

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2011-12

ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι παρακάτω συνοπτικές σημειώσεις θεωρίας και ενδεικτική συλλογή ασκήσεων απευθύνονται στους μαθητές της Α΄ τάξης του ΕΠΑ.Λ για το σχολικό έτος 2011-12. Στόχος είναι να αποτελέσουν ένα εύχρηστο βοήθημα στο υποστηρικτικό μάθημα των Μαθηματικών έως την τελική συγγραφή ενός ειδικού διδακτικού εγχειριδίου. Η λειτουργικότητά τους έγκειται κυρίως στη συγκέντρωση σε ένα μόνο βοήθημα και με τη μέγιστη συντόμευση, διαφόρων θεμάτων από διαφορετικές τάξεις που θα απαιτούσαν πρόσβαση σε περισσότερα βιβλία.

Οι σημειώσεις όλων των κεφαλαίων αποτελούν επιλογή αυτούσιων τμημάτων από τα παρακάτω προγενέστερα διδακτικά βιβλία:

α) «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ των Τεχνικών και Επαγγελματικών Σχολών» των Ε. Γιανναράκη- Κ. Μακρή- Α. Μπέτση (Έκδοση 1988 ΟΕΔΒ)

β) «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΕΧΝΙΚΑ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ 1^{ΟΥ} ΚΥΚΛΟΥ» των Δ. Λιουδάκη- Β. Σακελλάρη- Χ. Τσίτουρα (Έκδοση Ε΄ 2003 ΟΕΔΒ)

γ) «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ» των Δ. Αργυράκη- Π. Βουργάνα- Κ. Μεντή- Σ. Τσικοπούλου- Μ. Χρυσοβέργη (Έκδοση 2007 ΟΕΔΒ).

Η αφομοίωση αυτής της ύλης είναι αναγκαία προϋπόθεση για την αποτελεσματική διδασκαλία των μαθημάτων τους.

Η διδακτική εμπειρία των καθηγητών του υποστηρικτικού μαθήματος είναι βέβαιο ότι θα τους επιτρέψει να επιφέρουν διορθώσεις, να εμπλουτίσουν το συγκεκριμένο διδακτικό υλικό και ο καθένας να το προσαρμόσει στις ανάγκες των μαθητών του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΚΑΙ ΡΗΤΟΥΣ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

ΜΟΡΦΕΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΜΟΝΩΝΥΜΑ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΣΥΝΑΛΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ- ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ –ΚΛΙΜΑΚΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΛΑΣΜΑΤΑ-ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ-ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΚΑΙ ΡΗΤΟΥΣ-ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΜΟΡΦΕΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ-ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Η έννοια του κλάσματος.

Έστω το τμήμα ΑΒ που έχει διαιρεθεί σε 8 ίσα μέρη.



Ξέρουμε ότι το μήκος του ΑΓ με μονάδα το ΑΒ εκφράζεται με το σύμβολο $\frac{3}{8}$, που λέγεται κλάσμα ή κλασματικός αριθμός.

Γι' αυτό γράφουμε

$$ΑΓ = \frac{3}{8} \cdot ΑΒ$$

Ο αριθμός 8, που μας φανερώνει σε πόσα ίσα κομμάτια διαιρέθηκε η μονάδα, λέγεται *παρονομαστής* και ο 3, που φανερώνει πόσα από αυτά περιέχονται στο ΑΓ, *αριθμητής*, ενώ και οι δύο μαζί *όροι του κλάσματος*.

Ξέρουμε επίσης ότι κάθε κλάσμα $\frac{a}{b}$ με a, b φυσικούς, $b \neq 0$ δηλώνει και το πηλίκο $a:b$.

Δηλαδή

$$a:b = \frac{a}{b}$$

Επομένως $\frac{a}{1} = a$, $\frac{a}{a} = 1$.

Ίσα κλάσματα. Απλοποίηση.

Ας πάρουμε το ευθύγραμμο τμήμα OA και ας το χωρίσουμε σε 8 ίσα μέρη, όπως δείχνει το επόμενο σχήμα.



Παρατηρούμε ότι

$$OD = \frac{1}{2} \cdot OA \quad \text{ή} \quad OD = \frac{2}{4} \cdot OA \quad \text{ή} \quad OD = \frac{4}{8} \cdot OA.$$

Αφού λοιπόν οι αριθμοί $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ παριστάνουν το μέτρο του OD με την ίδια μονάδα OA , θα είναι ίσοι. Δηλαδή

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Από την ισότητα $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ βλέπουμε ότι $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

Επίσης από την $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ έχουμε $2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$.

Γενικά ισχύει:

Δύο κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ίσα όταν $a\delta = b\gamma$.

Δηλαδή

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{όταν} \quad a\delta = b\gamma$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{8}{6} = \frac{8 \cdot 2}{6 \cdot 2}$$

Γενικά ισχύει ο κανόνας:

Αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους ενός κλάσματος με έναν αριθμό ή τους διαιρέσουμε με ένα κοινό διαιρέτη τους, προκύπτει ίσο κλάσμα.

Η διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με ένα κοινό τους διαιρέτη μας δίνει ένα κλάσμα ίσο, αλλά με μικρότερους όρους. Η μετατροπή ενός κλάσματος σε ένα άλλο ίσο του, αλλά με μικρότερους όρους λέγεται **απλοποίηση**. Π.χ.

$$\frac{24}{32} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{3}{4}, \quad \frac{100}{125} = \frac{4 \cdot 25}{5 \cdot 25} = \frac{4}{5}$$

Ένα κλάσμα στο οποίο δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση λέγεται **ανάγωγο**.

Κλάσματα με ίσους παρονομαστές λέγονται **ομώνυμα**, ενώ με διαφορετικούς **ετερόνυμα**.

Π.χ. τα κλάσματα $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ είναι ομώνυμα ενώ τα $\frac{7}{11}, \frac{2}{3}$ ετερόνυμα.

Κλάσματα με παρονομαστή το 10, 100, 1.000 κ.τ.λ.

Κλάσματα με παρονομαστή το 10, 100, 1.000,... λέγονται **δεκαδικά κλάσματα**. Ένα κλάσμα ανάγωγο μπορεί να γραφεί ως δεκαδικό κλάσμα, αν ο παρονομαστής του έχει ως μοναδικούς πρώτους παράγοντες το 2 ή το 5 ή και τους δύο. Π.χ.

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{13 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{1.625}{1.000}$$

Τα κλάσματα με παρονομαστή το 100 τα λέμε και **ποσοστά**. Το κλάσμα $\frac{a}{100}$ το διαβάζουμε και α στα 100, και γράφουμε **a%**. Το σύμβολο ‰ είναι το κλάσμα $\frac{b}{1.000}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Τα κλάσματα $\frac{1}{5}, \frac{3}{20}$ να εκφραστούν σε ποσοστά στα εκατό.

Λύση: Έχουμε

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 50}{20 \cdot 50} = \frac{150}{1.000} = 15\%$$

2. Ένας έμπορος αγόρασε ένα ψυγείο προς 120.000 δρχ. και το πούλησε 150.000 δρχ. Πόσο στα 100 πάνω στο κόστος, (δηλ. στην ημή αγοράς) κέρδισε:

Λύση: Ο έμπορος κέρδισε

$$150.000 - 120.000 = 30.000 \text{ δρχ.}$$

$$\text{ή τα } \frac{30.000}{120.000} \text{ του κόστους}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{30.000}{120.000} = \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Όστε ο έμπορος κέρδισε 25% πάνω στο κόστος.

3. Τα κλάσματα $\frac{1}{6}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}$ να τραπούν σε ομώνυμα με κοινό παρονομαστή το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους.

Λύση: Έχουμε Ε.Κ.Π.(6,9,12) = 36, οπότε

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{6}{36} \quad (\text{γιατί } 36:6 = 6)$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{20}{36} \quad (\text{γιατί } 36:9 = 4)$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36} \quad (\text{γιατί } 36:12 = 3)$$

Πολλές φορές γράφουμε και έτσι:

6 4 3

$$\left\{ \frac{1}{6}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \frac{1}{6}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \frac{6}{36}, \frac{20}{36}, \frac{21}{36} \right\}$$

Πράξεις με κλάσματα

(i) Πρόσθεση και αφαίρεση

α) Για να προσθέσουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτουμε τους αριθμητές και το άθροισμά τους το βάζουμε αριθμητή, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή

Ανάλογος κανόνας ισχύει και για την αφαίρεση. Π.χ.

$$i) \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{1+3+5}{7} = \frac{9}{7}$$

$$ii) \left(\frac{5}{9} + \frac{11}{9} \right) - \frac{3}{9} = \frac{(5+11)-3}{9} = \frac{13}{9}$$

Γενικά

$$\frac{a}{\delta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \pm \gamma}{\delta}$$

β) Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα τα τρέπουμε σε ίσα ομώνυμα κλάσματα και εφαρμόζουμε τον προηγούμενο κανόνα. Π.χ.

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad \overset{4}{\underbrace{\quad}} \quad \overset{1}{\underbrace{\quad}} \quad \overset{3}{\underbrace{\quad}} \\
 i) \quad \frac{2}{3} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} &= \frac{2}{3} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \quad [Αφού Ε.Κ.Π.(3,12,4) = 12] \\
 &= \frac{(8+7)+3}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\
 ii) \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{12} \right) - \frac{1}{4} &= \frac{(8+7)-3}{12} = \frac{12}{12} = 1
 \end{aligned}$$

Γενικά

$$\frac{a}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\delta} = \frac{a\delta}{\gamma\delta} \pm \frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} = \frac{a\delta \pm \beta\gamma}{\gamma\delta}$$

(ii) Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.

1. Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και το γινόμενο τους το βάζουμε αριθμητή και τους παρονομαστές τους και το γινόμενο το βάζουμε παρονομαστή. Π.χ.

$$\text{i)} \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{5 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{5}{35}$$

$$\text{ii)} \quad 9 \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\text{iii)} \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 3} = 1$$

Γενικά

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\gamma}{b\delta}$$

Κλάσματα όπως π.χ. τα $\left\{ \frac{3}{7}, \frac{7}{3} \right\}$ ή $\left\{ 9, \frac{1}{9} \right\}$ και γενικά $\left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{a} \right\}$ που έχουν γινόμενο τη μονάδα, λέγονται **αντίστροφα**.

2. Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα πολλαπλασιάζουμε το πρώτο (διαιρετέο) με το αντίστροφο του δεύτερου (διαιρέτη). Π.χ.

$$\text{i)} \quad \frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{24}{35}$$

$$\text{ii)} \quad 7 : \frac{3}{5} = 7 \cdot \frac{5}{3} = \frac{35}{3}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{35}$$

Γενικά

$$\frac{a}{b} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a\delta}{b\gamma}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Π.χ. έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{19}{5} &= \frac{5 \cdot 3 + 4}{5} && (\text{αφού } 19 \begin{array}{l} \overline{) 5} \\ 4 \end{array} \text{ και } 19 = 5 \cdot 3 + 4) \\ &= \frac{5 \cdot 3}{5} + \frac{4}{5} \\ &= 3 + \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Συνήθως αντί $3 + \frac{4}{5}$ γράφουμε την παράσταση $3\frac{4}{5}$, που ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

Σύνθετα κλάσματα.

Όπως το πηλίκο $3:5$ γράφεται $\frac{3}{5}$ έτσι και το πηλίκο $\frac{3}{5} : \frac{7}{6}$ συμφωνούμε να το γράφουμε με το σύμβολο.

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}}$$

που λέγεται **σύνθετο κλάσμα**. Από τη συμφωνία αυτή έχουμε

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{3}{5} : \frac{7}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 7}$$

Γενικά

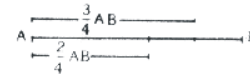
$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{b \cdot \gamma}}$$

Η σχέση της ανισότητας.

Ας πάρουμε ένα ευθ. τμήμα AB και ας σχηματίσουμε τα $\frac{3}{4}$ του AB και τα $\frac{2}{4}$ του AB (Σχ. 1).

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{3}{4} AB > \frac{2}{4} AB$$



Σχ. 1

Άρα
$$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$$

Γενικά,

Από δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι αυτό, που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να συγκρίνουμε τους αριθμούς

$$3 \text{ και } \frac{19}{7}$$

Έχουμε $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 7}{1 \cdot 7} = \frac{21}{7}$ αλλά $\frac{21}{7} > \frac{19}{7}$, άρα $3 > \frac{19}{7}$

Όμοίως, για τα $\frac{12}{13}$ και $\frac{13}{14}$ έχουμε, αν τα τρέψουμε σε ομώνυμα:

$$\frac{12}{13} = \frac{12 \cdot 14}{13 \cdot 14} = \frac{168}{13 \cdot 14} \text{ και } \frac{13}{14} = \frac{13 \cdot 13}{14 \cdot 13} = \frac{169}{13 \cdot 14}$$

οπότε βλέπουμε ότι $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}$.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι μπορούμε να συγκρίνουμε δύο κλασματικούς αριθμούς, αν τους γράψουμε στη μορφή δύο ομώνυμων κλασμάτων.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Δεκαδικές κλασματικές μονάδες.

Τα δεκαδικά κλάσματα

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1.000}, \frac{1}{10.000}, \dots$$

που είναι γραμμένα και σε τάξη ελαττούμενου μεγέθους από αριστερά προς τα δεξιά, λέγονται **δεκαδικές κλασματικές μονάδες**.

Για τις δεκαδικές κλασματικές μονάδες παρατηρούμε ότι

$$10 \cdot \frac{1}{10} = 1, \quad 10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}, \quad 10 \cdot \frac{1}{1.000} = \frac{1}{100}, \quad 10 \cdot \frac{1}{10.000} = \frac{1}{1.000}, \dots$$

Δηλαδή στην απεριόριστη προς τα δεξιά σειρά των κλασματικών μονάδων κάθε δεκαδική κλασματική μονάδα είναι δεκαπλάσια από την αμέσως επόμενη (προς τα δεξιά).

Ξέρουμε όμως ότι στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (φυσικοί αριθμοί) δέκα (απλές) μονάδες μας κάνουν μία δεκάδα, δέκα δεκάδες, μία εκατοντάδα κτλ.

Συνεπώς οι δεκαδικές κλασματικές μονάδες αποτελούν τη συνέχεια προς τα δεξιά των μονάδων διαφόρων τάξεων του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Δεκαδικοί αριθμοί.

Έστω το δεκαδικό κλάσμα $\frac{45.235}{1.000}$. Το κλάσμα αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{45.235}{1.000} &= \frac{40.000 + 5.000 + 200 + 30 + 5}{1.000} \\ &= 40 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1.000} \\ &= 4 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1.000} \quad (1) \end{aligned}$$

Το άθροισμα (1) συμφωνούμε να το γράφουμε:

$$45,235$$

όπου το κόμα (ή υποδιαστολή) χρησιμοποιείται για να χωρίσει τις ακέραιες μονάδες από τις δεκαδικές. Συγκεκριμένα:

αριστερά από την υποδιαστολή βρίσκονται κατά σειρά τα ψηφία των απλών μονάδων, των δεκάδων, των εκατοντάδων, κτλ. και δεξιά κατά σειρά βρίσκονται τα ψηφία των δεκάτων, των εκατοστών, κτλ.

Συνεπώς στη γραφή αυτή τηρούνται οι κανόνες γραφής των φυσικών αριθμών. Τα δεκαδικά κλάσματα με τη νέα αυτή γραφή λέγονται **δεκαδικοί αριθμοί**.

Ιδιότητες των δεκαδικών αριθμών.

Από τα ίσα κλάσματα

$$\frac{25}{10} = \frac{250}{100} = \frac{2.500}{1.000} = \dots$$

προκύπτουν οι ιδιότητες
Γενικά ισχύει $2,5 = 2,50 = 2,500 = \dots$

Στο τέλος του δεκαδικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού μπορούμε να παραθέσουμε οσαδήποτε μηδενικά ή να παραλείψουμε από το τέλος του όσα μηδενικά τυχόν υπάρχουν.

Αν τώρα τον 0,235 τον πολλαπλασιάσουμε επί 10, 100, 1.000,... έχουμε:

$$0,235 \cdot 10 = \frac{235}{1.000} \cdot 10 = \frac{235}{100} = 2,35$$

$$0,235 \cdot 100 = \frac{235}{1.000} \cdot 100 = \frac{235}{10} = 23,5$$

$$0,235 \cdot 1000 = \frac{235}{1.000} \cdot 1.000 = 235,0 = 235 \text{ κτλ.}$$

Γενικά ισχύει

Αν ένα δεκαδικό αριθμό τον πολλαπλασιάσουμε επί 10, 100, 1.000, ... η υποδιαστολή μετακινείται αντιστοίχως μία, δύο, τρεις,... θέσεις προς τα δεξιά.

$$0,235 : 10 = \frac{235}{1.000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{235}{10.000} = 0,0235$$

$$0,235 : 100 = \frac{235}{1.000} \cdot \frac{1}{100} = \frac{235}{100.000} = 0,00235 \text{ κτλ.}$$

Γενικά ισχύει ότι:

Αν ένα δεκαδικό αριθμό τον διαιρέσουμε δια 10, 100, 1.000, ... η υποδιαστολή μετακινείται μία, δύο, τρεις,... θέσεις προς τα αριστερά (αντίστοιχα).

Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών.

- *Πρόσθεση.*

$$\begin{aligned} 3,14 + 17,5 &= \frac{314}{100} + \frac{175}{10} = \frac{314 + 1.750}{100} \\ &= \frac{2.064}{100} \\ &= 20,64 \end{aligned}$$

Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι η πρόσθεση δεκαδικών αριθμών ακολουθεί τους κανόνες πρόσθεσης των φυσικών αριθμών.

Η διάταξη (I) δείχνει πρακτικά πώς γίνεται η προηγούμενη πρόσθεση. Στη διάταξη αυτή προσέχουμε οι υποδιαστολές να βρίσκονται στην ίδια στήλη.

$$(I) \quad \begin{array}{r} 3,14 \\ 17,50 \\ \hline 20,64 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{r} 3,14 \\ 17,5 \\ \hline 20,64 \end{array}$$

- *Αφαίρεση.*

$$\begin{aligned} 17,5 - 3,14 &= \frac{175}{10} - \frac{314}{100} = \frac{1.750 - 314}{100} \\ &= \frac{1.436}{100} \\ &= 14,36 \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε και με τη διάταξη (II).

$$(II) \quad \begin{array}{r} 17,50 \\ -3,14 \\ \hline 14,36 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{r} 17,5 \\ -3,14 \\ \hline 14,36 \end{array}$$

- *Πολλαπλασιασμός.*

$$\begin{aligned} 4,25 \cdot 2,7 &= \frac{425}{100} \cdot \frac{27}{10} \\ &= \frac{11.475}{1.000} = 11,475 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

- α) Ο αριθμητής του κλάσματος $\frac{11.475}{1.000}$ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τους δεδομένους δεκαδικούς σύμφωνα με τους κανόνες του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών.
- β) Ο παρονομαστής ορίζει ότι στο γινόμενο, που θα βρούμε, χωρίζουμε με υποδιαστολή από το τελευταίο ψηφίο του τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχουν μαζί οι παράγοντες.
- Η διάταξη της πράξης γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{r} 4,25 \\ \underline{2,7} \\ 2.975 \\ \underline{8\ 50} \\ 11\ 475 \end{array}$$

Διαίρεση δεκαδικών αριθμών.

