

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2022–2023**

**ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ Τάξης ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ**

Ο κλάδος των Μαθηματικών «Άλγεβρα» της Α΄ Λυκείου περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες είναι σημαντικό μέρος των μαθηματικών γνώσεων που χρειάζεται να έχει ο σύγχρονος πολίτης αλλά και ο/η μαθητής/-ήτρια που θα προσανατολιστεί σε σπουδές που περιέχουν μαθηματικά. Οι μαθητές/-ήτριες έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους/στις μαθητές/-ήτριες. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσα από την ανάπτυξη και σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές/-ήτριες να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις (αλγεβρική παράσταση, γράφημα, πίνακας αριθμητικών τιμών, λεκτικές διατυπώσεις) και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν με ουσιαστικό τρόπο από ψηφιακά περιβάλλοντα. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κ.λπ. περιέχονται στο ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) της Α΄ Λυκείου (ΦΕΚ 162/Β΄/22-1-2015).

**Εισαγωγικό Κεφάλαιο**

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην §Ε.1, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

**§Ε.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Οι μαθητές/-ήτριες αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονιστούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους/τις μαθητές/-ήτριες της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών/-τριών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ1, Δ2 του ΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.

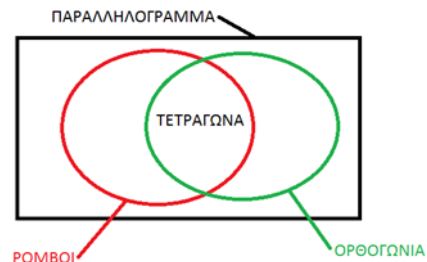
Επισημαίνεται ότι στόχος της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας είναι να υποστηρίξει τις έννοιες και διαδικασίες που συναντώνται σε επόμενες ενότητες (π.χ. στην επίλυση ανισώσεων και στις συναρτήσεις). Επομένως, αναμένεται οι μαθητές/-ήτριες να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τις έννοιες των συνόλων και των πράξεών τους στο πλαίσιο εννοιών και διαδικασιών των επόμενων κεφαλαίων.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Χρησιμοποιείτε τα διαγράμματα Venn για να αναπαραστήσετε τις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογώνιων, τετραγώνων και ρόμβων.

[Σχόλιο: Από το διάγραμμα μπορούν οι μαθητές/-ήτριες να διαπιστώσουν ακόμα ότι:

- Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.
- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, αλλά όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα, αλλά όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι ...



## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

(Προτείνεται να διατεθούν 21 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Με στόχους την εξομάλυνση της μετάβασης από το Γυμνάσιο στο Λύκειο και τη συμπλήρωση πιθανών κενών προτείνεται να αφιερωθεί χρόνος για την δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων που «μοντελοποιούν» ρεαλιστικές καταστάσεις (τέτοιες ιδέες περιλαμβάνονται στις Δ11, Δ13 του ΠΣ) και για την επανάληψη στοιχείων αλγεβρικού λογισμού (πράξεις πολυωνύμων, παραγοντοποίηση). Ωστόσο, σε μια επανάληψη με αυτούς τους στόχους, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι δεν συμπεριλαμβάνεται η εξάσκηση σε πολύπλοκους χειρισμούς και η ενασχόληση με ασκήσεις που η πολυπλοκότητα και δυσκολία τους υπερβαίνει εκείνες των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. Ειδικότερα:

### §2.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για τον λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί  $\frac{4}{3}$ , 1.333..., 1,010101..., 1,1010010001..., καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως  $\frac{4}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ , -1.333 κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες:  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  ή  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$ . Η συζήτηση και απόδοση νοήματος στην έννοια της ισοδυναμίας δύο σχέσεων και στη χρήση του αντίστοιχου συμβόλου χρειάζεται να επαναλαμβάνεται εκεί που αυτά εμφανίζονται, διότι, όπως πολλές έννοιες, δεν αναμένεται να κατακτηθεί οριστικά από τους/τις μαθητές/-ήτριες με την πρώτη φορά.

