμόρφωσης. Το πιο διάσημο παράδειγμα είναι ο Παρθενώνας:



Ο ναός βασίζεται σε οριζόντιες και κάθετες γραμμές που συναντώνται σε ορθή γωνία. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι το ανθρώπινο μάτι παραμορφώνει τέτοιες γραμμές όταν κοιτάζει μεγάλες δομές. Μακριές οριζόντιες γραμμές, για παράδειγμα, φαίνεται να χαλάνε στη μέση, ενώ δύο παράλληλες κάθετες γραμμές φαίνονται να απομακρύνονται η μία από την άλλη καθώς πηγαίνουν προς τα πάνω. Για να αντισταθμίσουν την επίδραση, οι Έλληνες αντικατέστησαν την προεξέχουσα οριζόντια γραμμή στο πάνω μέρος του ναού με μια γραμμή που έχει ελαφριά κλίση προς τα πάνω στο κέντρο. Κάθε άλλη οριζόντια γραμμή πρέπει στη συνέχεια να γίνει παράλληλη με αυτήν την προσφάτως εισαγόμενη καμπύλη. Οι στήλες του Παρθενώνα χτίστηκαν για να γέρνουν λίγο προς το κέντρο στο πάνω μέρος, λίγες μόνο μοίρες, ώστε να φαίνονται παράλληλες.

- Οφθαλμαπάτες και προβολική Γεωμετρία

Η προβολική Γεωμετρία χρησιμοποιείται από καλλιτέχνες για να δημιουργήσουν την αίσθηση του τρισδιάστατου στις ζωγραφιές τους, οι οποίες είναι στην πραγματικότητα ζωγραφισμένες στην επίπεδη άσφαλτο του δρόμου. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μια τεχνική προβολής που ονομάζεται αναμόρφωση και δίνει την αίσθηση του τρισδιάστατου όταν ο θεατής το βλέπει από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία.



*"Black Hole", Kurt Wenner*



*"Ice Age", Edgar Mueller*



*"Swimming Pool", Julian Beever*

- Τρισδιάστατη ζωγραφική στο σχολείο μας

Στην αυλή του Πειραματικού Σχολείου Πανεπιστημίου Θεσ/νίκης (Π.Σ.Π.Θ.) την σχολική χρονιά 2015 - '16 σε συνεργασία με τον κ. Κουρνιατή, καθηγητή του Μετσόβειου Πολυτεχνείου, και φοιτητές της αρχιτεκτονικής του Α.Π.Θ. δημιουργήθηκαν δύο ζωγραφιές γεωμετρικών σχημάτων που από συγκεκριμένη οπτική γωνία φαίνονται τρισδιάστατα χρησιμοποιώντας την τεχνική της προβολικής Γεωμετρίας.



## Βιβλιογραφία – Διαδικτυογραφία

### Αριθμοί Fibonacci και Χρυσή Τομή

- Εφημερίδα Ελευθεροτυπία, Αφιέρωμα "Θεωρία και Πράξη", Τεύχος 99 "Εν αρχή ην τα Μαθηματικά", Τρίτη 13 Φεβρουαρίου 2001
- Sigler, Laurence E. (trans.) (2002). Fibonacci's Liber Abaci. Springer-Verlag. ISBN 0-387-95419-8. Chapter II.12, pp. 404–405.
- <https://www.canva.com/learn/what-is-the-golden-ratio/>
- <https://www.goldennumber.net/art-composition-design/>
- <https://www.mathsisfun.com/numbers/golden-ratio.html>
- <http://wwwf.imperial.ac.uk/~mjfield1/mathartpub/math-art.pdf>
- <http://www.widewalls.ch/golden-ratio-examples-art-architecture-music/>
- <http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasmath/math-gymntegeas-xrystomi.pdf>
- <https://sites.google.com/site/antikeimenomathematikon/d-e-se-ge-l/fibonacci>
- <https://www.markmitchellpaintings.com/blog/the-fibonacci-sequence-in-artistic-composition/>
- <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html>
- [https://www.ted.com/talks/arthur\\_benjamin\\_the\\_magic\\_of\\_fibonacci\\_numbers?utm\\_campaign=tedsread--b&utm\\_medium=referral&utm\\_source=tedcomshare](https://www.ted.com/talks/arthur_benjamin_the_magic_of_fibonacci_numbers?utm_campaign=tedsread--b&utm_medium=referral&utm_source=tedcomshare)