1. Ο διαιρέτης είναι φυσικός αριθμός ($\neq 0$)

Έστω π.χ. οι διαιρέσεις (i) $35,4:15$ (ii) $2,3:3$

(i) Έχουμε

$$\begin{aligned} 35,4:15 &= 35,40:15 = \frac{354}{10} : 15 = \frac{3.540}{100} \cdot \frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{100} \cdot \frac{3.540}{15} = \frac{1}{100} (3540:15) = \frac{236}{100} = 2,36 \end{aligned}$$

Η διαίρεση αυτή γίνεται σύντομα με την παραπλεύρως γνωστή διάταξη.

Στη διάταξη αυτή, όταν δεξιά από το πρώτο υπόλοιπο 5 τοποθετούμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του διαιρετέου, το 4,

$$\begin{array}{r|l} 35,40 & 15 \\ 54 & 2,36 \\ 90 & \\ 0 & \end{array}$$

σχηματίζεται αριθμός, που σημαίνει δέκατα δηλ. $\frac{54}{10} = 5,4$. Επομένως το 2^ο ψηφίο του πηλίκου

θα είναι δέκατα. Γι' αυτό και θέτουμε πριν από αυτό υποδιαστολή. Όμοια το νέο υπόλοιπο είναι εκατοστά ($\frac{90}{100}$) και το νέο ψηφίο του πηλίκου θα είναι επίσης εκατοστά.

(ii) Έχουμε πάλι.

$$2,3:3 = \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{23}{3} = \frac{23}{30}$$

Παρατηρούμε ότι:

Το $\frac{23}{30}$ δε διαιρείται με το 3, δηλαδή το $\frac{23}{30}$ δεν είναι δεκαδικό κλάσμα.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$2,3:3 = \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{3} \cdot \frac{1}{10} = \left(7 + \frac{2}{3}\right) \frac{1}{10} = \frac{7}{10} + \frac{2}{30} = 0,7 + \frac{2}{30}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα βρίσκουμε, αν κάνουμε τη διαίρεση, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή.

$$\begin{array}{r|l} 2,3 & 3 \\ 2 & 0,7 \end{array}$$

Αν παραλείψουμε τα $\frac{2}{30}$ και θεωρήσουμε για πηλίκο το 0,7 τότε θα λέμε ότι το 0,7 είναι πηλίκο κατά⁽¹⁾ προσέγγιση δεκάτου και γράφουμε: $2,3:3 \approx 0,7$.

Παραλείποντας τα $\frac{2}{30}$ κάνουμε «λάθος» μικρότερο του $\frac{1}{10}$, (αφού $\frac{2}{30} < \frac{1}{10}$) γι' αυτό λέμε ότι το πηλίκο της διαίρεσης $2,3:3$ είναι $0,7$ κατά προσέγγιση δεκάτου. Επειδή όμως είναι μικρότερο του πραγματικού: $0,7 + \frac{2}{30}$ θα λέμε ότι το πηλίκο υπολογίσθηκε κατά προσέγγιση δεκάτου και με έλλειψη.

Αν πάρουμε όμως αντί του $0,7$ το $0,8$ δηλ. αν αυξήσουμε το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο κατά μία μονάδα, πάλι κάνουμε «λάθος», γιατί τώρα το πηλίκο, που πήραμε, είναι μεγαλύτερο του πραγματικού, $0,7 + \frac{2}{30}$ κατά $\frac{1}{30}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το πηλίκο υπολογίστηκε κατά προσέγγιση δεκάτου αλλά με υπεροχή.

Αν θέλουμε μεγαλύτερη προσέγγιση, επειδή

$$2,3:3 = \frac{230}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{230}{3} \cdot \frac{1}{100} = (76 + \frac{2}{3}) \frac{1}{100} = \frac{76}{100} + \frac{2}{300} = 0,76 + \frac{2}{300}$$

έχουμε

$$2,3:3 \approx 0,76$$

(πηλίκο κατά προσέγγιση εκατοστού).

Επίσης επειδή

$$2,3:3 = \frac{2.300}{1.000} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2.300}{3} \cdot \frac{1}{1.000} = (766 + \frac{2}{3}) \frac{1}{1.000} = \frac{766}{1.000} + \frac{2}{3.000} = 0,766 + \frac{2}{3.000}$$

έχουμε

$$2,3:3 \approx 0,766$$

(πηλίκο κατά προσέγγιση χιλιοστού)

κτλ.

Τα ίδια αποτελέσματα παίρνουμε αν θέσουμε ένα ή περισσότερα μηδενικά δεξιά του διαιρέτου και συνεχίσουμε τη διαίρεση, όπως π.χ. παρακάτω:

πηλίκο κατά προσέγγιση εκατοστού,

$$\begin{array}{r|l} 2,3 & 3 \\ 20 & 0,76 \\ 2 & \end{array}$$

Με έλλειψη: $0,76$

Με υπεροχή: $0,77$

πηλίκο κατά προσέγγιση χιλιοστού.

$$\begin{array}{r|l} 2,3 & 3 \\ 20 & 0,766 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Με έλλειψη: $0,766$

Με υπεροχή: $0,767$

2) Ο διαιρέτης είναι δεκαδικός.

Έστω π.χ.

i) $0,45:1,5$

ii) $49:0,72$

⁽¹⁾λέμε και «με προσέγγιση δεκάτου».

i) Επειδή

$$0,45:1,5 = \frac{45}{100} : \frac{15}{10} = \frac{45}{100} \cdot \frac{10}{15} = \frac{45}{10} \cdot \frac{1}{15} = 4,5:15$$

η περίπτωση αυτή ανάγεται στη διαίρεση με διαιρέτη φυσικό αριθμό.

(ii) Όμοια

$$49:0,72 = 49 : \frac{72}{100} = \frac{49 \cdot 100}{72} = 4.900:72$$

Επομένως, όταν ο διαιρέτης είναι δεκαδικός, κάνουμε το διαιρέτη ακέραιο πολλαπλασιάζοντας διαιρετέο και διαιρέτη, κατάλληλα, με 10, 100 κτλ.

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

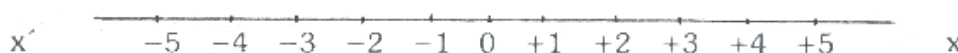
Ακέραιοι αριθμοί και οι πράξεις με ακεραίους.

Ξέρουμε ότι το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots \}$$

και αποτελείται από τους *θετικούς ακέραιους*: +1, +2, +3, +4,..., που μπορούμε να τους ταυτίσουμε με τους φυσικούς 1, 2, 3, 4,..., τους *αρνητικούς ακέραιους* -1, -2, -3,... και το 0.

Οι ακέραιοι, όπως και οι φυσικοί, μπορούν να «παρασταθούν» με σημεία μιας ευθείας, όπως δείχνει το επόμενο σχήμα.



Σχ. 2

Σε κάθε ακέραιο αντιστοιχεί και ένα σημείο της ευθείας. Το σημείο Ο αντιπροσωπεύει το 0. Τα σημεία, που αντιπροσωπεύουν τους θετικούς ακέραιους, βρίσκονται δεξιά του Ο ενώ εκείνα, που αντιπροσωπεύουν τους αρνητικούς ακέραιους, αριστερά του Ο.

Δυο αριθμοί, που διαφέρουν μόνο ως προς το πρόσημο, π.χ. οι -3 και $+3$, αντιπροσωπεύονται από σημεία που ισαπέχουν από το O . Οι αριθμοί αυτοί λέγονται *αντίθετοι* και λέμε ότι έχουν την ίδια **απόλυτη τιμή**. Αυτό το δηλώνουμε με τη γραφή:

$$|-3| = |+3| = 3$$

Οι πράξεις μεταξύ των ακεραίων γίνονται με τους εξής κανόνες:

1. Για να προσθέσουμε ομόσημους ακέραιους προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το ίδιο πρόσημο, που έχουν οι προσθετέοι αυτοί.

Π.χ.

$$(+2) + (+6) = 8 \quad \text{ή} \quad \text{απλά} \quad 2 + 6 = 8 \quad (\text{παραλείπουμε το σύμβολο } + \text{ της πρόσθεσης})$$

$$(-3) + (-6) = -9 \quad \text{ή} \quad \text{απλά} \quad -3 - 6 = -9$$

2. Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ακέραιους αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους (τη μικρότερη από τη μεγαλύτερη) και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο του ακεραίου, που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Π.χ.

$$(+2) + (-6) = -4 \quad \text{ή} \quad \text{απλά} \quad 2 - 6 = -4 \quad (\text{παραλείπουμε στο σύμβολο } + \text{ της πρόσθεσης})$$

Ειδικά το άθροισμα δύο αντιθέτων αριθμών είναι μηδέν. Π.χ.

$$(-3) + (+3) = 0$$

3. Για να αφαιρέσουμε ένα ακέραιο β από ένα άλλο α αρκεί στον α να προσθέσουμε τον αντίθετο του β .

Δηλαδή:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Έτσι, π.χ. έχουμε $(+28) - (-16) = (+28) + (+16) = +44$

ή απλά $(+28) - (-16) = 28 + 16 = 44$ (παραλείπουμε το $+$ της πρόσθεσης).

4. Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ακέραιους πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο (+), αν οι ακέραιοι είναι ομόσημοι, (-) αν είναι ετερόσημοι.

Π.χ.

$$(-3) \cdot (-5) = + (3 \cdot 5) = 15, \quad (+3) \cdot (+5) = + (3 \cdot 5) = 15, \quad (-3) \cdot (+5) = - (3 \cdot 5) = -15$$

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ακέραιων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

Ιδιότητες	Πρόσθεση (+)	Πολλαπλασιασμός (·)
Προσεταιριστική Αντιμεταθετική	$(a+b)+\gamma = a+(\beta+\gamma)$ $a+b = \beta+a$	$(a\beta)\gamma = a(\beta\gamma)$ $a\beta = \beta a$
Επιμεριστική	$a(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)a = a\beta + a\gamma$	

Διαίρεση του ακεραίου a δια του ακεραίου $\beta, \beta \neq 0$, σημαίνει να βρούμε ένα ακέραιο, έστω π , με την ιδιότητα: $\beta \cdot \pi = a$. Τέτοιος ακέραιος υπάρχει (μοναδικός), μόνο αν ο φυσικός αριθμός $|a|$ είναι διαιρετός δια του φυσικού αριθμού $|\beta|$, ισχύει δε τότε για το «πηλίκο», $a:\beta$,

$\beta \neq 0$, ο κανόνας:

5. Αν ο διαιρετέος a και ο διαιρέτης β είναι ομόσημοι, το πηλίκο είναι θετικό, αν είναι ετερόσημοι, το πηλίκο είναι αρνητικό.

Η απόλυτη τιμή του πηλίκου ισούται με το πηλίκο των απόλυτων τιμών.

(Κανόνας προσήμων)

Π.χ.

$$\begin{aligned} (+15) : (+3) &= + (15:3) = 5, \\ (-15) : (-3) &= + (15:3) = +5, \\ (-15) : (+3) &= - (15:3) = -5. \end{aligned}$$

Επειδή, όπως είδαμε, η αφαίρεση ανάγεται στην πρόσθεση, γι' αυτό, πολλές φορές, μια σειρά από προσθέσεις και αφαιρέσεις ακέραιων, που λέγεται *αλγεβρικό άθροισμα* γράφεται με τη μορφή ενός απλού αθροίσματος. Π.χ.

$$(-3) + (-1) - (+5) + (+7) = (-3) + (-1) + (-5) + (+7)$$

$$\begin{aligned}
 &= -3 - 1 - 5 + 7 && \text{(παραλείπουμε το } + \text{ της πρόσθεσης)} \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα αλγεβρικό άθροισμα, που όροι του είναι αλγεβρικά αθροίσματα, π.χ. το $-(-3 + 3) + (5 - 7) - (-2 + 3)$, επειδή δύο αθροίσματα με αντίθετους όρους είναι αντίθετοι αριθμοί, γι' αυτό μπορούμε να παραλείψουμε τις παρενθέσεις ακολουθώντας τους εξής κανόνες:

- Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το (+) γράφουμε τους προσθετέους της παρένθεσης με το ίδιο πρόσημο (όπως είναι).
- Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το (-) γράφουμε τους προσθετέους της παρένθεσης με αντίθετα πρόσημα. Π.χ.

$$(i) -(-3 + 1) + (5 - 7) - (-2 + 3) = 3 - 1 + 5 - 7 + 2 - 3$$

$$(ii) -(-3 + 1) + [- (5 - 7)] = 3 - 1 - (5 - 7) = 3 - 1 - 5 + 7$$

Κλάσματα με όρους ακέραιους αριθμούς.

Το πηλίκο $a:b$, $b \neq 0$, δύο οποιωνδήποτε ακέραιων ξέρουμε ότι παριστάνεται και με τη μορφή του κλάσματος $\frac{a}{b}$. Ο a ονομάζεται αριθμητής και ο b παρανομαστής και οι δύο μαζί όροι του κλάσματος. Επειδή λοιπόν $a:b = \frac{a}{b}$ έχουμε:

$$\frac{\lambda}{\lambda} = 1, \quad (\lambda \neq 0), \quad \frac{\mu}{1} = \mu, \quad \frac{0}{\kappa} = 0, \quad (\kappa \neq 0)$$

Δεχόμαστε ότι ένα κλάσμα $\frac{a}{b}$ είναι ίσο με το $\frac{\gamma}{\delta}$ όταν $a\delta = b\gamma$. Δηλαδή.

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ όταν } a \cdot \delta = b \cdot \gamma, \quad b \neq 0, \quad \delta \neq 0$$

Έτσι π.χ. έχουμε

$$i) \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7} \quad \text{αφού} \quad (-5) \cdot 7 = 5 \cdot (-7)$$

$$ii) \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7} \quad \text{αφού} \quad 5 \cdot 7 = (-5) \cdot (-7)$$

- Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι σ' ένα κλάσμα με όρους ακέραιους:
- Όταν αλλάζουμε τα πρόσημα των όρων του προκύπτει κλάσμα ίσο με αυτό (πρδ. i)
- Ο παρονομαστής μπορεί να θεωρείται πάντοτε θετικός ακέραιος αφού (πρδ. ii), αν είναι αρνητικός, αλλάζουμε τα πρόσημα και των δύο όρων του.

Έτσι στα επόμενα θα θεωρούμε κλάσματα με προσημασμένο μόνο τον αριθμητή. Ένα τέτοιο κλάσμα, αν έχει αρνητικό αριθμητή, θα είναι αρνητικό, ενώ, αν έχει θετικό αριθμητή, θα είναι θετικό. Συνήθως το πρόσημο του κλάσματος το γράφουμε μπροστά από τη νουαμμή.

Π.χ.

$$\frac{+2}{5} = +\frac{2}{5}, \quad \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Ακόμη επειδή π.χ.

$$i) \quad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot (-2)}{3 \cdot (-2)} \quad \text{αφού } 5 \cdot 3 \cdot (-2) = 3 \cdot 5 \cdot (-2)$$

$$ii) \quad \frac{-21}{9} = \frac{(-21):3}{9:3} \quad \text{αφού } 5 \cdot 3 \cdot (-2) = 3 \cdot 5 \cdot (-2)$$

καταλαβαίνουμε ότι:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \gamma}{b \cdot \gamma} \quad (\gamma \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a:\delta}{b:\delta} \quad (\delta, \text{ κοινός διαιρέτης των } a, b) \text{ (Απλοποίηση)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Τα κλάσματα με ακέραιους όρους λέγονται και **ρητοί αριθμοί**. Επειδή κάθε ακέραιος γράφεται ως κλάσμα με παρονομαστή τη μονάδα συμπεραίνουμε ότι κάθε ακέραιος είναι ρητός αριθμός.

Πράξεις στο σύνολο των ρητών.

• Πρόσθεση

Όταν οι ρητοί αντιπροσωπεύονται από ομώνυμα **κλάσματα** προσθέτουμε τους αριθμητές τους αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή, **ενώ όταν** αντιπροσωπεύονται από ετερόνυμα κλάσματα τα **τρέπουμε σε ομώνυμα**. Π.χ.

$$(i) \quad \frac{5}{7} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{15}{21} + \left(\frac{-7}{21}\right) = \frac{15 + (-7)}{21} = \frac{8}{21}$$

$$(ii) \quad -1 + \frac{5}{7} + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{21}{21} + \frac{15}{21} + \left(\frac{-7}{21}\right) = \frac{-21}{21} + \frac{15}{21} + \frac{-7}{21}$$

$$= \frac{-21 + 15 - 7}{21} = -\frac{13}{21}$$

$$(iii) \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right) = \frac{-5+5}{3} = \frac{0}{3} = 0 \quad \text{και} \quad \left(+\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5-5}{3} = 0$$

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι αντίθετοι ρητοί έχουν άθροισμα μηδέν. Από τα παραδείγματα καταλαβαίνουμε ότι:

Η πρόσθεση των ρητών ανάγεται σε πρόσθεση ακέραιων.

- **Αφαίρεση**

Για να αφαιρέσουμε από ένα ρητό έναν άλλο προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου. Π.χ.

$$2 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 2 + \left(+\frac{5}{3}\right) = \left(+\frac{6}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

Όπως σ' ένα άθροισμα ακεραιών έτσι και σ' ένα άθροισμα ρητών, με δύο ή περισσότερους προσθετέους, παραλείπουμε τα σύμβολα + της πρόσθεσης. Έτσι π.χ. έχουμε

$$\left(+1\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{11}{3}\right) + \left(-\frac{1}{7}\right) + (-7) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{11}{3} - \frac{1}{7} - 7$$

Όταν έχουμε μια σειρά από προσθέσεις και αφαιρέσεις ρητών, λέμε ότι έχουμε ένα *αλγεβρικό άθροισμα*. Στα αλγεβρικά αυτά αθροίσματα ακολουθούμε τους κανόνες της (§ 1.22).