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές/-ήτριες, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού:  $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ . Η δραστηριότητα Δ6 του ΠΣ μπορεί να αξιοποιηθεί προς αυτή την κατεύθυνση.

### §2.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ4 του ΠΣ) καθώς και

στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες:  $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  και  $\beta = 0$ , ενώ  $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$  και στα σχόλια της παραγράφου.

### §2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να αξιοποιηθούν οι αποδείξεις των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών για να συζητηθεί αναλυτικά η μέθοδος απόδειξης (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής). Επιπλέον, είναι σκόπιμο να συζητηθεί ως εναλλακτική απόδειξη η εξέταση περιπτώσεων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ιδιότητας  $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$  να εξεταστούν οι περιπτώσεις i)  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$ , ii)  $\alpha > 0$  και  $\beta < 0$ , (ή  $\alpha < 0$  και  $\beta > 0$ ) και iii)  $\alpha < 0$  και  $\beta < 0$ . Η εξέταση των περιπτώσεων μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν γιατί ισχύει αυτή η ιδιότητα.

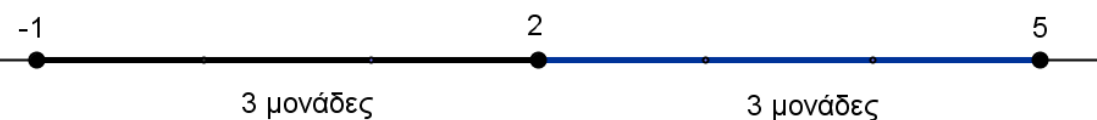
Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους/τις μαθητές/-ήτριες να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους/τις μαθητές/-ήτριες και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια δεν θα διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho, \text{ και}$$

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους/τις μαθητές/-ήτριες σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως, να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση  $|x - 2| < 3$  σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ.  $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow d(x, 2) < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ ).



Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων  $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$  και  $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$  ή  $x > \rho$ . Η δραστηριότητα Δ8 του ΠΣ και το γεωμετρικό μέρος των ασκήσεων 3 και 4 (Β' ομάδας) της σελ. 105 μπορούν να υποστηρίξουν την παραπάνω προσέγγιση.

### §2.4 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη  $n$ -οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να μη διδαχθούν οι ιδιότητες 3 και 4 (δηλαδή οι  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$  και  $\sqrt[n]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}^p$ ) εφόσον καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών.

Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων, όπως οι 1 έως 6, 9 και 11 της Α' ομάδας του βιβλίου και παρόμοιες. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα των αλγεβρικών μεθόδων έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης (εφόσον αυτός διατίθεται), προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ9 του ΠΣ.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση  $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$  δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

$$1^{\text{η}} \text{ απάντηση: } \left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{2 \cdot \frac{1}{4}}\right]^2 = \left[\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$2^{\text{η}} \text{ απάντηση: } \left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = (-2)^{\frac{2}{4} \cdot 2} = (-2)^1 = -2$$

### Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση  $x^y = a$ . Ειδικότερα:

#### §3.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες, έχουν διαπραγματευθεί στο Γυμνάσιο αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής  $ax + b = 0$ , της οποίας οι συντελεστές  $a$  και  $b$  είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής  $ax + b = 0$ , για δυο κυρίως λόγους: α) η διάκριση μεταξύ των εννοιών του αγνώστου και της παραμέτρου δεν είναι εύκολη και β) η διαδικασία της διερεύνησης γενικά είναι μια νέα διαδικασία για τις/τους μαθήτριες/-ήτριες.

Για τον λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στο σχόλιο της §3.1. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του  $\lambda$  (π.χ.  $\lambda = -1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 5$ ) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά

συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων (όπως η άσκηση 3 της Α' ομάδας).

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ο τιμοκατάλογος των TAXI στην Αθήνα περιλαμβάνει 1,19€ για την εκκίνηση και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ στα νησιά του Αιγαίου περιλαμβάνει 1,14€ για την εκκίνηση και 0,65€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης στην Αθήνα, αν διαθέτει 10€.

β) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης σε νησί του Αιγαίου, αν διαθέτει 10€.