### Γραμμικό σχέδιο – Καλλιτεχνικά ρεύματα

- <http://www.hdml.gr/pdfs/conferences/108.pdf>
- <http://1lyk-kerats.att.sch.gr/images/arxeia/painting.pdf>
- [http://www.arcmeletitiki.gr/images/uploads/pdf/arc\\_gen9.pdf](http://www.arcmeletitiki.gr/images/uploads/pdf/arc_gen9.pdf)
- <https://psifiakesergasies.files.wordpress.com/2011/11/iris.pdf>
- <http://www.survey.ntua.gr/files/articles/texnikes-sxediasis-2014.pdf>
- <http://lyk-dolian.ioa.sch.gr/wp-content/uploads/2014/10/geometry.pdf>
- <https://www.sciencealert.com/7-times-mathematics-became-art-and-blew-our-minds>
- <http://docplayer.gr/3799982-Pos-epireasan-diahronika-ta-mathimatika-tin-zografiki.html>
- <http://www.ogdoolykeio.gr/Folders/projects/texni->



[%20mathimatika/artmaths.pdf](#)

- <http://www.kathimerini.gr/441254/article/politismos/arxeio-politismoy/h-sxeshths-texnhs-me-ta-ma8hmatika>
- [https://www.huffingtonpost.com/dan-rockmore/math-is-art-is-math-is-ar\\_b\\_8854356.html?guccounter=1](https://www.huffingtonpost.com/dan-rockmore/math-is-art-is-math-is-ar_b_8854356.html?guccounter=1)
- <https://www.khanacademy.org/humanities/global-culture/beginners-guide-contemporary-art1/a/art-in-the-21st-century>
- <https://www.krionas.com/%CF%84%CE%B1-%CF%81%CE%B5%CF%8D%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1-%CF%83%CF%84%CE%B7-%CE%B6%CF%89%CE%B3%CF%81%CE%B1%CF%86%CE%B9%CE%BA%CE%AE/>

### **Κονστρουκτιβισμός, Κυβισμός, Έσερ, Βαν Γκονγκ**

- <http://www.mcescher.com/>
- <https://youtu.be/PMerSm2ToFY>
- <http://www.artmag.gr/art-history/art-history/>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/M.\\_C.\\_Escher](https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher)
- <https://www.britannica.com/biography/M-C-Escher>
- <http://news.in.gr/science-technology/article/?aid=722572>
- <http://www.artmag.gr/articles/media-keyhole/item/348-van-gogh>
- <http://platonicealms.com/minitexts/Mathematical-Art-Of-M-C-Escher/>
- <https://www.theguardian.com/artanddesign/2015/jun/20/the-impossible-world-of-mc-escher>
- [https://www.ted.com/talks/natalya\\_st\\_clair\\_the\\_unexpected\\_math\\_behind\\_van\\_gogh\\_s\\_starry\\_night/transcript#t-278500](https://www.ted.com/talks/natalya_st_clair_the_unexpected_math_behind_van_gogh_s_starry_night/transcript#t-278500)

### **Λεονάρντο Ντα Βίντσι**

- [https://3otiko.blogspot.gr/2015/12/blog-post\\_9.html](https://3otiko.blogspot.gr/2015/12/blog-post_9.html)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Sacred\\_geometry](https://en.wikipedia.org/wiki/Sacred_geometry)
- [http://mathforum.org/mathimages/index.php/Fibonacci\\_Numbers](http://mathforum.org/mathimages/index.php/Fibonacci_Numbers)
- <https://www.goldennumber.net/leonardo-da-vinci-golden-ratio-art/>
- <http://mysteriouswritings.com/the-secret-and-sacred-geometry-of-leonardos-the-last-supper-by-hayward-gladwin/>
- <http://www.newsbeast.gr/portrait/artthro/2101827/i-anagennisiaki-idiofi%CE>

[%90a-epistimis-ke-technis-leonarnto-nta-vintsi](#)