- **Πολλαπλασιασμός.**

Για να πολλαπλασιάσουμε ρητούς, πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και το γινόμενο το βάζουμε αριθμητή, και τους παρανομαστές τους και το γινόμενο το βάζουμε παρανομαστή. Π.χ.

$$(i) \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{5 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{3}{35}$$

$$(ii) (-9) \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{9}{9}$$

$$(iii) \left(-\frac{3}{7}\right) \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 7} = 1$$

Ρητοί, όπως π.χ. -9 , $-\frac{1}{9}$, που έχουν γινόμενο 1, λέγονται **αντίστροφοι**.

- **Διαίρεση.**

Για να διαιρέσουμε ένα ρητό με ένα άλλο πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Π.χ.

$$(i) \left(-\frac{7}{12}\right) : \frac{5}{8} = \frac{(-7)}{12} \cdot \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}$$

$$(ii) 5 : \left(-\frac{6}{7}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{35}{6}$$

Σύγκριση (διάταξη) των ρητών.

Αν έχουμε δυο οποιουσδήποτε ρητούς α και β , που η διαφορά τους $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός, λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β ή ο β είναι μικρότερος του α και συμβολίζουμε αντίστοιχα.

$$\alpha > \beta \quad \text{ή} \quad \beta < \alpha$$

Π.χ. είναι

$$(i) \quad \frac{3}{4} > -1 \quad \text{γιατί} \quad \frac{3}{4} - (-1) = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4} \quad (\text{θετικός αριθμός})$$

$$(ii) \quad -1 > -\frac{17}{3} \quad \text{γιατί} \quad -1 - \left(-\frac{17}{3}\right) = -\frac{3}{3} + \frac{17}{3} = \frac{14}{3} \quad (\text{θετικός αριθμός})$$

$$(iii) \quad -5 < 0 \quad \text{γιατί} \quad -5 - 0 = -5 \quad (\text{αρνητικός αριθμός})$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Η έννοια της δύναμης με εκθέτη ακέραιο.

Ξέρουμε ότι για συντομία μπορούμε να γράφουμε:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5, \quad a \cdot a = a^2, \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Γενικά

Αν a είναι ένας αριθμός και n φυσικός μεγαλύτερος του 0, τότε ορίζουμε:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

n παράγοντες

Το σύμβολο a^n διαβάζεται a στη n ή «νιοστή δύναμη του a ».

Επίσης, επεκτείνοντας την έννοια της δύναμης, ορίζουμε:

$$a^0 = 1 \quad \text{και} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{για} \quad a \neq 0 \quad \text{και} \quad n \text{ φυσικό αριθμό.}$$

Ο a λέγεται **βάση** και ο n **εκθέτης** της δύναμης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- (i) Το $(-2)^4$ είναι η τέταρτη δύναμη του -2 και ισούται με το $(-2)(-2)(-2)(-2) = 16$
- (ii) Το $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ είναι η δεύτερη δύναμη του $\frac{3}{4}$ ή, όπως συνήθως λέγεται, το **τετράγωνο** του $\frac{3}{4}$ και ισούται με $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.
- (iii) Το $(-1)^3$ είναι η τρίτη δύναμη του -1 ή, όπως συνήθως λέγεται, ο **κύβος** του -1 και ισούται με $(-1)(-1)(-1) = -1$.
- (iv) $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Εύκολα προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

Η δύναμη a^v , με v θετικό, είναι:

- Θετικός αριθμός, αν $a > 0$
- Θετικός αριθμός, αν $a < 0$ και v άρτιος.
- Αρνητικός αριθμός, αν $a < 0$ και v περιττός.

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση δυνάμεων. Ιδιότητες.**1. Δυνάμεις με ίσους εκθέτες. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.**

Έχουμε π.χ.

$$3^2 \cdot 5^2 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$$

$$\frac{3^2}{5^2} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Γενικά ισχύουν:

$$\begin{aligned} a^v \cdot b^v &= (a \cdot b)^v \\ \frac{a^v}{b^v} &= \left(\frac{a}{b}\right)^v, \quad b \neq 0 \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- (i) $2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 10^2$
- (ii) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{6^3}$
- (iii) $(3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3$

2. Δυνάμεις με ίσες βάσεις. – Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.

Έχουμε π.χ.

$$3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 3^{4+2}$$

$$3^4 : 3^2 = \frac{3^4}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 3^{4-2}$$

$$3^2 : 3^4 = \frac{3^2}{3^4} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2} = 3^{2-4}$$

Γενικά ισχύουν:

$$\begin{aligned} a^{\mu} \cdot a^{\nu} &= a^{\mu+\nu} \\ a^{\mu} : a^{\nu} &= \frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = a^{\mu-\nu} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$(i) \quad 7^6 : 7^5 = 7^{6-5} = 7^1 = 7$$

$$(ii) \quad 7^6 : 7^6 = 7^{6-6} = 7^0 = 1$$

$$(iii) \quad 7^3 : 7^5 = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

3. Ύψωση δύναμης σε άλλη δύναμη.

Έχουμε: π.χ.

$$(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^{2 \cdot 4}$$

$$(3^{-2})^4 = 3^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-2} = 3^{(-2) \cdot 4}$$

$$(3^{-2})^{-4} = \frac{1}{(3^{-2})^4} = \frac{1}{3^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-2}} = \frac{1}{3^{(-2) \cdot 4}} = \frac{1}{3^{-(2 \cdot 4)}} = 3^{2 \cdot 4} = 3^{(-2) \cdot (-4)}$$

Γενικά ισχύει:

$$(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu \cdot \nu}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$(i) (2^3)^{-6} = 2^{-18} = \frac{1}{2^{18}}$$

$$(ii) \frac{(-2)^{-4}}{(-9)^{-4}} = \frac{\frac{1}{(-2)^4}}{\frac{1}{(-9)^4}} = \frac{9^4}{2^4} = \left(\frac{9}{2}\right)^4$$

$$(iii) \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{5^2}} = \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Αξιόλογες γραφές δεκαδικών αριθμών.

Έστω οι αριθμοί 2.137 και 45,637

Παρατηρούμε ότι:

$$(i) \quad 2.137 = 2.000 + 100 + 30 + 7 = \mathbf{2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0} \quad (\text{βλέπε και § 1.2})$$

$$(ii) \quad 45,6327 = 40 + 5 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1}{1.000} + 7 \cdot \frac{1}{10.000} \\ = \mathbf{4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}}$$

Επομένως κάθε αριθμός του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης εκφράζεται ως άθροισμα δυνάμεων του **10**.

Επίσης επειδή π.χ. είναι:

$$45,637 = \frac{45.637}{1.000} = 45.637 \cdot \frac{1}{1.000} = 45.637 \cdot 10^{-3}$$

$$45,6372 = \frac{456.372}{10.000} = 456.372 \cdot \frac{1}{10.000} = 456.372 \cdot 10^{-4}$$

Οι αριθμοί αυτοί είναι δύσκολο να γραφτούν και να διαβαστούν και πολύ περισσότερο να γίνουν πράξεις μεταξύ τους. Γι' αυτό τους γράφουμε με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10. Με τη μορφή αυτή γίνονται σχετικά πιο εύκολα και οι πράξεις. Π.χ.

$$\begin{aligned} 1,430000000000 \cdot 0,00000002 &= 14 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-8} \\ &= (14 \cdot 3 \cdot 2) 10^{-1} \cdot 10^{10} \cdot 10^{-8} \\ &= 84 \cdot 10 \\ &= 840 \end{aligned}$$

Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών

(1). Ας παρατηρήσουμε τον παρακάτω πίνακα.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$	$\alpha \cdot \beta$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$
4	9	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}=6$	$4 \cdot 9=36$	$\sqrt{4 \cdot 9}=6$

Διαπίστωση

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

($\alpha, \beta \geq 0$)

Είναι φανερό ότι η παραπάνω διαπίστωση ισχύει για όλες τις τετραγωνικές ρίζες που είναι ρητοί αριθμοί. Δεν ξέρουμε όμως αν αυτή ισχύει και για τις τετραγωνικές ρίζες που είναι άρρητοι αριθμοί (αφού τα αποτελέσματα των πράξεων με άρρητους αριθμούς τα βρίσκουμε, αντικαθιστώντας τους άρρητους με προσεγγίσεις).

Άρα:

«Για τους αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει, $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ »

Παρατηρήσεις

i) Η ιδιότητα $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ όπου $\alpha, \beta \geq 0$, μας λέει ότι: **Το γινόμενο δύο τετραγωνικών ριζών, ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου των υπορριζών.**

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δύο τετρ.ρίζες (με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα). Π.χ. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$.

ii) Η ισότητα $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ μας λέει επίσης ότι η τετραγωνική ρίζα ενός γινομένου με **μη αρνητικούς** παράγοντες μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των τετρ.ριζών των παραγόντων του. Π.χ $\sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Αυτή η μετατροπή μας εξυπηρετεί για να γράφουμε πιο απλά ή ακόμη και να υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες πολλών φυσικών αριθμών.

Π.χ $\sqrt{450} = \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$ (τρέψαμε το υπόρριζο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων)

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5 = 15 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3969} = \sqrt{3^4 \cdot 7^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{7^2} = 3^2 \cdot 7 = 9 \cdot 7 = 63$$

iii) Να προσέξουμε ότι: Ενώ η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\overbrace{4}^{\text{+}} \cdot \overbrace{3}^{\text{-}}}$ υπάρχει, γιατί το υπόρριζο είναι ο θετικός αριθμός 12, **δεν** μπορούμε να γράψουμε

$\sqrt{\overbrace{4}^{\text{+}} \cdot \overbrace{3}^{\text{-}}} = \sqrt{\overbrace{4}^{\text{+}}} \cdot \sqrt{\overbrace{3}^{\text{-}}}$ γιατί τα σύμβολα $\sqrt{\overbrace{4}^{\text{+}}}, \sqrt{\overbrace{3}^{\text{-}}}$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αυτή η ρίζα γράφεται αλλιώς ως εξής:

$$\sqrt{\overbrace{4}^{\text{+}} \cdot \overbrace{3}^{\text{-}}} = \sqrt{+4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

(2). Ας παρατηρήσουμε τον παρακάτω πίνακα.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	9	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

Διαπίστωση:

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

(με $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$)

Για τον ίδιο λόγο, όπως και στο γινόμενο των τετραγωνικών ριζών, για να δεχτούμε ότι ισχύει η παραπάνω διαπίστωση στη γενικότητά της, πρέπει να την αποδείξουμε.

Άρα:

« Για τους αριθμούς $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ ισχύει, $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ »

Παρατηρήσεις

i) Η ιδιότητα $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, όπου $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$, μας λέει ότι: **Το πηλίκο δύο τετραγωνικών ριζών ισούται με την τετραγωνική ρίζα των υποριζών.**

Π.χ. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$

ii) Η ισότητα $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ μας λέει ότι η τετραγωνική ρίζα ενός κλάσματος με μη αρνητικούς όρους (και παρονομαστή $\neq 0$) μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με όρους τις αντίστοιχες τετραγωνικές ρίζες των όρων του.

Αυτή η μετατροπή μας εξυπηρετεί κάποιες φορές στον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών δεκαδικών αριθμών.

Π.χ. $\sqrt{0,0121} = \sqrt{\frac{121}{10^4}} = \sqrt{\frac{11^2}{10^4}} = \frac{\sqrt{11^2}}{\sqrt{10^4}} = \frac{11}{10^2} = 0,11$.

iii) Να προσέξουμε ότι: Όπως στην ιδιότητα του γινομένου των τετρ.ριζών, έτσι και εδώ, ενώ υπάρχει η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\frac{-20}{-3}}$ **δεν** μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{\frac{-20}{-3}} = \frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-3}}$.

(3) Αν $\alpha \geq 0$ και $k \geq 1$ φυσικός τότε ισχύει, $(\sqrt[k]{\alpha})^k = \sqrt[k]{\alpha^k}$.

Πράξεις με τετραγωνικές ρίζες

Τα αποτελέσματα αριθμητικών παραστάσεων που περιέχουν και τετραγωνικές ρίζες υπολογίζονται, εφόσον οι τετραγωνικές ρίζες αντικατασταθούν με επιθυμητές προσεγγίσεις.

Επισημαίνουμε τα εξής:

i) Δεν είναι σωστό να γράφουμε: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

Για παράδειγμα, το $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ δεν ισούται με το $\sqrt{8}$.

Τετραγωνικές ρίζες με το ίδιο υπόριζο μπορούμε να τις προσθέσουμε ή να τις αφαιρέσουμε. Π.χ είναι $5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ και

$$7\sqrt{2} - \sqrt{18} = 7\sqrt{2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 7\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

ii) Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο ενός ρητού ($\neq 0$) με έναν άρρητο είναι άρρητος αριθμός.

Π.χ οι αριθμοί $7 + \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - 5$, $2\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι άρρητοι αριθμοί.

Όμως πράξεις με άρρητους αριθμούς μπορεί να δώσουν αποτέλεσμα ρητό αριθμό. Π.χ $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$, $(\sqrt{3} + 5) - (\sqrt{3} - 5) = 7 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 5 = 12$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε ποια από τις παρακάτω ισότητες α , β , γ υπάρχει λάθος;
 $-6 = \underset{\alpha}{(-1)} \cdot (\underset{\beta}{2} \cdot \underset{\gamma}{3}) = (-2) \cdot (-3) = +6$
2. Ο αριθμός $(2^3)^{30} \cdot 5^{20} \cdot 5^{70}$ έχει:
 i) 50 μηδενικά ii) 70 μηδενικά iii) 90 μηδενικά iv) 120 μηδενικά
3. Οι αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός και ισχύει $\alpha + \beta = 0$. Βάλτε στο πλαίσιο το πρόσημο του γινομένου.
 $\alpha \cdot \beta$ $-2 \cdot \alpha \beta$ $(-3)^5 \cdot \alpha \beta$.
 $\alpha^2 \beta^2$ $\alpha^3 \beta^3$ $(\alpha \beta)^5$.
4. Βάλτε σε κύκλο την ένδειξη της σωστής απάντησης σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις.
 Α) Αν n περιττός φυσικός αριθμός, τότε η παράσταση $a^n + (-a)^n$ ισούται με,
 i) $2a^n$ ii) a^{2n} iii) $2an$ iv) a^{-n} v) 0
 Β) Αν n άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η τιμή της παράστασης
 $1^{-n} + (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2}$ είναι:
 i) -3 ii) -2 iii) 0 iv) 2 v) 3
 Γ) Αν $\alpha = 0,01$ και $\beta = 10^{-1}$, τότε η τιμή της παράστασης $10^5 \alpha^2 \beta$ είναι:
 i) 0,1 ii) 0 iii) 1 iv) 10 v) 100
 Δ) Η ιδιότητα $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^k}$ ισχύει:
 i) όταν $\alpha < 0$ ii) όταν $\alpha \geq 0$ iii) όταν $\alpha^k \geq 0$ iv) σε κάθε περίπτωση
5. Να αντιστοιχίσετε με μια γραμμή κάθε κλάσμα της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο ποσοστό (%) της δεύτερης στήλης.

Κλάσμα	Ποσοστό (%)
1/20	20%
2/5	84%
3/10	42%
12/25	40%
42/50	25%
2/8	5%
	30%
	48%
	10%

6. Βάλτε ένα X στο Σ (σωστό)
ή Λ (λάθος) στο:

Σ

Λ

$$\sqrt{16} = -4$$

☐☐

$$\sqrt{(-4)^2} = 4$$

☐☐

$$\sqrt{16^2} = 16$$

☐☐

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{-5^2}$$

☐☐

$$\sqrt{5^2} = 5\sqrt{5}$$

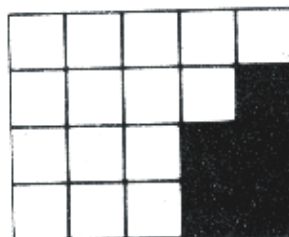
☐☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ν' απλοποιηθούν τα κλάσματα $\frac{70}{35}, \frac{5}{15}, \frac{18}{20}, \frac{1.332}{148}$

2. Ποια από τα κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{7}{22}, \frac{6}{18}, \frac{10}{15}, \frac{3}{4}$ είναι ίσα με το $\frac{12}{18}$;

3. Αν ε το εμβαδόν του σκιαγραφημένου μέρους του διπλανού σχήματος, Ε όλου του ορθογωνίου και $\varepsilon = \mu \cdot \text{Ε}$ να βρεθεί η τιμή του μ .



4. Ποιές από τις επόμενες ισότητες είναι αληθείς;

(i) $\frac{7}{20} = 35\%$, (ii) $\frac{4}{5} = 70\%$, (iii) $\frac{1}{2} = 5\%$, (iv) $\frac{1}{8} = 125\%$, (v) $\frac{19}{40} = 190\%$.

5. Να γίνουν οι πράξεις:

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, (ii) $\frac{8}{21} - \frac{1}{14}$, (iii) $(9 + \frac{7}{12} - \frac{1}{8}) - (\frac{1}{5} + \frac{1}{2})$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

(i) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{5}$, (ii) $\frac{11}{12} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{14}{11}$, (iii) $\frac{1}{8} \cdot 9 \cdot \frac{112}{333}$

7. Να γίνουν οι πράξεις.

(i) $\frac{2}{15} : \frac{3}{15}$, (ii) $5 : \frac{10}{14}$, (iii) $\frac{6}{8} : 3$

8. Τα κλάσματα $\frac{7}{10}, \frac{2}{100}, \frac{3528}{1000}, \frac{28}{10^5}$ να γραφούν στη δεκαδική τους μορφή.
9. Οι δεκαδικοί 0,145, 1,7524, 0,001, 42,4, 563,0101 να γραφούν στην κλασματική τους μορφή.
10. Τοιές από τις επόμενες ισότητες είναι αληθείς;

(i) $3,5 \cdot 1.000 = 3,5000$

(ii) $13,72 \cdot 100 = 1.372$

(iii) $0,0001 \cdot 10 = 0,1$

(iv) $1,32467 \cdot 1.000 = 13.246,7$

(v) $7,2 : 1.000 = 0,0072$

(vi) $513,5 : 10 = 5.135$

(vii) $12 : 100 = 0,12$

(viii) $5 : 100.000 = 0,00005$

11. Να βρείτε τα εξαγόμενα των πράξεων.

(i) $0,035 + 15,2$

(iii) $5 - 3,0001$

(v) $315,3 - (311,17 + 4,13)$

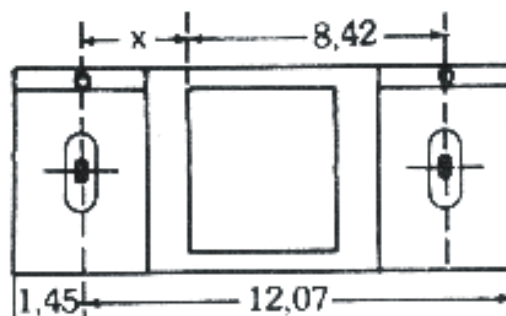
(ii) $5 + 7,0001$

(iv) $1,1 + 0,11 + 0,011$

(vi) $101,02 + 11,002 - 0,00001$

- 12.