γ) Αν στους νομούς της Θεσσαλίας η χρέωση για το TAXI περιλαμβάνει 2λ€ για την εκκίνηση και λ€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το  $\lambda$  την απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 10 €. Αν στο νομό Λαρίσης η χρέωση ανά χιλιόμετρο διαδρομής είναι 0,60€ και στο νομό Μαγνησίας 0,62€, να υπολογίσετε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης που διαθέτει 10€.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να συζητηθούν ασκήσεις όπως η 14 της Α' Ομάδας, και να εμπλουτιστούν με εξισώσεις, όπως η  $|x - 5| = -3$ , την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές/-ήτριες από την αρχή ως αδύνατη. Τέλος, όσον αφορά τις εξισώσεις που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες, προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών μόνο εξισώσεων (όπως οι ασκήσεις 9, 10 και 11 της Α' Ομάδας), με στόχο να αναδειχθεί η σύνδεση της παραγοντοποίησης με την επίλυση εξίσωσης.

### **§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής  $x^v = a$  να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

### **§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες**

Η επίλυση της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους/τις μαθητές/-ήτριες. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές/-ήτριες τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις 2ου βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του/της εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού (όπως η δραστηριότητα Δ23 του ΠΣ, καθώς και η ενδεικτική δραστηριότητα 1 που ακολουθεί).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

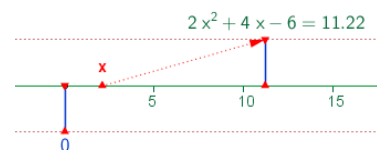
Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δυο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους/στις μαθητές/-ήτριες είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα  $S$  και γινόμενο  $P$ ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στα παραπάνω. Πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε άλλες ασκήσεις ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας και δεν προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών/-τριών.

Η επίλυση ασκήσεων με παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού (όπως αρκετές ασκήσεις της Β' Ομάδας) προτείνεται να εστιάζει στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου. Για αυτό η προτεραιότητα εδώ θα πρέπει να είναι εννοιολογική και όχι μεθοδολογική, δηλαδή να αναδεικνύει ότι μια εξίσωση με παράμετρο είναι πολλές εξισώσεις οι οποίες μπορεί να μελετηθούν μαζί. Έτσι, προτείνεται να γίνει μια επιλογή **λίγων** ασκήσεων **με μία μόνο παράμετρο** στις οποίες αρχικά οι μαθητές/-ήτριες θα δίνουν τιμές στην παράμετρο και θα παρατηρούν την επίδραση αυτών των τιμών στην εξίσωση. Για παράδειγμα στην άσκηση 4 της Α' Ομάδας θα μπορούσε πρώτα να ζητηθεί η αντικατάσταση του  $\mu$  με τις τιμές 0, 1 και 2 και να συζητηθεί πόσες λύσεις έχει σε κάθε περίπτωση. Στην ίδια κατεύθυνση θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν ενδεικτικά και οι ασκήσεις 6ι και 10 της Β' Ομάδας. Τα ψηφιακά εργαλεία μπορούν να συνεισφέρουν στην εννοιολογική κατανόηση (προτείνεται ενδεικτικά η δραστηριότητα που ακολουθεί). Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών/-τριών με παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού σε ασκήσεις όπως είναι οι ασκήσεις 1, 3, 5ι, της Β' Ομάδας οι οποίες εστιάζουν στους αλγεβρικούς χειρισμούς και όχι στον ρόλο της παραμέτρου δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και για επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132>

**Κεφάλαιο 4°**

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)



Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ειδικότερα:

#### **§4.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Οι μαθητές/-ήτριες, έχουν διαπραγματευθεί στο Γυμνάσιο αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών, ως εφαρμογή της αντίστοιχης υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους/τις μαθητές/ριες και ανισώσεις όπως οι  $|x - 5| < -3$  και  $|x - 5| > -3$ , των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές/-ήτριες. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1ου βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β' Ομάδας.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.