- [https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%BF%CF%85%CE%B4%CE%BF%CE%B2%CE%AF%CE%BA%CE%BF%CF%82\\_%CE%A3%CF%86%CF%8C%CF%81%CF%84%CF%83%CE%B1](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%BF%CF%85%CE%B4%CE%BF%CE%B2%CE%AF%CE%BA%CE%BF%CF%82_%CE%A3%CF%86%CF%8C%CF%81%CF%84%CF%83%CE%B1)
- [https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%B5%CE%BF%CE%BD%CE%AC%CF%81%CE%BD%CF%84%CE%BF\\_%CE%BD%CF%84%CE%B1\\_%CE%92%CE%AF%CE%BD%CF%84%CF%83%CE%B9](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%B5%CE%BF%CE%BD%CE%AC%CF%81%CE%BD%CF%84%CE%BF_%CE%BD%CF%84%CE%B1_%CE%92%CE%AF%CE%BD%CF%84%CF%83%CE%B9)
- [https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A6%CF%81%CE%B1%CE%B3%CE%BA%CE%AF%CF%83%CE%BA%CE%BF%CF%82\\_%CE%91%CE%84\\_%CF%84%CE%B7%CF%82\\_%CE%93%CE%B1%CE%BB%CE%BB%CE%AF%CE%B1%CF%82](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A6%CF%81%CE%B1%CE%B3%CE%BA%CE%AF%CF%83%CE%BA%CE%BF%CF%82_%CE%91%CE%84_%CF%84%CE%B7%CF%82_%CE%93%CE%B1%CE%BB%CE%BB%CE%AF%CE%B1%CF%82)
- <http://4gym-ptolem.koz.sch.gr/uploads/files/109/5.OI%20E%CE%A6%CE%95%CE%A5%CE%A1%CE%95%CE%A3%CE%95%CE%99%CE%A3%20%CE%A4%CE%9F%CE%A5%20%CE%9D%CE%A4%CE%91%20%CE%92%CE%99%CE%9D%CE%A4%CE%A3%CE%99.pdf>
- <http://www.iefimerida.gr/news/140149/%CE%BF-%C2%AB%CF%87%CF%81%CF%85%CF%83%CF%8C%CF%82%C2%BB-%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82-%CF%86-%CF%80%CF%89%CF%82-%CE%B7-%CE%B1%CF%81%CE%BC%CE%BF%CE%BD%CE%AF%CE%B1-%CF%84%CE%B7%CF%82-%CF%84%CE%AD%CF%87%CE%BD%CE%B7%CF%82-%CE%BA%CE%B1%CE%B9-%CF%84%CF%89%CE%BD-%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD-%CF%83%CF%85%CE%BD%CE%B4%CE%AD%CE%BF%CE%BD%CF%84%CE%B1%CE%B9-%CE%B1%CF%80%CF%8C-%CE%AD%CE%BD%CE%B1-%CE%B1%CF%80%CE%BB>

## Braque

- <http://www.georgesbraque.org/>
- <https://www.wikiart.org/en/georges-braque>
- <https://www.rizospastis.gr/story.do?id=1886456>
- [http://www.all-art.org/art\\_20th\\_century/braque1.html](http://www.all-art.org/art_20th_century/braque1.html)
- <https://www.britannica.com/biography/Georges-Braque>
- <http://www.gnomikologikon.gr/authquotes.php?auth=684>
- <http://www.artmag.gr/art-history/art-history/item/886-cubism>

- <http://hallofpeople.com/gr/bio/Braque.php#.WdX3qJT1pca>
- <https://www.biography.com/people/georges-braque-9224611>
- <http://www.palo.gr/multimedia/eidhseis-ellada/zwrz-mprak/7881224/>
- [http://www.theartstory.org/artist-braque-georges-artworks.htm#pnt\\_1](http://www.theartstory.org/artist-braque-georges-artworks.htm#pnt_1)
- <http://www.phillipscollection.org/events/2013-06-08-exhibition-braque>
- <https://www.moca-andros.gr/el/ektheseis/list/2003-georges-braque/typos/>
- <http://www.zoumboulakis.gr/m/picasso-33481.htm?lang=el&path=584937023>
- <https://www.artsy.net/article/editorial-artsy-insight-picasso-and-braques-friendly-rivalry>
- [https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%96%CF%89%CF%81%CE%B6\\_%CE%9C%CF%80%CF%81%CE%B1%CE%BA](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%96%CF%89%CF%81%CE%B6_%CE%9C%CF%80%CF%81%CE%B1%CE%BA)
- [http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/themata/eikastikes\\_technes/ekpedeftiko\\_iliko/istoria\\_technis/analisi/braque\\_clarineto.pdf](http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/themata/eikastikes_technes/ekpedeftiko_iliko/istoria_technis/analisi/braque_clarineto.pdf)
- <https://www.khanacademy.org/humanities/art-1010/early-abstract/cubism/a/braque-the-portuguese>
- [https://el.unionpedia.org/i/%CE%96%CF%89%CF%81%CE%B6\\_%CE%9C%CF%80%CF%81%CE%B1%CE%BA](https://el.unionpedia.org/i/%CE%96%CF%89%CF%81%CE%B6_%CE%9C%CF%80%CF%81%CE%B1%CE%BA)
- <https://dimartblog.com/tag/%CE%B6%CF%89%CF%81%CE%B6-%CE%BC%CF%80%CF%81%CE%B1%CE%BA/>