Στο παραπλεύρως σχέδιο να υπολογίσετε τη διάσταση x. Οι διαστάσεις δίνονται σε cm.



13. Να βρεθούν τα γινόμενα.

(i) $12,15 \cdot 3,21$

(iii) $8,1 \cdot 13,15$

(v) $4 \cdot 3,1 \cdot 4,002$

(ii) $5,01 \cdot 3,5$

(iv) $4 \cdot 2,1 \cdot 3,5$

(vi) $2,5 (3,001 - 0,4)$

14. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

(i) $372 : 0,03$, (ii) $726,4 : 4$, (iii) $3 : 8$

15. Να τραπούν σε δεκαδικούς τα κλάσματα.

$$\frac{121}{200}, \frac{3}{16}, \frac{37}{160}, \frac{4}{33}, \frac{5}{6}$$

16. Να τραπούν σε δεκαδικούς με προσέγγιση χιλιοστού οι παραστάσεις.

(i) $4 + \frac{5}{9}$, (ii) $\frac{2 - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{3}}$, (iii) $(\frac{2}{3} + \frac{4}{11}) - (\frac{2}{3} - \frac{4}{11})$

17. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών: 625, 8100, 0,0144, 0,0009, $\frac{25}{16}$, $\frac{169}{49}$.

18. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών 1164,2 και 45075 με προσέγγιση εκατοστού.

19. Να υπολογίσετε τις προσεγγίσεις των τετραγωνικών ριζών των αριθμών του διπλανού πίνακα.

	Προσέγγιση		
	Μονάδ	Δεκάτο	Εκατοστ
12000			
1200			
120			
12			

20. Χωρίς να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες, να κάνετε τις πράξεις.

$$\left(\sqrt{+7} \right) ; \left(\sqrt{-7} \right) \cdot \left(\sqrt{7-1} \right) \div 2\sqrt{63}$$

21. Δίνονται οι προσεγγίσεις $\sqrt{2} \approx 1,41$ και $\sqrt{3} \approx 1,73$. Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της παράστασης $\sqrt{50} - 2\sqrt{27} + \sqrt{6}$.

22. Να συγκρίνετε τις παραστάσεις $\sqrt{5^2} + \sqrt{6^2}$ και $\sqrt{5^2 + 6^2}$.

23. Η επιφάνεια μιας τετράγωνης πλατείας είναι 2071m^2 . Να βρείτε με προσέγγιση δεκάτου πόσα m είναι κάθε πλευρά της.

24. Να δικαιολογήσετε γιατί οι αριθμοί $\sqrt{3}$ και $\frac{3}{\sqrt{3}}$ είναι ίσοι. Να κάνετε το ίδιο και για τους

αριθμούς $\sqrt{\frac{2}{3}}$ και $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

25. Κάθε αριθμό του διπλανού πίνακα να τον γράψετε με τη μορφή που δίνεται στις στήλες του.

	$(+)^2$	$\sqrt{}$	$\sqrt{} $	$\sqrt{} $
$\frac{2}{3}$				
$\frac{2}{3}$				
$\frac{2}{3}$				
$\frac{2}{3}$				

26. Το γινόμενο των αριθμών της πρώτης γραμμής με αυτούς της πρώτης στήλης στον διπλανό πίνακα να το γράψετε μέσα στο αντίστοιχο πλαίσιο με τη μορφή μιας τετραγωνικής ρίζας.

	2	$\sqrt{2}$
3		
$\sqrt{3}$		

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ-ΜΟΝΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΒΑΣΙΚΕΣΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Η έννοια της αλγεβρικής παράστασης

Ξέρουμε ότι το εμβαδό E του τραpezίου με βάσεις B, b και ύψος u δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}(B + b) \cdot u$$

Η έκφραση $\frac{1}{2}(B + b) \cdot u$, που δηλώνει τις πράξεις οι οποίες πρέπει να γίνουν μεταξύ αριθμών και γραμμάτων, που παριστάνουν αριθμούς, για να βρούμε το εμβαδό του τραpezίου, λέγεται αλγεβρική παράσταση.

Γενικά κάθε έκφραση που περιέχει αριθμούς ή γράμματα, που παριστάνουν αριθμούς και που συνδέονται με πράξεις, λέγεται **αλγεβρική παράσταση**.

Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι το διάστημα S , που διανύει ένα σώμα κατά την πτώση του, δίνεται από τον τύπο

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και t ο χρόνος πτώσεως του σώματος. Είναι φανερό ότι το t μπορεί να πάρει διάφορες τιμές π.χ. $t = \frac{1}{2}$ sec, $t = 2$ sec κ.τ.λ. Γι' αυτό ονομάζεται **μεταβλητή**. Αντίθετα το g , για ένα συγκεκριμένο τόπο, έχει πάντα την ίδια τιμή. Είναι όπως λέμε μια σταθερά.

Γενικά ένα γράμμα μέσα σε μια αλγεβρική παράσταση, χαρακτηρίζεται ως **μεταβλητή**, όταν μπορεί να πάρει διάφορες τιμές από κάποιο σύνολο αριθμών.

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τα γράμματα με συγκεκριμένους αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις, που σημειώνονται μεταξύ τους, προκύπτει τελικά ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της παράστασης. Π.χ.

η αλγεβρική παράσταση $3x^2 - 5xy$ για $x = 1$ και $y = -2$

έχει αριθμητική τιμή $3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot (-2) = 3 + 10 = 13$

Σε μια αλγεβρική παράσταση δεν μπορούμε πάντοτε να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή με οποιεσδήποτε τιμές. Π.χ.

α) Η παράσταση $\frac{5}{a-2}$ δεν έχει αριθμητική τιμή για $a = 2$ γιατί τότε μηδενίζεται ο παρονομαστής της.

β) Η παράσταση $\sqrt{y+1}$ δεν έχει αριθμητική τιμή π.χ. για $y = -5$, αφού η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Μονώνυμα μιας ή περισσότερων μεταβλητών.

Αλγεβρικές παραστάσεις όπως π.χ. οι

$$-5x, \frac{1}{2}xy, x^2, 2\pi x, (\pi = 3,14), ax^v, 3x^v y^u \quad (a \text{ σταθ. } v, u \text{ φυσικοί αριθμοί}),$$

στις οποίες σημειώνεται μόνο πολλαπλασιασμός λέγονται **μονώνυμα**.

Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας, που γράφεται πρώτος, λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου. Π.χ. οι αριθμητικοί παράγοντες, $-5, \frac{1}{2}, 1, 2\pi, a, 3$ είναι οι συντελεστές των παραπάνω μονωνύμων. Κάθε μονώνυμο με συντελεστή το 0 είναι το **μηδενικό μονώνυμο** και ισούται με 0.

Όμοια μονώνυμα λέγονται αυτά που διαφέρουν μόνο ως προς τους συντελεστές.

Πράξεις με μονώνυμα.

Επειδή σ' ένα μονώνυμο οι μεταβλητές παριστάνουν αριθμούς, κάνουμε πράξεις μεταξύ μονωνύμων σύμφωνα με τις ιδιότητες που ισχύουν για τα γινόμενα αριθμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$1. \quad 3ax + 4ax = (3+4)ax = 7ax \quad (\text{επιμεριστική ιδιότη.})$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 5x^2y + 2x^3 - 3x^2y - 3x^3 + 2x &= 5x^2y - 3x^2y + 2x^3 - 3x^3 + 2x & (\text{ανταμεταθετική ιδιότη.}) \\ &= (5x^2y - 3x^2y) + (2x^3 - 3x^3) + 2x & (\text{προσεταιριστική ιδιότη.}) \\ &= (5-3)x^2y + (2-3)x^3 + 2x & (\text{Επιμεριστική ιδιότη.}) \\ &= 2x^2y - x^3 + 2x & (\text{αναγωγή ομοίων όρων}) \end{aligned}$$

$$3. \quad 4ax^3 \cdot 2ax = (4 \cdot 2) \cdot (a \cdot a) \cdot (x^3 \cdot x) = 8a^2x^4 \quad (\text{Ανταμεταθετική και Προσεταιριστική ιδιότη. στον πολλαπλασιασμό})$$

$$4. \quad (4ax^3 : 2ax) = \frac{4ax^3}{2ax} = \frac{4}{2} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{x^3}{x} \quad (\text{γινόμενο κλασμάτων})$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot x^{3-1} = 2x^2$$

Η διαίρεση δυο μονωνύμων δε μας δίνει πάντοτε μονώνυμο. Π.χ. το πηλίκο της διαίρεσης

$(7x^2y) : (2xy^2)$, όπως ξέρουμε, το παριστάνουμε

$$\frac{7x^2y}{2xy^2}, \text{ που μετά τις απλοποιήσεις, γράφεται } \frac{7x}{2y}.$$

Οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητή σε παρονομαστή, όπως π.χ. οι

$$2x + \frac{y}{x-1}, \quad \frac{x+y}{x}$$

λέγονται **κλασματικές**.

Πολυώνυμο μιας ή περισσότερων μεταβλητών.

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι το (αλγεβρικό) άθροισμα μη ομοίων μονωνύμων λέγεται **πολυώνυμο**. Π.χ. πολυώνυμο είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις

$$3x + 5, \quad x^3 + 5x + 6, \quad 5x^2y^3 + 2xy + 1, \quad ax^2 + bx + y$$

Τα μονώνυμα, που απαρτίζουν ένα πολυώνυμο, λέγονται **όροι** του πολυωνύμου. Οι συντελεστές των μονωνύμων ενός πολυωνύμου λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου. Ένα μονώνυμο μπορεί να θεωρηθεί ως πολυώνυμο με ένα όρο.

Αν σε ένα πολυώνυμο όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν το πολυώνυμο λέγεται μηδενικό και συμβολίζεται με το 0.

Ένα πολυώνυμο σημειώνεται ανάλογα με τις μεταβλητές του $f(x)$, $g(x,y)$ κτλ. Π.χ.

$$f(x) = 3x + 5, \quad g(x,y) = 3xy^2 + 5y$$

Πράξεις με πολυώνυμα.

Η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός μεταξύ πολυωνύμων γίνονται όπως οι αντίστοιχες πράξεις μεταξύ αριθμητικών αθροισμάτων. (§ 1.22).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (3x^5 + 2x^3 + 1) + (-2x^5 + 2x^3 + x + 1) &= 3x^5 + 2x^3 + 1 - 2x^5 + 2x^3 + x + 1 \\ &= (3 - 2)x^5 + (2 + 2)x^3 + x + 2 \quad (\text{αναγωγή ομοίων όρων}) \\ &= x^5 + 4x^3 + x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad (x^3 - 4x^2 + 1) - (4x^3 - 4x^2 + xy^2 + 1) &= x^3 - 4x^2 + 1 - 4x^3 + 4x^2 - xy^2 - 1 \\ &= -3x^3 - xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \text{α)} \quad (2x^2 - 3x + 5) \cdot (-4x^3) &= (2x^2) \cdot (-4x^3) + (-3x) \cdot (-4x^3) + 5 \cdot (-4x^3) \\ &= -8x^5 + 12x^4 - 20x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{β)} \quad (2x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - y^2) &= (2x^2 - 3x + 2)x^2 + (2x^2 - 3x + 2)(-y^2) \\ &= 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x^2y^2 + 3xy^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad (9x^4y^3z - 6x^3yz - 11x^2z) : (-3x^2z) &= (9x^4y^3z) : (-3x^2z) + (-6x^3yz) : (-3x^2z) + (-11x^2z) : (-3x^2z) \\ &= -3x^2y^3 + 2xy + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Σημείωση*. Απλή υπόμνηση της διαίρεσης πολυωνύμου με πολυώνυμο γίνεται με τα επόμενα παραδείγματα.

$$\text{i)} \quad (2x^3 + 7x^2 - 9x - 18) : (2x - 3)$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 7x^2 - 9x - 18 & 2x - 3 \\ -2x^3 + 3x^2 & \\ \hline 10x^2 - 9x - 18 & \\ -10x^2 + 15x & \\ \hline 6x - 18 & \\ -6x + 9 & \\ \hline -9 & \end{array}$$

$$\text{ii)} \quad (x^3 - a^3) : (x - a)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -a^3 \\ -x^3 + ax^2 & \\ \hline +ax^2 & -a^3 \\ -ax^2 + a^2x & \\ \hline +a^2x - a^3 & \\ -a^2x + a^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Τα πολυώνυμα (i) $x^2 - x$ και (ii) $ax + ay + bx^2 + bxy$, με την επιμεριστική ιδιότητα να γραφούν ως γινόμενα.

Λύση (i) $x^2 - x = x \cdot x - x \cdot 1 = x(x - 1)$
 (ii) $ax + ay + bx^2 + bxy = a(x + y) + bx(x + y)$
 $= (x + y)(a + bx).$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**Αξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.**

Αν A, B , πραγματικοί αριθμοί, ή πολυώνυμα, ακόμη και αλγεβρικές παραστάσεις, τότε διαπιστώνουμε, αν κάνουμε πράξεις, ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (1)$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad (2)$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad (3)$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \quad (4)$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \quad (5)$$

$$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3 \quad (6)$$

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 \quad (7)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

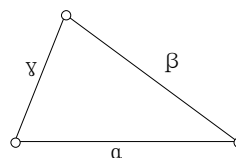
1. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων.

i) $2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 6\alpha$, ii) $\frac{\sqrt{4\alpha^2}}{4} - \frac{\alpha}{2}$, για $\alpha = 3$

iii) $\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - (\alpha\beta)^3$, iv) $(\alpha - \beta)^2 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, για $\alpha = -1$, $\beta = 3$.

2. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης : $\sqrt{2\alpha + \beta^2} - 2 \cdot (\alpha - \gamma)\sqrt{\gamma - \beta^2}$, για $\alpha = 3 \cdot 10^2$, $\beta = -5$, $\gamma = 13^2$.

3. Να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση την περίμετρο Τ του διπλανού τριγώνου και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή της για $\alpha = 0,7 \cdot 10^{-1}$, $\beta = 0,5 \cdot 10^{-1}$, $\gamma = 0,4 \cdot 10^{-1}$. (Οι τιμές που δίνονται εκφράζουν m).



4. Να γίνουν οι πράξεις.

i) $0,2\alpha x^4 - 2,3\alpha x^2 + 4\alpha x^2 - \alpha x^4$ ii) $x^2y^3 - x^3y^2 - 2x^2y^3 + 2x^3y^2$

iii) $(-4x^3y\omega^2)^3 \cdot (-3x^3y) \cdot \omega$ iv) $(90\alpha^5\beta^4\gamma) : (-20\alpha^5\beta\gamma)$

v) $(1-x)(x+2)(x-3)$ vi) $-3x(x^2 - 1) + 3x^2(x-3) - x + x(1-x)$.

5. Να γίνουν οι πράξεις.

i) $(x^2 - 2xy + 4y^2)(x + 2y)$ ii) $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)(x^2 - x + 1)$

iii) $(6\alpha^3\beta^2 - 12\alpha^2\beta^3 - 3\alpha\beta^4) : (-3\alpha\beta)$ iv) $(4x^7y^3 + 8x^6y^4 - 12x^4y^6) : (-2x^4y^3)$

v) $(\lambda^2 - 2\kappa) \cdot 3\kappa + (\lambda\kappa + \kappa^2)(-\lambda) + (\lambda + \kappa)(-2\lambda\kappa) - (\lambda + 3) \cdot 2\kappa^2$.

6. Να γίνουν οι πράξεις.

$$[7x^2(y-1) - 3x(xy + 3xy^2)] - [2y(x^2+1) - 3x(y^2-xy)] + [7x^2 + 2y + x(xy+y)].$$

7. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $B(x) = -x + 2$, $\Gamma(x) = x^2 - x$.

Να βρείτε τα: i) $A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)$ ii) $B(x) \cdot [\Gamma(x) - A(x)]$.

8. Σε ένα τεχνικό μνημόνιο διαβάζουμε ότι:

α) Το βάρος B (σε gr) ενός μπρούντζινου δίσκου που έχει διάμετρο δ cm και πάχος 1cm δίνεται από τον τύπο $B = 6,8\delta^2$.

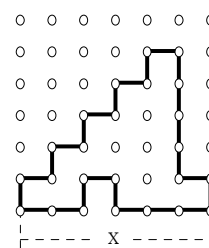
β) Το βάρος B (σε gr) μιας σφαίρας από μολύβι με διάμετρο δ cm δίνεται από τον τύπο $B = 5,91δ^3$.

Να υπολογίσετε το βάρος ενός μπρούντζινου δίσκου που έχει διάμετρο 19cm με πάχος 1cm και το βάρος μιας μολυβένιας σφαίρας με διάμετρο 6cm.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x - 6$. Να υπολογίσετε το γινόμενο $P(-2) \cdot P(3)$.

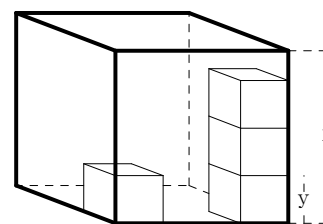
- 10.** Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $K(\alpha, \beta) = \alpha^3 \beta^2 - 2\alpha \beta^3 + 4\alpha - 3\beta$ για $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = -\frac{2}{3}$.

- 11.** Στο διπλανό σχέδιο οι τελίτσες είναι κορυφές ίσων τετραγώνων. Να βρείτε ένα μονώνυμο με μεταβλητή το x που να παριστάνει την περίμετρο του σχήματος με την έντονη γραμμή.



- 12.** Μέσα σε ένα χάρτινο κουτί σε σχήμα κύβου με ακμή x έχουμε βάλει 4 ξύλινα μικρά κυβάκια, ίσα μεταξύ τους, με ακμή y .

Να βρείτε ένα πολυώνυμο που να παριστάνει τον άδειο χώρο του κουτιού.



13. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $(3+x)(x-3) - (3x-1)^2$

ii) $(x^2-1)^3-(x^3+2x)^2$

iii) $x(2-x)^2 - (x-1)(x^2+x+1) - (x+2)^2$

- 14.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) $(\dots - \dots)^2 = \dots - 6x^4 + x^2$

ii) $(\dots - xy)(x^2 + \dots) = x^4 - \dots$

iii) $(\dots + y)^3 = \dots + 12x^2y + 6xy^2 + \dots$

iii) $(\dots + y)^3 = \dots + 12x^2y + 6xy^2 + \dots$ iv) $(xy + \dots)(\dots - xy + \dots) = \dots + 1.$

- 15.** Αν $x=-y$, τότε η παράσταση $x^2 - y^2$ ισούται με:

i) $2x$ ii) $2y$ iii) $x-y$ iv) 0 v) $x+y$ (κύκλωσε τη σωστή απάντηση).