α) Πόσες φορές μπορεί να ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;

β) Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

#### **§4.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2ου βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α' Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές/-ήτριες να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν  $\Delta < 0$ , θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» και μνημονικούς κανόνες με τα σύμβολα «+» και «-», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές/-ήτριες το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2ου βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε και γιατί ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές. Για τον λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του προσήμου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση



ανισώσεων 2ου βαθμού (π.χ. η άσκηση 7 της Β' Ομάδας και στοιχεία της δραστηριότητας Δ.14 του ΠΣ και) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

Η διερεύνηση του προσήμου σε παραμετρικές ανισώσεις, η διερεύνηση δευτεροβάθμιας εξίσωσης που οδηγεί σε δευτεροβάθμια ανίσωση και η παραγοντοποίηση τριωνύμου με δύο παραμέτρους δεν περιλαμβάνονται στους στόχους της διδασκαλίας. Έτσι, προτείνεται να μην διαπραγματευθούν οι ασκήσεις 2, 3, 4, 5, 6 και 8 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 5x - 6 < 0$ .

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών  $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$  και  $M = (\sqrt{37})^2 - 5\sqrt{37} - 6$  αιτιολογώντας το συλλογισμό σας.

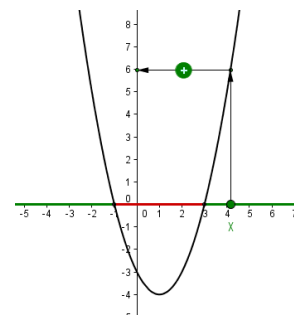
γ) Αν  $\alpha \in (-6, 6)$ , να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$  αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, παρά το ότι εμπλέκει τη γραφική παράσταση του τριωνύμου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, ώστε ο/η μαθητής/-ήτρια να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής  $x$ , ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή. Παράλληλα μαθαίνει για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης αλγεβρικών σχέσεων.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1752>

**Κεφάλαιο 5°**

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

**§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

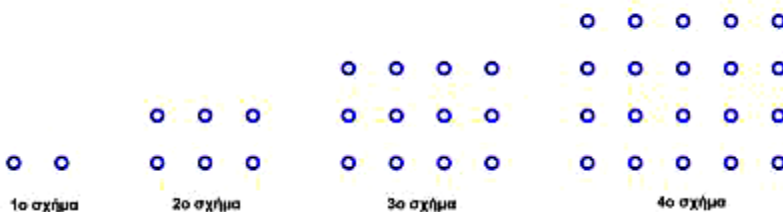
Το εισαγωγικό παράδειγμα της παραγράφου φέρνει τους/τις μαθητές/-ήτριες σε επαφή με την έννοια της ακολουθίας μέσα από μία κατάσταση της καθημερινής ζωής. Επειδή μέσα από τέτοιες καταστάσεις οι μαθηματικές έννοιες αποκτούν νόημα για τους/τις μαθητές/-ήτριες προτείνεται η διαπραγμάτευση του παραδείγματος στην τάξη.

Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών/-ήτριων με το συμβολισμό που τους/τις δυσκολεύει (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας  $a_n$ , αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό  $a_1$  που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής). Αυτή η διαδικασία μπορεί να υποστηριχτεί με την αξιοποίηση πινάκων τιμών όπως ο πίνακας του εισαγωγικού παραδείγματος της §5.1.

Επισημαίνεται ότι στόχος της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας είναι να υποστηρίξει τη διδασκαλία των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων και όχι τη συστηματική και βαθύτερη μελέτη των ακολουθιών. Επομένως, αναμένεται οι μαθητές/-ήτριες να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν την έννοια της ακολουθίας στο πλαίσιο της μελέτης των προόδων.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

i) Ποιον κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε από πόσα



σημεία θα αποτελείται το 7ο σχήμα ;

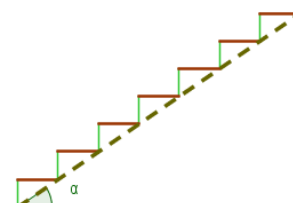
ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το 27ο σχήμα ;