## **Kandinsky**

- <https://www.sansimera.gr/biographies/1114>
- [https://el.wikipedia.org/wiki/Βασίλι\\_Καντίνσκι](https://el.wikipedia.org/wiki/Βασίλι_Καντίνσκι)
- <http://users.sch.gr/eledornika/wordpress/?p=55>
- <http://users.sch.gr/eledornika/wordpress/?p=55>
- [http://wwwf.imperial.ac.uk/~hjjens/Math\\_Paint.pdf](http://wwwf.imperial.ac.uk/~hjjens/Math_Paint.pdf)
- [https://www.youtube.com/watch?v=OWQ-bPnjX\\_4](https://www.youtube.com/watch?v=OWQ-bPnjX_4)
- <http://texnografia.blogspot.gr/2014/10/blog-post.html>
- [http://texni-zoi.blogspot.gr/2013/03/blog-post\\_22.html](http://texni-zoi.blogspot.gr/2013/03/blog-post_22.html)
- <http://1lyk-kerats.att.sch.gr/images/arxeia/painting.pdf>
- <http://www.theartstory.org/artist-kandinsky-wassily.htm>
- <http://www.efsyn.gr/arthro/ta-mathimatika-toy-synaisthimatos>
- [http://taniamanesi-kourou.blogspot.gr/2014/09/blog-post\\_39.html](http://taniamanesi-kourou.blogspot.gr/2014/09/blog-post_39.html)
- [http://www.muse.gr/muse-e-journal/Kandinsky-Marlena\\_Zerva.pdf](http://www.muse.gr/muse-e-journal/Kandinsky-Marlena_Zerva.pdf)

- <https://www.guggenheim.org/artwork/artist/vasily-kandinsky/page/2>
- <http://lyk-dolian.ioa.sch.gr/wp-content/uploads/2014/10/geometry.pdf>
- <http://www.artmag.gr/articles/art-thinking/item/2059-wassily-kandinsky>
- <https://www.guggenheim.org/exhibition/the-geometry-of-kandinsky-and-malevich>
- <http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-C115/540/3555.14587/>
- <https://www.lectores.gr/%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%AF%CE%B1-%CF%84%CE%B7%CF%82-%CF%84%CE%AD%CF%87%CE%BD%CE%B7%CF%82/%CE%B1%CE%BD%CE%AC%CE%BB%CF%85%CF%83%CE%B7-%CE%AD%CF%81%CE%B3%CF%89%CE%BD/>
- <http://www.artlessons.gr/%CF%84%CE%AD%CF%87%CE%BD%CE%B5%CF%82/%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%AF%CE%B1-%CF%84%CE%B7%CF%82-%CF%84%CE%AD%CF%87%CE%BD%CE%B7%CF%82/%CE%BA%CE%B1%CE%BD%CF%84%CE%AF%CE%BD%CF%83%CE%BA%CE%B9-%CE%B1%CF%86%CE%B7%CF%81%CE%B7%CE%BC%CE%AD%CE%BD%CE%B7-%CF%84%CE%AD%CF%87%CE%BD%CE%B7>
- <http://www.elniple.com/%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B1%CE%B9%CE%BD%CF%89-%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B1-%CE%BC%CE%B5%CF%83%CE%B1-%CE%B1%CF%80%CE%BF-%CF%84%CE%B7%CE%BD-%CF%84%CE%B5%CF%87%CE%BD%CE%B7-%CE%BA%CE%B1%CE%BD%CF%84%CE%B9%CE%BD%CF%83%CE%BA%CE%B9-%CE%B5%CF%83%CE%B5%CF%81>

## Οφθαλμαπάτες

- [https://en.wikipedia.org/wiki/Optical\\_illusion](https://en.wikipedia.org/wiki/Optical_illusion)
- <http://www.optical-illusion-pictures.com/art.html>
- <https://www.demilked.com/3d-sidewalk-chalk-art/>
- [https://prezi.com/feez\\_7vo-wu0/math-optical-illusions/](https://prezi.com/feez_7vo-wu0/math-optical-illusions/)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Geometrical-optical\\_illusions](https://en.wikipedia.org/wiki/Geometrical-optical_illusions)
- <https://blog.miragestudio7.com/architecture-and-optical-illusion/422/>
- <https://www.boredpanda.com/magic-realism-paintings-rob-gonsalves/>

- <https://www.slideshare.net/apollospil/illusionism-in-architecture>
- <https://www.slideshare.net/LindseyfUF/presentation-optical-illusions>
- <https://plus.maths.org/content/visual-curiosities-and-mathematical-paradoxes>
- <http://www.architectureartdesigns.com/10-unbelievable-public-architectural-optical-illusions/>
- <https://www.pastemagazine.com/blogs/lists/2013/09/look-twice-10-artists-who-specialize-in-optical-illusion.html>