Ορισμός Συνάρτησης

1 Τι ονομάζουμε συνάρτηση;
Απάντηση: Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α (πεδίο ορισμού) αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β.

2 Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;
Απάντηση: Μια συνάρτηση στην οποία το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ενώ το Β συμπίπτει με το $\mathbb{R}$.

3 Τι λέγεται τιμή μίας συνάρτησης f στο x;
Απάντηση: Ο αριθμός $y = f(x)$ στον οποίο αντιστοιχίζεται το x.

4 Τι ονομάζεται εξαρτημένη και τι ανεξάρτητη μεταβλητή μιας συνάρτησης f;
Απάντηση: Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του Α, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το $y = f(x)$, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Πράξεις με Συναρτήσεις

5 Έστω οι συναρτήσεις f, g που ορίζονται σε ένα σύνολο Α. Πως ορίζονται:

- Το άθροισμα $S = f + g$; Απάντηση: $S(x) = f(x) + g(x), x \in A$.
- Η διαφορά $D = f - g$; Απάντηση: $D(x) = f(x) - g(x), x \in A$.
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$; Απάντηση: $P(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A$.
- Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$; Απάντηση: $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

6 Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy;
Απάντηση: Το σύνολο των σημείων $M(x, (f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

7 Πότε ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης f;
Απάντηση: Όταν $y = f(x)$.

8 Τι ονομάζεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f;
Απάντηση: Η εξίσωση $y = f(x)$.

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

9 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου

ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

10 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

11 Τι ονομάζουμε περιοχή ενός σημείου x_0;
Απάντηση: Κάθε ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_0.

12 Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;
Απάντηση: Όταν ισχύει $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

13 Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;
Απάντηση: Όταν ισχύει $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

14 Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;
Απάντηση: Όταν ισχύει $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε $x \in A$.

15 Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;
Απάντηση: Όταν ισχύει $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε $x \in A$.

16 Τι ονομάζονται ακρότατα μίας συνάρτησης;
Απάντηση: Τα μέγιστα και τα ελάχιστα της συνάρτησης (τοπικά ή ολικά).

Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

17 Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί ποια είναι τα όρια

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$; Απάντηση: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))$; Απάντηση: $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x)) = k\ell_1$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$; Απάντηση: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$; Απάντηση: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^\nu$; Απάντηση: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^\nu = \ell_1^\nu$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}$; Απάντηση: $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$

18 Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in A$;
Απάντηση: Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

19 Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής στο Α;
Απάντηση: Αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Εφαπτομένη Καμπύλης - Ορισμός Παραγώγου

20 Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C. Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο Α;
Απάντηση: $\varepsilon\varphi\omega = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

21 Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Α; Με τι είναι ίση η παράγωγός της στο x_0 και πώς συμβολίζεται;
Απάντηση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν το όριο $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, δηλαδή $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

22 Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$;
Απάντηση: Η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0.

23 Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

24 Τι ονομάζεται (πρώτη) παράγωγος μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το Α;
Απάντηση: Έστω Β το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Παράγωγος της f ονομάζεται η συνάρτηση f' με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

25 Τι ονομάζεται δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f;
Απάντηση: Η παράγωγος της συνάρτησης f', δηλαδή $f'' = (f')'$.

26 Με τι είναι ίση η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η τετμημένη του τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)$ και με τι είναι ίση η επιτάχυνσή του;
Απάντηση: $u(t) = x'(t)$ και, αν η συνάρτηση u είναι παραγωγίσιμη, $a(t) = u'(t) = x''(t)$.

Κανόνες Παραγώγισης

27 Κανόνες Παραγώγισης

- $(cf(x))' = cf'(x)$

- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Αποδείξεις:

- $(cf(x))' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c[f(x+h)-f(x)]}{h} = c\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x)$

- $(f(x)+g(x))' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)+g(x+h)-[f(x)+g(x)]}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)+g'(x)$$

Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

28 Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

Συνάρτηση	Σύνθετη συνάρτηση	Συνάρτηση	Σύνθετη συνάρτηση
$(c)' = 0$		$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$(x)' = 1$		$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$	$((f(x))^{\rho})' = \rho(f(x))^{\rho-1}f'(x)$	$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}f'(x)$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$	$(\ell n x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ell n f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$		

Αποδείξεις:

- Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0}0 = 0$
- Αν $f(x)=x$ τότε $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}1 = 1$

- Αν $f(x)=x^2$ τότε $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

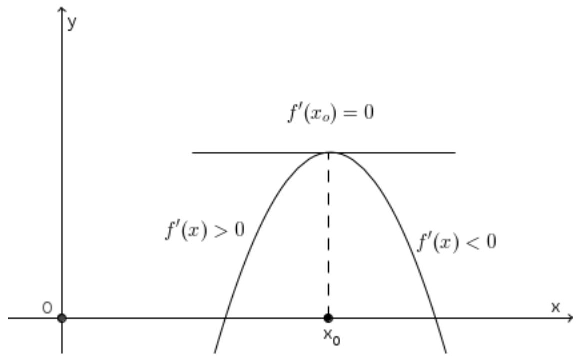
Το κριτήριο της 1ης παραγώγου

$\boxed{\textbf{29}}$ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

$\boxed{\textbf{30}}$ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

$\boxed{\textbf{31}}$ Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν: $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(a,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (a,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a,β) για $x=x_0$ μέγιστο.

x	a	x_0	β
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$	Μέγιστο	$\searrow$



$\boxed{\textbf{32}}$ Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν: $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(a,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (a,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β) τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a,β) για $x=x_0$ ελάχιστο.

x	a	x_0	β
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	Ελάχιστο	$\nearrow$