**§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες**

Αρχικά οι μαθητές/-ήτριες χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. στις ασκήσεις 10 και 12 της Α΄ Ομάδας). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το  $n$ -οστό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν σε γενικά συμπεράσματα. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως οι ασκήσεις 12 της Α΄ Ομάδας και 9 και 12 της Β΄ Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής πρόοδου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο/η μαθητής/-ήτρια να οδηγηθεί μέσα



από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής προόδου.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155>

### §5.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ'αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνεται η παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές/-ήτριες κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του νιοστού όρου γεωμετρικής προόδου.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά 10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

### Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές/-ήτριες, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς/ες μαθητές/-ήτριες δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για τον λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές/-ήτριες, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν τα πλεονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η μονόπλευρη χρήση των συναρτήσεων ως αφορμή για εξάσκηση αλγεβρικών δεξιοτήτων, όπως η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών/-ητριών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού, δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Ειδικότερα:

### §6.1 - §6.2 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων (πχ. οι δραστηριότητες Δ.13, Δ.15 του ΠΣ), ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ12 και Δ16 του ΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση) και στον προσδιορισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής. Η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση των εννοιών. Η ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος, η γραφική επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων (για παράδειγμα, όταν δίνονται μόνο τα γραφήματα) και η γεωμετρική ερμηνεία αλγεβρικών συμπερασμάτων (όπως, για παράδειγμα, η γεωμετρική ερμηνεία της ύπαρξης ή μη λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης) μπορούν να συμβάλλουν στη νοηματοδότηση εννοιών και διαδικασιών.

Η συζήτηση της «Απόστασης σημείων» αναδεικνύει τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος και μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση πλευρών του συστήματος συντεταγμένων (σύνδεση του μήκους τμήματος με τις συντεταγμένες σημείου). Ωστόσο, η εξάσκηση των μαθητών/-ητριών σε πράξεις και αλγεβρικούς υπολογισμούς με αφορμή τον τύπο της απόστασης δεν υποστηρίζει αυτή την κατανόηση και προτείνεται η αποφυγή της. Επισημαίνεται ότι δεν θα διδαχτεί η εφαρμογή της σελίδας 155 (εξίσωση κύκλου).

### §6.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

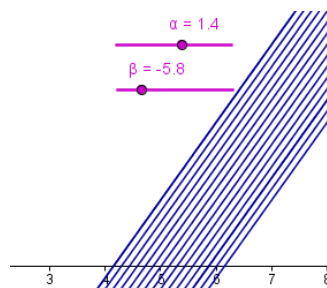
Οι μαθητές/-ήτριες έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας  $y = \alpha x + \beta$  στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  στη γραφική παράσταση της  $f(x) = \alpha x + \beta$ , ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα γ'γ στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές/-ήτριες παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να διερευνήσουν το ρόλο των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  (προτείνεται η δραστηριότητα Δ17 του ΠΣ). Η κλίση ευθείας ως λόγος μεταβολής βοηθά τους/τις μαθητές/-ήτριες να συνδέσουν τον συντελεστή διεύθυνσης με τη συγκεκριμένη γωνία  $\omega$  (όπως στο τρίγωνο ΑΚΒ του σχήματος που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου).

Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ18 και Δ19 του ΠΣ.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην  $y = \alpha x + \beta$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία,



μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη συνάρτηση  $f(x) = \alpha x + \beta$  μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας  $y = \alpha x + \beta$  και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για  $\alpha$  σταθερό και  $\beta$  μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774>

### ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ Τάξης ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΛ

**Η διαχείριση της ύλης είναι αυτή που προτείνεται για την Α΄ τάξη Ημερησίου ΓΕΛ με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.**

#### **Εισαγωγικό Κεφάλαιο §Ε.2**

(Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

#### **Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 13 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

Για την προσαρμογή της διδασκαλίας στον διατιθέμενο χρόνο, προτείνεται να δίνεται έμφαση στα βασικά παραδείγματα - εφαρμογές και στην ανάδειξη, μέσω αυτών, του περιεχομένου, (εννοιών και μεθόδων) της κάθε παραγράφου.