- 16.** α) Παρατηρήστε τις ισότητες:

$$2^2 - 1^2 = 3,$$

$$3^2 - 2^2 = 5,$$

$$4^2 - 3^2 = 7,$$

$5^2 - 4^2 = 9$. Τι συμπέρασμα βγάξετε από αυτές;

β) Μπορείτε να βρείτε τη διαφορά $20000^2 - 19999^2$, χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις;

γ) Να διατυπώσετε ένα ισχυρισμό (μια εικασία) για τη διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων.

δ) Να αποδείξετε τον ισχυρισμό που διατυπώσατε.

17. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $d^4 - 16 = (d^2 + 4)(d + 2)(d - 2)$ ii) $d^6 - 1 = (d^2 - d + 1)(d^2 + d + 1)(d - 1)(d + 1)$

iii) $8\delta^3 + 1 = (2\delta + 1)(4\delta^2 - 2\delta + 1)$

18. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ii) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

iii) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2$ iv) $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = (\alpha y - \beta x)^2$

v) $(v^3 + 2\omega^2)^2 - (\omega^2 + 2v^3)^2 = 3 \cdot (\omega^2 - v^3) \cdot (\omega^2 + v^3).$

19. Να αποδείξετε ότι: Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 = 0$.

20. Αν α, β θετικοί και $\alpha + \beta = \sqrt{3\alpha\beta}$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha\beta$.

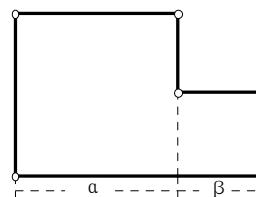
21. Αν $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $5\alpha^2 - 8\alpha\beta + 3\beta^2$.

22. Να αποδείξετε ότι: Αν $\alpha + \beta = -1$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + 1 = 3\alpha\beta$.

23. Αν $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3$ να υπολογίσετε τις αριθμ.τιμές των παραστάσεων:

i) $(\frac{\alpha}{\beta})^2 + (\frac{\beta}{\alpha})^2$ ii) $(\frac{\alpha}{\beta})^3 + (\frac{\beta}{\alpha})^3$.

24. Το οικόπεδο του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο τετράγωνα με πλευρές α και β αντιστοίχως. Αν γνωρίζετε ότι $\alpha + \beta = 49\text{m}$ και $\alpha\beta = 550\text{m}^2$, να βρείτε πόσα m^2 είναι η έκταση ολόκληρου του οικοπέδου.



25. Έστω $x > 0$ και $(x + \frac{1}{x})^2 = 5$. α) Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές

των παραστάσεων $x + \frac{1}{x}$ και $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$

26. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο για να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε ισχύει $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ ii) Αν $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 0$ τότε ισχύει $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αν πολλαπλασιάσουμε τα πολυώνυμα x^2+y και $xy-1$, θα βρούμε το πολυώνυμο $x^3y-x^2+xy^2-y$. Έτσι έχουμε: $x^3y-x^2+xy^2-y = (x^2+y) \cdot (xy-1)$, δηλαδή το πολυώνυμο $x^3y-x^2+xy^2-y$ μπορούμε να το γράψουμε ως γινόμενο άλλων πολυωνύμων.

Η μετατροπή ενός πολυωνύμου σε γινόμενο άλλων πολυωνύμων λέγεται **παραγοντοποίηση** του πολυωνύμου.

Το πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός πολυωνύμου είναι το αντίστροφο του προβλήματος του πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων.

Τονίζουμε ότι: α) Υπάρχουν πολυώνυμα που δεν παραγοντοποιούνται. β) Η διαδικασία της παραγοντοποίησης θεωρείται ολοκληρωμένη, όταν κανένας από τους παράγοντες του γινομένου που βρήκαμε δε συνεχίζει να παραγοντοποιείται.

Η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή μιας αλγεβρικής παράστασης, εφόσον γίνεται, μας διευκολύνει στο να γράφουμε πιο απλά τις αλγεβρικές παραστάσεις, να λύνουμε εξισώσεις και ανισώσεις, να απλοποιούμε αλγεβρικά κλάσματα, να εκτελούμε πιο σύντομα πράξεις και να αποδεικνύουμε διάφορες προτάσεις. Γι' αυτό και είναι μια πολύ χρήσιμη διαδικασία στην Άλγεβρα.

Στο Γυμνάσιο είχαμε μάθει τις σπουδαιότερες περιπτώσεις παραγοντοποίησης, τις οποίες επαναλαμβάνουμε με παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. i) $x^3y^3+x^2y^2+xy^2$ ii) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$

Λύση:

i) Όλοι οι όροι της παράστασης έχουν κοινό παράγοντα το xy^2 (είναι οι κοινοί παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη). Έτσι, $x^3y^3+x^2y^2+xy^2=xy^2(x^2y+x+1)$.

ii) Η παράσταση έχει κοινούς παράγοντες κατά ομάδες. Έτσι,

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3 = x^2(x+y)+y^2(x+y)=(x+y)(x^2+y^2).$$

2. i) $x^4 - y^4$ ii) $(x-y)^2 - y^2$.

Λύση:

Εφαρμογή της ταυτότητας «διαφορά δύο τετραγώνων»

i) $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$,

ii) $(x-y)^2-y^2=[(x-y)+y][(x-y)-y]=x(x-y-y)=x(x-2y)$.

3. i) $x^4+2x^2y+y^2$ ii) $8x^3+1$.

Λύση:

i) Εφαρμογή της ταυτότητας «τετράγωνο αθροίσματος».

$$x^4+2x^2y+y^2 = (x^2)^2+2x^2y+y^2 = (x^2+y)^2.$$

ii) Εφαρμογή της ταυτότητας «άθροισμα κύβων».

$$8x^3+1=(2x)^3+1=(2x+1)[(2x)^2-2x \cdot 1+1]=(2x+1)(4x^2-2x+1).$$

4. i) $x^4-4x^2y+4y^2 - \omega^2$ ii) $x^2+3x-10$ iii) $3d^2 - 2d - 1$.

Λύση:

$$i) x^4 - 4x^2y + 4y^2 - \omega^2 = (x^4 - 4x^2y + 4y^2) - \omega^2 = (x^2 - 2y)^2 - \omega^2 = (x^2 - 2y + \omega)(x^2 - 2y - \omega).$$

$$ii) x^2 + 3x - 10 = x^2 + 5x - 2x - 10 \quad (\text{διάσπαση όρου}).$$

$$= x(x+5) - 2(x+5) = (x+5)(x-2)$$

$$iii) 3d^2 - 2d - 1 = 3d^2 - 3d + d - 1 = 3d(d-1) + (d-1) = (d-1)(3d+1).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) 3x^3 - 6x^2y + 3xy^2$$

$$ii) x^2 - y^2 + 2x + 1$$

$$iii) (x^2 - 9)^2 - (x+3)^2$$

$$iv) (3x+2)^2 - (x+5)^2$$

$$v) x(2x+1)^2 - 2x - 1$$

$$vi) 3(x^3 - x) + 2(x^2 - 1).$$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) (x-3)(2x-1) - 3x(2x-6) - 3 + x$$

$$ii) xy + 1 - x - y$$

$$iii) 5xy - 2y - 15x + 6$$

$$iv) 81(x-1)^2 - 4(x-5)^2$$

$$v) x^3 - y^3 - x^4 + xy^3.$$

3. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα

$$P(x) = x^2 + 2x - 3, Q(x) = x^2 + x - 6, F(x) = 2x^2 - x - 1, \Phi(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στις πράξεις με κλασματικές παραστάσεις ισχύουν οι γνωστοί κανόνες των πράξεων με αριθμητικά κλάσματα.

Υπενθυμίζουμε ότι:

α) Η μεταβλητή ή οι μεταβλητές σε μια κλασματική αλγεβρική παράσταση δεν μπορεί να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της.

β) Για να απλοποιήσουμε μια κλασματική αλγεβρική παράσταση, πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της.

γ) Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, πρέπει πρώτα να τις μετασχηματίσουμε έτσι, ώστε να έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν φαίνεται ο τρόπος που γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο και με τον οποίο κάνουμε πράξεις στις κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις.

Παραδείγματα

1. Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\frac{8x^3 - 2xy^2}{4x^2 - 4xy + y^2}$.

Λύση:

$$8x^3 - 2xy^2 = 2x(4x^2 - y^2) = 2x(2x + y)(2x - y)$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = (2x - y)^2$$

Τρέπουμε σε γινόμενα τους όρους του κλάσματος.

Έτσι:

$$\frac{8x^3 - 2xy^2}{4x^2 - 4xy + y^2} = \frac{2x(2x + y)(2x - y)}{(2x - y)^2} = \frac{2x(2x + y)}{(2x - y)}$$

Απλοποιούμε το κλάσμα με το $2x - y$, που είναι ο Μ.Κ.Δ. των όρων του.

2. Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{2x^2 - 50}{x^3 - 27} : \frac{x + 5}{x - 3}$.

Λύση:

$$\frac{2x^2 - 50}{x^3 - 27} : \frac{x + 5}{x - 3} = \frac{2x^2 - 50}{x^3 - 27} \cdot \frac{x - 3}{x + 5} = \frac{(2x^2 - 50)(x - 3)}{(x^3 - 27)(x + 5)}$$

Αντιστρέφουμε το 2^ο
κλάσμα και κάνουμε
πολ/σμό

Είναι:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 50 &= 2(x^2 - 25) = 2(x + 5)(x - 5) \\ x^3 - 27 &= x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση

Άρα:

$$\frac{(2x^2 - 50)(x - 3)}{(x^3 - 27)(x + 5)} = \frac{2(x + 5)(x - 5)(x - 3)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)(x + 5)} = \frac{2(x - 5)}{x^2 + 3x + 9}.$$

3. Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{x}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{2x + 2} + \frac{2}{x^2 + x}$.

Λύση:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2, 2x + 2 = 2(x + 1), x^2 + x = x(x + 1)$$

Παραγοντοποιούμε
τους παρονομαστές

ΕΚΠ : $2x(x + 1)^2$ Σχηματίζουμε το γινόμενο που αποτελείται από τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη. Αυτό είναι το ΕΚΠ των παρονομαστών.

$$\frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^2} = 2x, \quad \frac{2x(x+1)^2}{2(x+1)} = x(x+1), \quad \frac{2x(x+1)^2}{x(x+1)} = 2(x+1)$$

Βρίσκουμε τα πηλίκια του γινομένου αυτού με καθένα παρονομαστή.

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{2x + 2} + \frac{2}{x^2 + x} = \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2}{2x(x+1)^2} - \frac{x(x+1)}{2x(x+1)^2} + \frac{4(x+1)}{2x(x+1)^2}$$

Πολ/ζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με το αντίστοιχο πηλίκιο.

$$= \frac{2x^2 - x(x+1) + 4(x+1)}{2x(x+1)^2} = \frac{2x^2 - x^2 - x + 4x + 4}{2x(x+1)^2} = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x(x+1)^2}$$

Προσθέτουμε τα ομώνυμα κλάσματα

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.
2. Αν $A=x^2+y^2-t^2+2xy$ και $B=x^2-y^2+2yt-t^2$, να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$.
3. Αν $A = \frac{1}{x+1}$ και $B = \frac{1}{x-1}$, να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{xB-A}{xA+B}$.
4. Να κάνετε τις πράξεις: i) $x - \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$, ii) $\frac{1}{xy-y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$,
 iii) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ iv) $(x^2+2x-1) \cdot \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$
5. Να υπολογίσετε την αριθμ. τιμή της παράστασης: $\frac{3x}{4-x} \cdot \frac{16-x^2}{3x^2}$ για $x=0,4$.

ΕΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω η σχέση $x + 3 = 5$ η οποία είναι μια αληθής αριθμητική ισότητα όταν $x = 2$ ή όπως λέμε αληθεύει για $x = 2$. Μια τέτοια ισότητα λέγεται εξίσωση. Η τιμή 2 λέγεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης αυτής.

Γενικά, μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και ζητάμε τις τιμές των μεταβλητών αυτών για τις οποίες αυτή αληθεύει λέγεται **εξίσωση**. Οι μεταβλητές αυτές λέγονται άγνωστοι της εξίσωσης.

Δύο εξισώσεις που έχουν τις ίδιες ρίζες λέγονται **ισοδύναμες**.

Π.χ. οι $x + 3 = 5$ και $2x - 8 = -4$ είναι ισοδύναμες γιατί και οι δύο έχουν μοναδική ρίζα το 2 .

Μια εξίσωση που δεν έχει ρίζες λέγεται **αδύνατη** ενώ εκείνη που έχει άπειρες ρίζες ονομάζεται **αόριστη**.

Π.χ. η $0x = 1$ είναι αδύνατη ενώ η $0x = 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό δηλ. είναι αόριστη. Για τις εξισώσεις ισχύουν τα εξής:

- (i) Αν και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό η εξίσωση που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική.
- (ii) Αν και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό διάφορο του 0 , η εξίσωση, που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική.

Όταν βρίσκουμε τις λύσεις μιας εξίσωσης, λέμε ότι λύνουμε την εξίσωση.

Εξισώσεις πρώτου βαθμού.

Μια εξίσωση λέγεται πρώτου βαθμού όταν έχει ή μπορεί να πάρει, μετά από τις σχετικές πράξεις τη μορφή $ax + b = 0$ όπου x ο άγνωστος, a, b , σταθερές, (πραγματικοί αριθμοί). Τον τρόπο για να λύνουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού μας υποδεικνύουν τα επόμενα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $3x + \frac{1}{2} = 3 - \frac{x}{3}$ (1)

Διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες με την (1) εξισώσεις:

$$6\left(3x + \frac{1}{2}\right) = 6\left(3 - \frac{x}{3}\right) \quad (\text{πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών}).$$

$$18x + 3 = 18 - 2x \quad (\text{έγινε απαλοιφή παρανομαστών}).$$

$$18x + 2x = 18 - 3 \quad (\text{χωρίσαμε γνωστούς από άγνωστους})$$

$$20x = 15 \quad (\text{κάναμε αναγωγή ομοίων όρων})$$

$$x = \frac{15}{20} \quad \text{ή} \quad x = \frac{3}{4} \quad (\text{Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου})$$

Επαλήθευση: α' μέλος: $3 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

β' μέλος: $3 - \frac{3/4}{3} = 3 - \frac{3}{12} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

2. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{23x - 10}{15} + \frac{2x - 1}{5} = 2x - \frac{x}{15}$

Έχουμε τις ισοδύναμες με την αρχική εξισώσεις:

$$15\left(\frac{23x - 10}{15} + \frac{2x - 1}{5}\right) = 15\left(2x - \frac{x}{15}\right)$$

$$23x - 10 + 3(2x - 1) = 30x - x$$

$$23x - 10 + 6x - 3 = 30x - x$$

$$23x + 6x - 30x + x = 10 + 3$$

$$0 \cdot x = 13$$

Από τη τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $0 = 13$ που είναι αδύνατο. Άρα και η αρχική εξίσωση είναι **αδύνατη** δηλαδή δεν έχει ρίζες.

3. Να λυθεί η εξίσωση $3(x - 2) + 7x = 2(5x - 3)$

Διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες με την αρχική εξισώσεις:

$$3x - 6 + 7x = 10x - 6$$

$$3x + 7x - 10x = 6 - 6$$

$$0 \cdot x = 0$$

Η τελευταία ισότητα αληθεύει για κάθε τιμή του x άρα το ίδιο συμβαίνει και για την αρχική. Επομένως η εξίσωση είναι **αόριστη**.

Κλασματικές εξισώσεις

Μια εξίσωση που ο άγνωστος βρίσκεται και σε παρανομαστή λέγεται **κλασματική εξίσωση**.

Τα επόμενα παραδείγματα μας υποδεικνύουν τον τρόπο για να λύνουμε αυτές τις εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{5}$

Για να έχει νόημα το κλάσμα $\frac{2}{x-1}$ πρέπει $x-1 \neq 0$ ή $x \neq 1$

Υποθέτουμε λοιπόν $x \neq 1$ οπότε διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\frac{2}{x-1} = \frac{3}{5}$$

$$3(x-1) = 2 \cdot 5 \quad [\text{από την ιδιοτ. } (\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } a\delta = b\gamma)]$$

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= 10 \\ 3x &= 13 \end{aligned}$$

$$x = \frac{13}{3}$$

Η ρίζα αυτή είναι δεκτή γιατί δεν μηδενίζει τον παρονομαστή.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{12}{x} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{6}$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών με τρόπο ανάλογο με εκείνο που μάθαμε για τα αριθμητικά κλάσματα. Έτσι είναι

$$\text{Ε.Κ.Π.}(x, 3, 6) = 6x \quad \text{με} \quad 6x \neq 0 \quad \text{ή} \quad x \neq 0$$

Διαδοχικά τώρα έχουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\frac{12}{x} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{6}$$

$$6x \left(\frac{12}{x} - \frac{1}{3} \right) = 6x \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$$

$$\begin{aligned} 72 - 2x &= -6 + x \\ -2x - x &= -72 - 6 \\ -3x &= -78 \\ x &= 26 \end{aligned}$$

Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

Κάθε εξίσωση με άγνωστο το x που έχει ή μπορεί να πάρει, μετά από τις σχετικές πράξεις, τη μορφή.

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

όπου a, b, γ , πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 0$, λέγεται **εξίσωση 2ου βαθμού**.
Αποδεικνύεται ότι:

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

- αν $\Delta = b^2 - 4a\gamma > 0$ έχει δύο λύσεις:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

- αν $\Delta = b^2 - 4a\gamma = 0$ έχει μία μόνο λύση: $x = -\frac{b}{2a}$ (ή δύο λύσεις ίσες)
- αν $\Delta = b^2 - 4a\gamma < 0$ δεν έχει καμία λύση (αδύνατη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$$\text{Έχουμε } \Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 > 0$$

$$\text{Συνεπώς } x = \frac{-5 + \sqrt{1}}{4} = -1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{1}}{4} = -3/2$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\text{Έχουμε } \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

$$\text{Συνεπώς } x = -\frac{-6}{2} = 3 \text{ (μία ρίζα διπλή)}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 5x + 7 = 0$

Έχουμε $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$

Συνεπώς η εξίσωση δεν έχει καμμία λύση (αδύνατη).

4. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = 4$

(α' τρόπος). Η εξίσωση $x^2 = 4$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 + 0 \cdot x - 4 = 0$.

Έτσι έχουμε $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0$

Συνεπώς $x = \frac{0 + \sqrt{16}}{2} = 2$ ή $x = \frac{0 - \sqrt{16}}{2} = -2$

(β' τρόπος). Διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις.

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x^2 &= 2^2 \\ x^2 - 2^2 &= 0 \\ (x+2)(x-2) &= 0 \\ (x-2=0 \text{ ή } x+2=0) \\ x &= 2 \text{ ή } x = -2 \end{aligned}$$

5. Αν $x > 0$ και $a > 0$ να λυθεί η εξίσωση $x^2 = a^2$

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \\ x^2 - a^2 &= 0 \\ (x-a)(x+a) &= 0 \\ x+a=0 \text{ ή } x-a=0 \\ x &= -a \text{ ή } x=a \end{aligned}$$

Επειδή όμως $x > 0$ και $a > 0$ η λύση $x = -a$ απορρίπτεται, οπότε λύση (μοναδική) είναι η $x = a$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$

β) $(y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3) \quad 0$

γ) $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$

δ) $\varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1 \quad 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{x + 3}{5} = x - 2$

β) $\frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} = \frac{y - 2}{6} - 2$

γ) $0,5t^2 - 0,4(t + 2) = 0,7(t - 2)$

δ) $\frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 4x - 12$

β) $3y^2 - 8y + 5$

γ) $-2\omega^2 + 5\omega - 3$

δ) $x^2 - 16x + 64$

ε) $9y^2 + 12y + 4$

στ) $-\omega^2 + 10\omega - 25$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ-ΣΥΝΑΛΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Ας πάρουμε τη σχέση $x - 5 > 0$. Αν βάλουμε στη μεταβλητή x την τιμή 6, θα δούμε ότι η σχέση αληθεύει, δηλαδή γίνεται μια σωστή αριθμητική ανισότητα. Το 6 όμως δεν είναι η μοναδική τιμή του x , για την οποία αληθεύει η $x-5>0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του x που είναι μεγαλύτερη από το 5. Δηλαδή η $x-5>0$ αληθεύει, όταν $x>5$. Το σύνολο όλων αυτών των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το 5, το παριστάνουμε γραφικά πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως στο διπλανό σχέδιο.

Τέτοιες ανισότητες με μια μεταβλητή, στις οποίες ζητάμε τις τιμές της μεταβλητής τους, ώστε να αληθεύουν, λέγονται **ανισώσεις με έναν άγνωστο**.

Ο άγνωστος της ανίσωσης είναι η μεταβλητή της. Το σύνολο των τιμών του αγνώστου για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση λέγεται **σύνολο λύσεων** αυτής και μπορούμε να το γράψουμε με τη μορφή ενός διαστήματος ή να το παραστήσουμε γραφικά στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

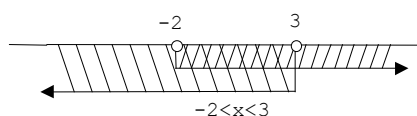
Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $x-5>0$ είναι το διάστημα $(5,+\infty)$

Αν σε μια ανίσωση δεν υπάρχουν τιμές του αγνώστου που να την επαληθεύουν τότε λέμε ότι η ανίσωση είναι **αδύνατη**. Π.χ η ανίσωση $0x > 1$ είναι αδύνατη.

Ανισώσεις που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων λέγονται **ισοδύναμες**.

Η ανίσωση που μπορεί να γραφεί με τη μορφή $ax + \beta > 0$ ή $ax + \beta < 0$, όπου x ο άγνωστος και α, β σταθεροί αριθμοί (που δεν εξαρτώνται από το x), λέγεται ανίσωση α΄ βαθμού με έναν άγνωστο.

Ας πάρουμε τις ανισώσεις $x+2>0$ και $x-3<0$. Τα σύνολα λύσεων αυτών είναι αντιστοίχως τα διαστήματα $(-2,+\infty)$ και $(-\infty,3)$. Παρατηρούμε ότι οι ανισώσεις αυτές έχουν κοινές λύσεις τους αριθμούς που είναι ανάμεσα στο -2 και στο 3. Δηλαδή, το σύνολο των κοινών λύσεων είναι το διάστημα $(-2,3)$. Λέμε τότε ότι οι ανισώσεις **συναληθεύουν** για τις τιμές του x που είναι: $-2 < x < 3$ (διπλή ανισότητα). Το διπλανό σχήμα δείχνει γραφικά τη **συναλήθευση** των δύο ανισώσεων.



Για να λύσουμε μια ανίσωση, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ανισοτήτων και κάνουμε πράξεις,

ώστε τελικά να βρούμε μια απλή ανίσωση ισοδύναμη με την αρχική, από την οποία να προκύπτει εύκολα το σύνολο λύσεων.

Η διαδικασία επίλυσης της πρωτοβάθμιας ανίσωσης μοιάζει με αυτή της πρωτοβάθμιας εξίσωσης (απαλοιφή παρονομαστών, χωρισμός γνωστών και άγνωστων όρων, αναγωγή ομοίων όρων, διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου). Κατά την επίλυση των ανισώσεων πρέπει να θυμόμαστε ότι, όταν ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός αριθμός και διαιρούμε τα μέλη της με αυτόν, πρέπει να αλλάζουμε φορά στην ανίσωση.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} \geq 2 + \frac{x}{7}$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} \geq 2 + \frac{x}{7} \quad \text{Απαλοιφή παρονομαστών (Πολ/ζουμε τα μέλη με το 70)}$$

$$70\left(\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2}\right) \geq 70\left(2 + \frac{x}{7}\right)$$

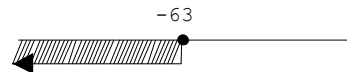
$$14(3x-1) - 35(x+1) \geq 140 + 10x \quad \text{Πράξεις}$$

$$42x - 14 - 35x - 35 \geq 140 + 10x \quad \text{Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους}$$

$$42x - 35x - 10x \geq 140 + 14 + 35 \quad \text{Αναγωγή ομοίων όρων}$$

$$-3x \geq 189 \quad \text{Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου}$$

$$x \leq -\frac{189}{3} = -63.$$



Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το διάστημα $(-\infty, -63]$.

2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

i) $3(1-2x) - 5x > 2(5-6x)$ και ii) $5(2x+3) > \frac{4x-7}{3}$.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε τις ανισώσεις i) και ii) και διαδοχικά έχουμε:

$$\text{i) } 3(1-2x) - 5x > 2(5-6x)$$

$$3-6x-5x > 10-12x$$

$$-6x-5x+12x > 10-3$$

$$x > 7$$

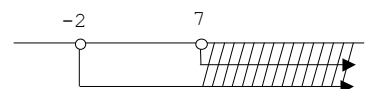
$$\text{ii) } 5(2x+3) > \frac{4x-7}{3}$$

$$15(2x+3) > 4x-7 \quad \text{ή} \quad 30x+45 > 4x-7$$

$$30x - 4x > -45-7 \quad \text{ή} \quad 26x > -52$$

$$x > -2$$

Το διάστημα που συναληθεύουν είναι το $(7, +\infty)$ και αποδίδεται γραφικά με το διπλανό σχήμα.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όταν στο διάστημα λύσεων μιας ανίσωσης περιλαμβάνεται και άκρο του διαστήματος, τότε το αντίστοιχο σημείο του άξονα θα έχει «μαύρη τελεία». Σε αντίθετη περίπτωση θα έχει «άσπρη».

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $-1 < \alpha < 3$ και $-3 < \beta < 1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: i) $\alpha + \beta$, ii) $\alpha - \beta$, iii) $2\alpha + 3\beta$.
- Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $4(x+3) - 5 > 2x - 7(x+6)$ ii) $x - 3 \leq 4(x+2) - 5x$
iii) $5(x+4) - 3x \leq 2x$.
- Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $2(\alpha - 1) - 3(2\alpha + 4) - 8 < 5(2\alpha - 1) - (3 - \alpha)$ ii) $12\beta - 3(5 - 2\beta) \geq 6(3\beta - 1) - 2(1 - 2\beta)$.
- Να βρείτε το σύνολο λύσεων των ανισώσεων:
i) $\frac{3x-1}{2} - 3(2+x) < \frac{x-3}{3}$ ii) $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$.
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διάστημα	Ανισότητα	Γραφική παράστ
$(-\infty, 2)$		
$[2, 3]$		
	$x > 2$	
	$1 < x \leq 2,5$	
		
		

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

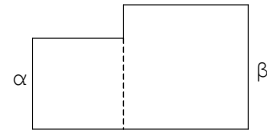
$$5(x-2) < \frac{x}{4} \text{ και } 3x+7 > \frac{x}{5} - \frac{2x+1}{10}.$$

7. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2(x+4) - (x+6) \leq 12 - x \text{ και } 2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1+x).$$

7. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $5x^2 - 45$ και μετά να βρείτε το πρόσημο της αριθμητικής τιμής της για κάθε x που είναι $-3 < x < 3$.

9. Τα μήκη των πλευρών α και β των τετραγώνων του διπλανού σχήματος είναι $1 < \alpha < 2$ και $2 < \beta < 3$. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδό του σχήματος.



10. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει:

$$\text{i) } -6 < x - 2(1+x) < -3 \quad \text{ii) } x - 1 \leq 2(1-3x) \leq 3-2x.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

Εκτός από τις εξισώσεις με έναν άγνωστο, υπάρχουν και εξισώσεις με δύο ή και με περισσότερους αγνώστους.

Η $x+y=10$ είναι μια εξίσωση που έχει δύο αγνώστους, το x και το y . Αυτή η εξίσωση επαληθεύεται με τις τιμές $x=1$ και $y=9$. Γι' αυτό το διατεταγμένο⁽¹⁾ ζεύγος $(x,y)=(1,9)$ λέμε ότι είναι λύση της. Αυτή δεν είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης, γιατί, αν βάλουμε στο x την τιμή 2 και λύσουμε ως προς y , θα βρούμε $y=8$, δηλαδή και το διατεταγμένο ζεύγος $(x,y)=(2,8)$ είναι λύση της εξίσωσης. Έτσι μπορούμε να βρούμε άπειρες λύσεις της εξίσωσης. Αυτό δε σημαίνει ότι η $x+y=10$ είναι μια ταυτότητα, γιατί η ισότητα αυτή δεν επαληθεύεται για **οποιοσδήποτε** τιμές των μεταβλητών της. Π.χ. το ζεύγος $(x,y)=(1,5)$ δεν την επαληθεύει.

Γενικά: Η εξίσωση που μπορεί να γραφεί με τη μορφή $ax+by=c$, όπου x και y άγνωστοι και a,b,c σταθεροί αριθμοί (που δεν εξαρτώνται από τα x,y), λέγεται **εξίσωση α΄ βαθμού με δύο αγνώστους**⁽²⁾.

Δύο εξισώσεις της παραπάνω μορφής, για τις οποίες θέλουμε να βρούμε τις κοινές τους λύσεις π.χ. $x+2y=1$ και $3x-5y=14$, λέμε ότι αποτελούν ένα **σύστημα α΄ βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** (ή αλλιώς, ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**).

Αν δεν υπάρχουν κοινές λύσεις αυτών των εξισώσεων, λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**, ενώ αν όλες οι λύσεις της μιας είναι και λύσεις της άλλης, λέμε ότι είναι **αόριστο**.

Συστήματα που έχουν τις ίδιες λύσεις λέγονται **ισοδύναμα**.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε να λύνουμε τέτοια συστήματα και είδαμε ότι αυτά ή θα έχουν μία μόνο λύση ή θα είναι αδύνατα ή θα είναι αόριστα.

Παρακάτω υπενθυμίζουμε τις δυο βασικότερες μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την αλγεβρική επίλυση του πρωτοβάθμιου συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Με τις μεθόδους αυτές μετατρέπουμε το σύστημα σε άλλο ισοδύναμο και απλούστερο, από το οποίο προκύπτουν εύκολα οι λύσεις.

⁽¹⁾ Διατεταγμένο λέγεται το ζεύγος στο οποίο έχουμε ορίσει ποιο στοιχείο του γράφεται πρώτο και ποιο δεύτερο.

⁽²⁾ Λέγεται και **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους

**Μέθοδος της
αντικατάστασης**

Λύνουμε τη μια εξίσωση (την απλούστερη) ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Προκύπτει έτσι μια εξίσωση με έναν άγνωστο.

$$\begin{array}{l|l} x+3y=14 & (1) \\ 5x+10y=47 & (2) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Λύνουμε την (1) ως προς } x. \text{ Έχουμε } x=14-3y \\ \text{Αντικαθιστούμε το } x \text{ με το ίσο του } 14-3y \text{ στην} \\ \text{άλλη εξίσωση} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x=14-3y & \\ 5(14-3y)+10y & \\ =47 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση, που είναι} \\ \text{α' βαθμού με άγνωστο το } y. \text{ Έχουμε: } 70- \\ 15y+10y=47 \text{ ή } -5y=47-70 \text{ ή } -5y=-23 \text{ ή} \\ y=\frac{-23}{-5}=4,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x=14-3y & \\ y=4,6 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Αντικαθιστούμε την τιμή του } y \text{ που βρήκαμε στην} \\ \text{άλλη εξίσωση.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x=14-3 \cdot 4,6 = 14-13,8 = 0,2 & \\ y=4,6 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Άρα, η λύση του συστήματος είναι } (x,y) = (0,2, 4,6) \end{array}$$

(Σημείωση: Η μέθοδος της αντικατάστασης μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα που δεν είναι γραμμικά)

**Μέθοδος των
αντίθετων
συντελεστών**

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές ενός αγνώστου, και προσθέτουμε κατά μέλη. Προκύπτει έτσι μια εξίσωση με έναν άγνωστο.

$$\begin{array}{l|l} 5 & x+2y=1 \quad (1) \\ 2 & 3x-5y=14 \quad (2) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Πολλ/ζουμε τα μέλη της (1) με το 5 και της (2) με} \\ \text{το 2, για να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές του } y \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} 5(x+2y) = 15 \\ 2(3x-5y) = 2 \cdot 14 \end{array} \right| \quad \text{Κάνουμε τις πράξεις (Επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$\left| \begin{array}{l} 5x+10y = 15 \\ 6x-10y = 28 \end{array} \right| \quad \text{Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (Ιδιότητα στις ισότητες). Βρίσκουμε: } 11x+0y=33 \text{ ή } 11x=33 \text{ Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις π.χ. την πρώτη με την } 11x=33$$

$$\left| \begin{array}{l} 11x=33 \\ 6x-10y=28 \end{array} \right| \quad \text{ή} \quad \left| \begin{array}{l} x=3 \\ 6x-10y=28 \end{array} \right| \quad \text{Θέτουμε στη δεύτερη όπου } x \text{ το } 3$$

$$\left| \begin{array}{l} x=3 \\ 6 \cdot 3 - 10y = 28 \end{array} \right| \quad \text{Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση, που έχει μοναδικό άγνωστο το } y. 18-10y=28 \text{ ή } -10y=28-18 \text{ ή } -10y=10 \text{ ή } y=-1$$

$$\left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array} \right| \quad \text{Άρα η λύση του συστήματος είναι } (x,y)=(3,-1)$$

(Για να δούμε αν σωστά λύθηκε το σύστημα κάνουμε την επαλήθευση: Η πρώτη εξίσωση δίνει: $3+2(-1)=3-2=1$ και η δεύτερη $3 \cdot 3-5(-1)=9+5=14$. Βλέπουμε ότι επαληθεύονται και οι δύο, άρα, η λύση που βρήκαμε είναι σωστή)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνεται η εξίσωση: $x-2y=10$. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη (x,y) είναι λύσεις της;
(Βάλτε + στο πλαίσιο)

$(-1,4)$ ☐ $(12,1)$ ☐ $(1,-5)$ ☐ $(-2,-6)$ ☐ $(10,0)$ ☐ $(8,-1)$ ☐

2. Το ζεύγος (x,y) που επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + (x - y)^2 = 0$ είναι:
Α: $(1,0)$ Β: $(-1,1)$ Γ: $(0,0)$ Δ: $(0,-1)$ Ε: $(2,2)$

3. Το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{έχει λύση το ζεύγος } (\alpha, \beta) \text{ που ισούνται} \\ \text{με:} \end{array}$$

Α: $(0,1)$ Β: $(1,0)$ Γ: $(0,0)$ Δ: $(1,1)$ Ε: $(1,-1)$

5. Να γράψετε μια εξίσωση α' βαθμού με έναν άγνωστο η οποία να είναι αδύνατη και μια άλλη που να έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

6. Ποια είναι η γνώμη σας για τις λύσεις της κλασματικής εξίσωσης $\frac{2(x-1)}{x-1} = 0$;

7. Ποιές τιμές δεν μπορεί να πάρει η μεταβλητή d στον τύπο $K = \frac{d+1}{d^2-4}$;

8. Δίνεται η εξίσωση $x(x-1)(x^2+1)=0$. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή με Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Η εξίσωση είναι αδύνατη. ☐

ii) Ο αριθμός -1 είναι λύση της. ☐

iii) Οι λύσεις της είναι οι αριθμοί 0 και 1. ☐

iv) Η εξίσωση έχει τρεις λύσεις. ☐

v) Μόνο το 0 είναι λύση της. ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα a και β γνωρίζοντας ότι:

i) $\frac{a}{2} = \frac{\beta}{3}$ και $a + \beta = 18$

ii) $\frac{\beta}{5} = \frac{a}{3}$ και $a - \beta = 20$.

2. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4 + 5y = 3x \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2(x+1) - (y+1) = 3 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} x - y = 3(2-x) + 2y \\ 12x - 9y = 18 \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{3y}{8} = 1 \\ 4x + 6(y-2) = 0 \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 3(x+7y) = -4 \\ 9(3+x) = 5(y+3) \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 3(\varphi - 3\omega) = 5(3\omega - \varphi) \\ 2(3\varphi - \omega) = 3(4\omega + \varphi) + 5 \end{cases}$$

5. Να λύσετε το σύστημα και να κάνετε επαλήθευση.

$$\begin{cases} x - \frac{2x - y}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{2x - 1}{6} - \frac{1 - y}{2} \end{cases}$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \sqrt{2}x = y \\ x + y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{2}x - y = 1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

Αν ο Νίκος δώσει 100 δρχ στο Γιώργο, τότε ο Γιώργος θα έχει 3-πλάσια χρήματα από το Νίκο. Αν ο Γιώργος δώσει 200 δρχ στο Νίκο, τότε ο Νίκος θα έχει 2-πλάσια χρήματα από το Γιώργο. Πόσα χρήματα έχει καθένας τους;

ΛΥΣΗ

Ας ονομάσουμε x δρχ τα χρήματα του Νίκου και y δρχ τα χρήματα του Γιώργου. Αν ο Νίκος δώσει τις 100 δρχ, θα του μείνουν $x-100$ και ο Γιώργος θα έχει $y+100$. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, θα έχουμε την εξίσωση: **$3(x-100) = y+100$**

Αν ο Γιώργος δώσει τις 200 δρχ, θα του μείνουν $y-200$ και ο Νίκος θα έχει $x+200$. Σύμφωνα με την εκφώνηση, θα έχουμε την εξίσωση: **$x+200 = 2(y-200)$**

Οι εξισώσεις που βρήκαμε σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα x και y , που παριστάνουν θετικούς αριθμούς.

$$\begin{cases} 3(x-100) = y+100 \\ x+200 = 2(y-200) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Κάνουμε τις πράξεις, για να γράψουμε πιο απλά τις εξισώσεις,} \\ \text{και λύνουμε τη δεύτερη ως προς } x \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x-300 = y+100 \\ x+200 = 2y-400 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3x-y = 300+100 \\ x = 2y-400-200 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3x-y = 400 \\ x = 2y-600 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3(2y-600)-y=400 \\ x = 2y-600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 220 \\ x = 2y-600 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 440 \\ x = 2y-600 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 440 \\ x = 2 \cdot 440 - 600 = 280 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(280,440)$ και είναι δεκτή.

Άρα, ο Νίκος είχε 280 δρχ και ο Γιώργος 440.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ποσότητες των υγρών που περιέχονται σε δυο δοχεία α' και β' , αν γνωρίζουμε ότι: i) Αν αυξηθεί κατά 1 λίτρο το 3-πλάσιο της ποσότητας του α' , θα βρούμε το 4-πλάσιο της ποσότητας του β' . ii) Αν μειώσουμε κατά 1 λίτρο το 2-πλάσιο της ποσότητας του β' , θα βρούμε την ποσότητα του α' .

ΛΥΣΗ

Έστω x λίτρα η ποσότητα του α' και y λίτρα η ποσότητα του β' . Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε τις εξισώσεις: $3x+1 = 4y$ και $2y - 1 = x$ όπου x, y είναι θετικοί αριθμοί. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων με τη μέθοδο της αντικατάστασης, αφού η δεύτερη είναι ήδη λυμένη ως προς x .

$$\begin{array}{l|l} 3x+1=4y & \text{ή} \\ 2y-1=x & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 3(2y-1)+1=4y & \text{ή} \\ 2y-1=x & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 6y-3+1=4y & \text{ή} \\ 2y-1=x & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 6y-4y=3-1 & \text{ή} \\ 2y-1=x & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 2y=2 & \\ 2y-1=x & \end{array}$$

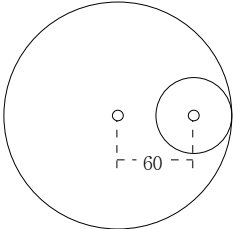
$$\begin{array}{l|l} 2y=2 & \text{ή} \\ 2y-1=x & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} y=1 & \\ 2y-1=x & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} y=1 & \text{ή} \\ 2 \cdot 1 - 1 = x & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} y=1 & \\ x=1 & \end{array}$$

Λύση $(x, y) = (1, 1)$ δεκτή. Άρα, τα δοχεία έχουν από 1 λίτρο το καθένα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 50 και διαφορά 14.
2. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x και y είναι 16m. Αν το x είναι μεγαλύτερο του y κατά 2m, να βρείτε πόσα μέτρα είναι κάθε διάσταση.
3. Θέλουμε να κόψουμε ένα χάλκινο σύρμα με μήκος 30m σε δύο κομμάτια, ώστε το μήκος του ενός να είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους του άλλου. Τι θα κάνουμε για να βρούμε το σημείο τομής;
4. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που η διαφορά τους είναι 24 και η διαίρεση του μεγαλύτερου με το μικρότερο δίνει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 3.

5. Οι τρεις τορναδόροι και οι πέντε βοηθοί τους σε ένα μηχανουργείο πληρώνονται με 55125 δρχ την ημέρα. Αν το ημερομίσθιο του βοηθού είναι τα $\frac{5}{8}$ του ημερομισθίου του τορναδόρου, πόσο είναι το ημερομίσθιο καθενός; (Οι τορναδόροι πληρώνονται με το ίδιο ημερομίσθιο)
6. Το διπλανό σχήμα δείχνει έναν τροχό και έναν τροχίσκο που συμπλέκονται μεταξύ τους και έχουν απόσταση στους άξονές τους 60 mm. Το διπλάσιο της διαμέτρου του τροχίσκου είναι μικρότερο κατά 40 mm από τη διάμετρο του τροχού. Να υπολογίσετε τις ακτίνες του τροχού και του τροχίσκου.
- 
7. Ένα ορθογώνιο με μήκος x cm και πλάτος y cm έχει περίμετρο 10cm. Αν μεγαλώσουμε το μήκος κατά $y/3$ και μικρύνουμε το πλάτος κατά $x/4$, η περίμετρος αυξάνει κατά 1cm. Να βρείτε το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου.
8. Ένας έμπορος υφασμάτων, όταν θέλησε να πληρώσει την πρώτη δόση από τις οκτώ του φόρου του στην εφορία, σκέφτηκε πως αν πουλούσε ένα κομμάτι ύφασμα προς 320δρχ το μέτρο, θα του έλειπαν ακόμα 3200δρχ. Αν όμως το πουλούσε προς 400δρχ. το μέτρο, θα του περίσσευαν 2000δρχ. Πόσα μέτρα ήταν το κομμάτι αυτό και πόσος ολόκληρος ο φόρος;
9. Δύο μαθητές A και B ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο O ενός δρόμου προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα 60μέτρα το λεπτό ο A και 75 μέτρα το λεπτό ο B. Αν ο A ξεκίνησε 4 λεπτά νωρίτερα από τον B, να βρείτε σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν από τη στιγμή που ξεκίνησε ο A και σε πόση απόσταση από το σημείο O.

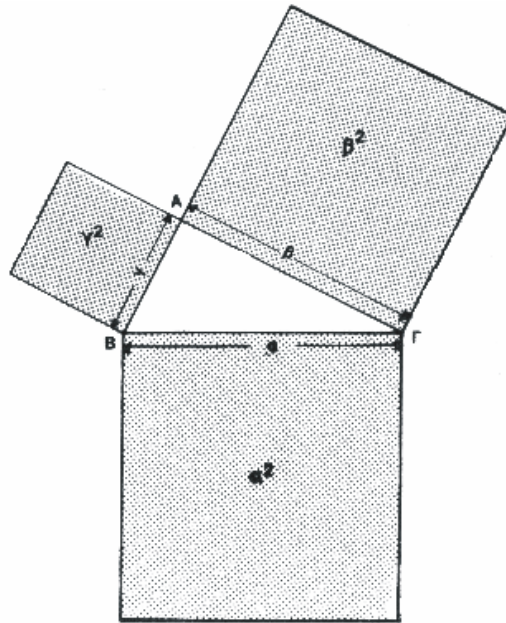
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο έλληνας φιλόσοφος Πυθαγόρας ο Σάμιος (580 – 496 π.χ.) βρήκε ότι:

Το εμβαδό του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του.

Δηλαδή

Θεώρημα Πυθαγόρα $a^2 = b^2 + \gamma^2$
--



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

Για κάθε οξεία γωνία θ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύουν:

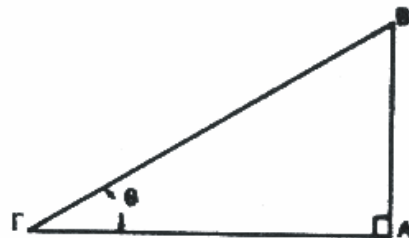
- $\eta\mu\theta = \frac{AB \text{ (απέναντι κάθετη πλευρά)}}{B\Gamma \text{ (υποτείνουσα)}}$

- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A\Gamma \text{ (προσκειμένη κάθετη πλευρά)}}{B\Gamma \text{ (υποτείνουσα)}}$

- $\epsilon\phi\theta = \frac{AB \text{ (απέναντι κάθετη πλευρά)}}{A\Gamma \text{ (προσκειμένη κάθετη πλευρά)}}$

Ο λόγος $\frac{1}{\epsilon\phi\theta}$ ονομάζεται $\sigma\phi\theta$. Δηλαδή

- $\sigma\phi\theta = \frac{1}{\epsilon\phi\theta} = \frac{A\Gamma \text{ (προσκειμένη κάθετη πλευρά)}}{AB \text{ (απέναντι κάθετη πλευρά)}}$



Οι αριθμοί $\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\theta$, $\epsilon\phi\theta$, $\sigma\phi\theta$ ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** της γωνίας θ .

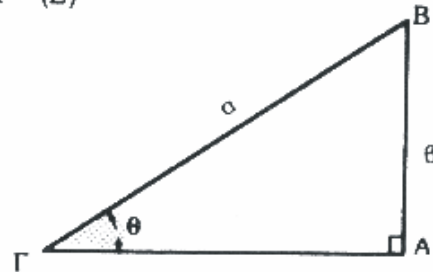
Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών

Ξέρουμε, ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$ ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ (1)

$$\text{Από την (1) βρίσκουμε } \left(\frac{AB}{B\Gamma}\right)^2 + \left(\frac{A\Gamma}{B\Gamma}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

Επειδή όμως $\eta\mu\theta = \frac{AB}{B\Gamma}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$
από την (2) έχουμε:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$



Ακόμη, σύμφωνα με τον ορισμό της $\epsilon\phi\theta$ και της $\sigma\phi\theta$ έχουμε:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{Y}{\beta} = \frac{\frac{Y}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \sigma\phi\theta = \frac{\beta}{Y} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{Y}{\alpha}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

Έτσι για κάθε οξεία γωνία θ ισχύει:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

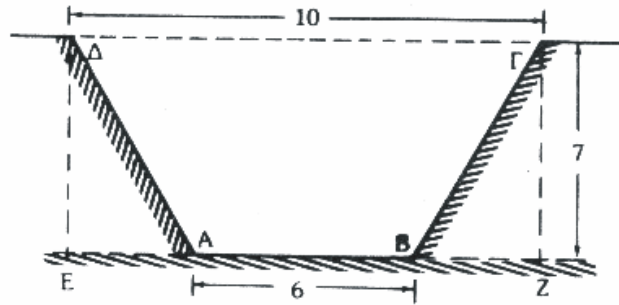
Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\epsilon\phi\theta \cdot \sigma\phi\theta = 1$$

$$\text{οπότε έχουμε } \epsilon\phi\theta = \frac{1}{\sigma\phi\theta} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\theta = \frac{1}{\epsilon\phi\theta}$$

Εφαρμογές

1. Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει τη διατομή ενός αυλακιού (ισοσκελές τραπέζιο). Να βρεθεί η περίμετρος $\Delta AB\Gamma$ της διατομής. Οι διαστάσεις είναι σε dm.



Λύση: Τα ορθογώνια τρίγωνα $E\Delta A$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα (απόδειξη εύκολη). Άρα

$$EA = BZ = \frac{10 - 6}{2} = 2 \text{ dm.}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BZ^2 + \Gamma Z^2 = 2^2 + 7^2 = 4 + 49 = 53$$

Άρα $B\Gamma = \sqrt{53} = 7,28 \text{ dm.}$

Επομένως η περίμετρος είναι $\Delta A + AB + B\Gamma = 7,28 + 6 + 7,28 = 20,56 \text{ dm.}$

2. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$

Λύση: Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 80) με πλευρά $a = AB = 2$. Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ που είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A} = 60^\circ$ και διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.

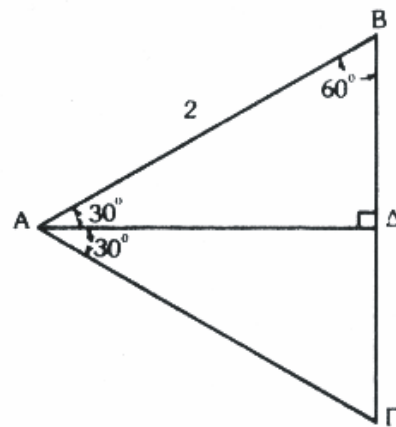
Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε:

$$B\Delta = 1, \quad B\Delta\Delta = 30^\circ, \quad \Delta B\Delta = 60^\circ$$

και

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 4 - 1 = 3$$

Άρα $A\Delta = \sqrt{3}.$



Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε τώρα ότι

$$\eta\mu 30^\circ = \eta\mu \Delta AB = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi 30^\circ = \epsilon\phi \Delta AB = \frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu \Delta AB = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\phi 30^\circ = \sigma\phi \Delta AB = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\eta\mu 60^\circ = \eta\mu AB\Delta = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 60^\circ = \epsilon\phi AB\Delta = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu AB\Delta = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\phi 60^\circ = \sigma\phi AB\Delta = \frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας $\theta = 45^\circ$ θεωρούμε το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $AB = 1$

Τότε είναι $\theta = B = \Gamma = 45^\circ$ και $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 1 + 1 = 2$. Άρα $B\Gamma = \sqrt{2}$.

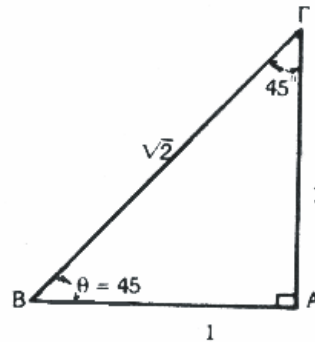
Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε:

$$\eta\mu 45^\circ = \eta\mu\theta = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{BA}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\epsilon\phi 45^\circ = \epsilon\phi\theta = \frac{A\Gamma}{AB} = 1$$

$$\sigma\phi 45^\circ = \sigma\phi\theta = \frac{BA}{B\Gamma} = 1$$



Τα αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω τα συγκεντρώνουμε στον επόμενο πίνακα.

θ	30°	45°	60°
$\eta\mu\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\phi\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\sigma\phi\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

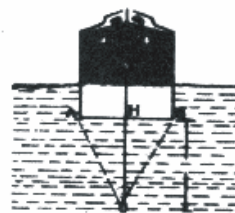
$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

3. Στο σημείο A (σχ. 82) βρίσκεται μια ηχητική πηγή και στο σημείο B ένας δέκτης ήχου. Το σύστημα αυτό προσαρμοσμένο όπως δείχνει η εικόνα, χρησιμοποιείται για την εύρεση του βάθους της θάλασσας. Δίδεται ότι:

- $AB = 32\text{m}$.
 - Η ταχύτητα του ήχου στη θάλασσα: 1510m/sec
 - Ο χρόνος από τη στιγμή της «εκπομπής» από το A μέχρι τη στιγμή της «λήψης» στο B είναι $0,2\text{sec}$.
- Ζητείται το βάθος της θάλασσας στο O .



Λύση: Έστω x το βάθος της θάλασσας. Από τον τύπο $S = v \cdot t$ βρίσκουμε ότι η «διαδρομή» $AO + OB$ έχει μήκος S με

$$S = 1510 \cdot 0,2 = 302\text{m}.$$

Συνεπώς $OB = \frac{302}{2} = 151\text{m}$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε

$$x^2 = 151^2 - 16^2 = 22.545 \text{ ή}$$

$$x \approx 150,153 \text{ m}$$

7. Να βρεθεί το ύψος $h = BF$ του στύλου στο παραπλεύρως σχήμα.

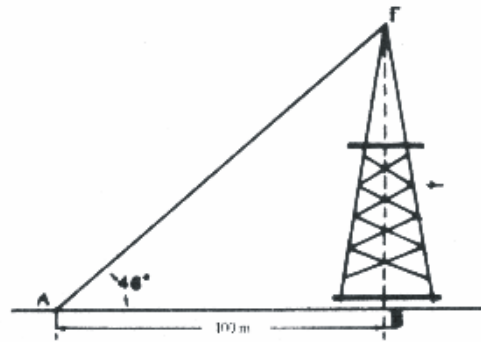
Λύση: Είναι $\epsilon\phi A = \frac{h}{AB}$ ή

$$h = AB \cdot \epsilon\phi A$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$h = 100 \cdot \epsilon\phi 46^\circ = 100 \cdot 1,036 \\ = 103,6$$

Έτσι το ύψος του στύλου είναι 103,6 m.



8. Στο διπλανό σχήμα 9 η απόσταση AD είναι 3m. Να βρεθεί το c .

Λύση: Από το σχήμα έχουμε:

$$\epsilon\phi B = \frac{OA}{BO} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi \Gamma = \frac{OD}{OG} \quad \text{ή}$$

$$OA = BO \cdot \epsilon\phi B \quad \text{και} \quad OD = OG \cdot \epsilon\phi \Gamma$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$OA = c \epsilon\phi(61^\circ 10') \quad \text{και} \quad OD = c \epsilon\phi 30^\circ \quad \text{ή}$$

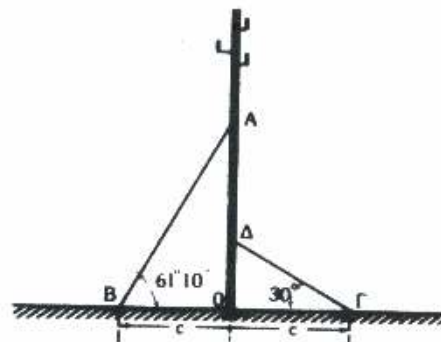
$$OA = 1,816 c \quad \text{και} \quad OD = 0,577 c.$$

$$\text{Είναι όμως } AD = OA - OD = 1,816 c - 0,577 c = (1,816 - 0,577)c = 1,239 c$$

Επειδή, όμως $AD = 3\text{m}$, έπεται ότι:

$$1,239 c = 3 \quad \text{ή} \quad c = \frac{3}{1,239} \approx 2,421$$

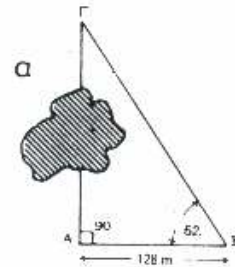
Έτσι $c = 2,421 \text{ m}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

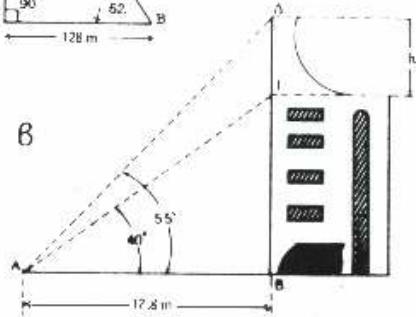
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{ορθ}$) είναι $AG = 7,5\text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = \frac{\pi}{8}$. Να βρεθούν τα άλλα στοιχεία του τριγώνου (δηλ. $B\Gamma$, AB , $\hat{B}$) με προσέγγιση εκατοστού.

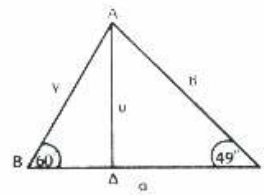


2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση AG . (σχ. α)

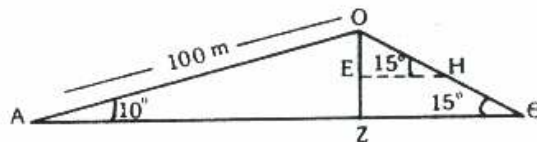
Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστεί το ύψος h . (σχ. β)



3. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος το u είναι ύψος. Να υπολογιστούν το u και οι πλευρές B και γ με προσέγγιση εκατοστού, αν $a = 18\text{ m}$.

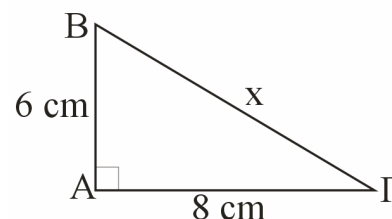


4. Ανεβαίνει κάποιος ένα δρόμο $AO = 100\text{ m}$ και μετά κατεβαίνει $OH = 40\text{ m}$, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να βρεθεί η διαφορά ύψους EZ .

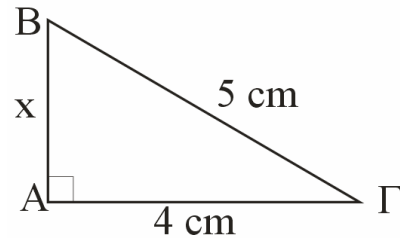


5. Ένα αεροπλάνο απογειώνεται και αφήνει το έδαφος με γωνία 10° . Αφού διανύσει 1000 m , αρχίζει να ανυψώνεται με γωνία 20° ως προς το έδαφος. Να βρείτε σε τι ύψος θα πετάει, όταν θα έχει διανύσει 2 km από τη στιγμή της απογείωσης. (Δίνεται $\eta\mu 10^\circ = 0,174$, $\eta\mu 20^\circ = 0,342$).

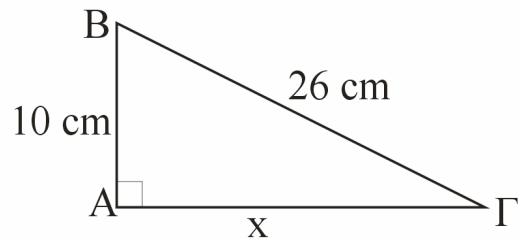
6. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x .



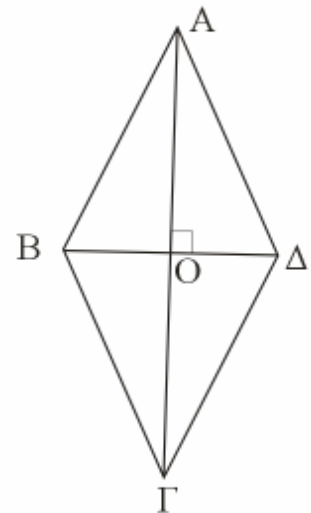
7. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x .



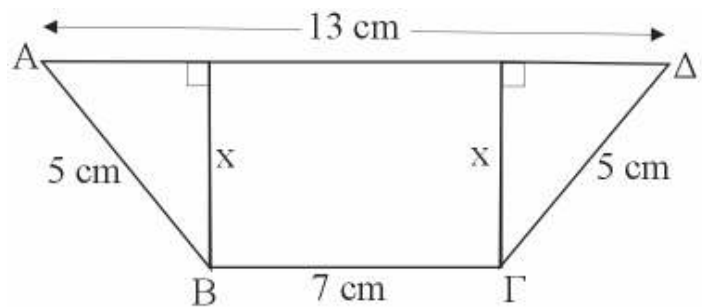
8. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x .



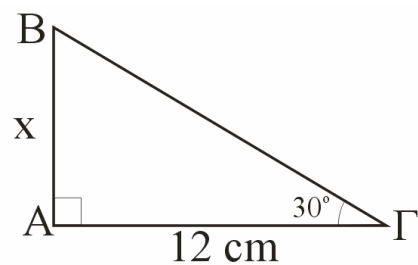
9. Στο διπλανό ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ οι διαγώνιες έχουν μήκη $(A\Gamma)=16$ m και $(B\Delta)=12$ m. Να υπολογιστεί η περίμετρος του ρόμβου.



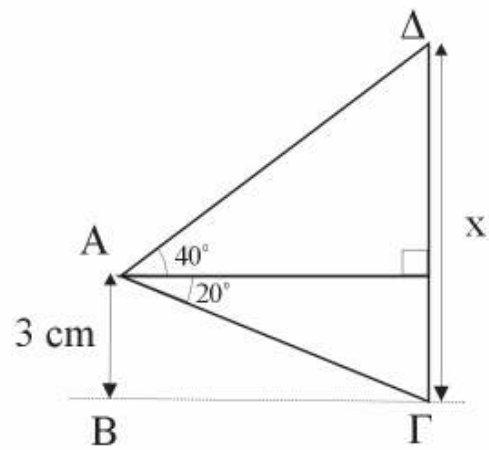
9. Στο διπλανό ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ τα μήκη των πλευρών είναι $(AB)=(\Gamma\Delta)=5$ cm, $(A\Delta)=13$ cm και $(B\Gamma)=7$ cm. Να υπολογιστεί το μήκος του ύψους x .



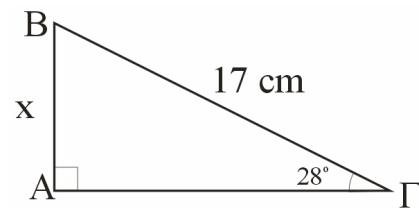
10. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x .



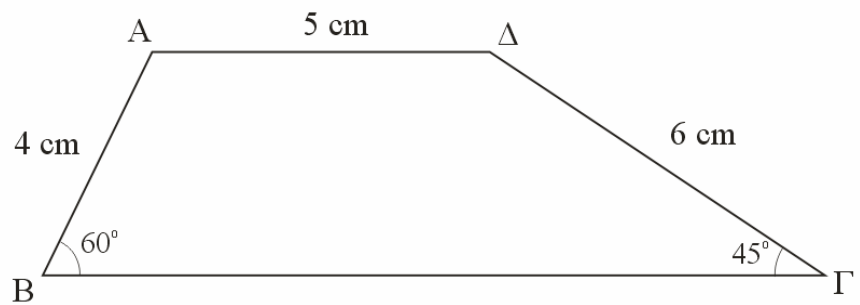
11. Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστεί το μήκος του ύψους x .



12. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x .



12. Στο διπλανό τραπέζιο $ABΓΔ$ να υπολογιστεί το μήκος της μεγάλης βάσης $BΓ$.



ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

Μέγεθος ονομάζουμε οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί. Γνωστά μεγέθη είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, το βάρος, ο χρόνος, η θερμοκρασία κ.ά.

Μέτρηση ενός μεγέθους είναι η σύγκρισή του με ένα άλλο ομοειδές μέγεθος το οποίο θεωρούμε ως μονάδα.

Πίνακας μονάδων βασικών μεγεθών

Μονάδες μήκους	Βασική μονάδα μέτρησης του μήκους είναι το μέτρο (m). Τα πολλαπλάσια και οι υποδιαιρέσεις του μέτρου είναι: α) πολλαπλάσια: i) δεκάμετρο (dam). $1\text{dam}=10\text{m}$ ii) εκατόμετρο (hm). $1\text{hm}=100\text{m}$ iii) χιλιόμετρο (km). $1\text{km}=1.000\text{m}$ β) υποδιαιρέσεις: i) δεκατόμετρο ή παλάμη (dm). $1\text{m}=10\text{dm}$ ii) εκατοστόμετρο ή πόντος (cm). $1\text{m}=100\text{cm}$ iii) χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό (mm). $1\text{m}=1.000\text{mm}$ Άλλες μονάδες μέτρησης μήκους είναι: i) η γνάρδα (yrd). Η γνάρδα υποδιαιρείται σε 3 πόδια (ft) και το κάθε πόδι 12 σε ίντσες (in). $1\text{yrd}=3\text{ft}=36\text{in}$ Επίσης η σχέση μεταξύ του μέτρου και της γνάρδας είναι: $1\text{yrd}=0,9144\text{m}=91,44\text{cm}$ ii) το μίλι (χρησιμοποιείται για μεγάλες αποστάσεις) $1\text{μίλι}=1609\text{m}=1,609\text{km}$ Στη ναυτιλία χρησιμοποιείται το ναυτικό μίλι. $1\text{ναυτικό μίλι}=1852\text{m}=1,852\text{km}$
Μονάδες Εμβαδού	Βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2). Τα πολλαπλάσια και οι υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου είναι: α) πολλαπλάσια: i) τετραγωνικό δεκάμετρο (dam^2). $1\text{dam}^2=100\text{m}^2$ ii) τετραγωνικό εκατόμετρο (hm^2). $1\text{hm}^2=10.000\text{m}^2$ iii) τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2). $1\text{km}^2=1.000.000\text{m}^2$ ένα ακόμη πολλαπλάσιο που χρησιμοποιείται για μεγάλες εκτάσεις είναι το στρέμμα $1\text{στρέμμα}=1000\text{m}^2$ β) υποδιαιρέσεις: i) τετραγωνικό δεκατόμετρο ή τετραγωνική παλάμη (dm^2). $1\text{m}^2=100\text{dm}^2$ ii) τετραγωνικό εκατοστόμετρο ή τετραγωνικός πόντος (cm^2). $1\text{m}^2=10.000\text{cm}^2$ iii) τετραγωνικό χιλιοστόμετρο ή τετραγωνικό χιλιοστό (mm^2). $1\text{m}^2=1.000.000\text{mm}^2$

Μονάδες Όγκου	Βασική μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το κυβικό μέτρο (m^3). Οι υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι: i) κυβικό δεκατόμετρο ή κυβική παλάμη (dm^3). $1m^3=1.000dm^3$ ii) κυβικό εκατοστόμετρο ή κυβικός πόντος (cm^3). $1m^3=1.000.000cm^3$ iii) κυβικό χιλιοστόμετρο ή κυβικό χιλιοστό (mm^3). $1m^3=1.000.000.000mm^3$ Για να εκφράσουμε τον όγκο υγρών συνήθως χρησιμοποιούμε το λίτρο (l) το οποίο είναι $1dm^3$. Επομένως το $1cm^3$ είναι το χιλιοστόλιτρο (ml) $1l = 1dm^3 = 1.000cm^3 = 1.000ml$
Μονάδες Μάζας	Βασική μονάδα μέτρησης της μάζας (στην καθημερινότητα συχνά χρησιμοποιούμε αντί του όρου «μάζα» το όρος «βάρος») είναι το χιλιόγραμμα ή κιλό (kg). Πολλαπλάσιο του κιλού είναι ο τόνος (tn). $1tn=1.000kg$ Υποδιαιρέσεις του κιλού είναι: i) το γραμμάριο (g). $1kg=1.000g$ ii) το χιλιοστογραμμάριο (mg-μυλιγκράμ). $1kg=1.000.000mg$
Μονάδες Χρόνου	Βασική μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (s). Άλλες μονάδες είναι: i) το λεπτό (min). $1min=60s$ ii) η ώρα (h). $1h=60min$ Άρα έχουμε: $1h=60min=3600s$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $23,45\text{m} = \dots\dots\dots \text{dm} = \dots\dots\dots \text{cm} = \dots\dots\dots \text{mm}$

β) $567\text{cm} = \dots\dots\dots \text{dm} = \dots\dots\dots \text{m} = \dots\dots\dots \text{mm}$

γ) $3,75 \text{ km} = \dots\dots\dots \text{m} = \dots\dots\dots \text{cm} = \dots\dots\dots \text{mm}$

δ) $76234\text{mm} = \dots\dots\dots \text{cm} = \dots\dots\dots \text{dm} = \dots\dots\dots \text{m}$

2. Τα παρακάτω μήκη να γραφτούν σε αύξουσα σειρά.

α) $0,04765\text{km}$, $0,432\text{m}$, 4321646cm , 562375032mm .

β) 57643mm , 542dm , $0,53282\text{m}$, 5739cm , $0,05637\text{km}$.

3. α) Να βρείτε, σε m, την πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου το οποίο έχει περίμετρο $16,5\text{cm}$.

β) Να βρείτε την περίμετρο σε mm ενός ισοσκελούς τριγώνου του οποίου η βάση έχει μήκος $0,034\text{m}$ και η καθεμία από τις ίσες πλευρές του έχει μήκος διπλάσιο από το μήκος της βάσης.

4. Ένα αεροπλάνο πετάει σε ύψος 2.800 ft και ένα άλλο σε ύψος 980m . Ποιο από τα δύο αεροπλάνα πετάει ψηλότερα;

5. Η απόσταση από το λιμάνι του Πειραιά μέχρι το λιμάνι της Σούδας είναι περίπου 165 ναυτικά μίλια. Πόσα χιλιόμετρα είναι η απόσταση αυτή; Κάνετε σύγκριση με την απόσταση Αθήνα – Λάρισα.

6. Η διάμετρος ενός σωλήνα (α) είναι $1,5 \text{ in}$ και ενός άλλου σωλήνα (β) είναι $3,5\text{cm}$. Ποιος σωλήνας έχει μεγαλύτερη διάμετρο;

7. Πόσα cm είναι η διαγώνιος της οθόνης ενός υπολογιστή, όταν λέμε ότι είναι 32 in ;

8. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $62\text{m}^2 = \dots\dots\dots \text{dm}^2 = \dots\dots\dots \text{cm}^2 = \dots\dots\dots \text{mm}^2$

β) $0,049\text{km}^2 = \dots\dots\dots \text{m}^2 = \dots\dots\dots \text{στρέμματα}$

γ) $25476\text{mm}^2 = \dots\dots\dots \text{cm}^2 = \dots\dots\dots \text{dm}^2 = \dots\dots\dots \text{m}^2$

δ) $4,35\text{στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{m}^2 = \dots\dots\dots \text{dm}^2$.

9. Η Νάξος έχει έκταση 428000 στρέμματα, ενώ η Σάμος 476km^2 . Ποιο από τα δύο νησιά είναι μεγαλύτερο σε έκταση;

10. Ένα κτήμα έχει 300 ελιές φυτεμένες. Αν στα 220 m^2 υπάρχουν 8 ελιές, πόσα στρέμματα είναι το κτήμα;

11. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $25\text{m}^3 = \dots\dots\dots \text{dm}^3 = \dots\dots\dots \text{cm}^3 = \dots\dots\dots \text{mm}^3$

$$\beta) 0,0037 \text{ km}^3 = \dots \text{ m}^3 = \dots \text{ l}$$

$$\gamma) 2547632 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ m}^3$$

$$\delta) 45,23 \text{ l} = \dots \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3$$

12. Ένα βαρέλι περιέχει 150 l λάδι. Θέλουμε να το συσκευάσουμε σε δοχεία χωρητικότητας 750 ml. Πόσα περίπου δοχεία θα χρειαστούμε;

13. Ένα αυτοκίνητο στα 100 km καταναλώνει 8 λίτρα (l) βενζίνης. Αν το ρεζερβουάρ χωράει 42 λίτρα και η τιμή της βενζίνης είναι 1,5 € το λίτρο, πόσα € θα δώσει για να το γεμίσει και πόσα χιλιόμετρα μπορεί να ταξιδέψει;

14. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) 2,456 \text{ kg} = \dots \text{ g} = \dots \text{ mg}$$

$$\beta) 29,047 \text{ mg} = \dots \text{ g} = \dots \text{ kg}$$

$$\gamma) 0,34 \text{ t} = \dots \text{ kg} = \dots \text{ g}$$

15. Ζυγίζουμε ένα κουτί που περιέχει 20 ίδια πακέτα και το βάρος του είναι 3kg. Αν το απόβαρο του κουτιού είναι 350g, να υπολογίσετε το βάρος του κάθε πακέτου.

16. Το βιβλίο της Γεωμετρίας ζυγίζει 0,750 kg, της Άλγεβρας είναι κατά 350 g ελαφρύτερο, ενώ της Φυσικής είναι κατά 50 g βαρύτερο. Ποιο είναι το βάρος μιας σχολικής τσάντας που περιέχει τα παραπάνω βιβλία και 4 τετράδια βάρους 60 g το καθένα, αν όταν είναι άδεια αυτή ζυγίζει 1,4 kg.

17. α) Να βρείτε πόσα λεπτά (min) και πόσα δευτερόλεπτα (s) έχει μία μέρα (το εικοσιτετράωρο). β) Να βρείτε την ηλικία σας σε έτη, σε μήνες, σε μέρες (1 έτος=365 μέρες).

18. Να τοποθετήσετε σε φθίνουσα σειρά τους παρακάτω χρόνους:

1,5 h, 150 min, 240000 s, 1,2 h.

19. Πόσα χρόνια πέρασαν από τη μάχη του Μαραθώνα που έγινε το 490 π.χ. ;

20. Ένα ξεκινά στις 9.15 π.μ από την Αθήνα και φθάνει στη Θεσσαλονίκη 2.35 μ.μ. Πόση ήταν η διάρκεια του ταξιδιού;

21. Μετατρέψτε: α) γωνία $53,28^\circ$ (μοίρες) σε πρώτα λεπτά (') β) γωνία $2765'$ (πρώτα λεπτά) σε μοίρες.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ-ΤΡΑΠΕΖΙΑ

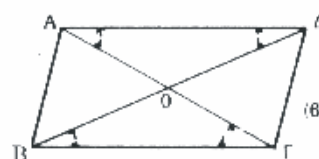
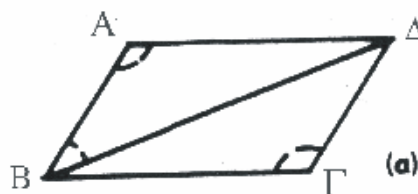
Παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο, που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. (βρίσκονται αντίστοιχα σε παράλληλες ευθείες).

Μπορούμε να δείξουμε ότι:

Στο παραλληλόγραμμο

- Κάθε διαγώνίός του το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.
- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται.



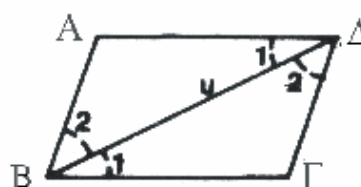
Για να κρίνουμε αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο έχουμε και τα εξής κριτήρια.

Ένα (κυριό) τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μία από τις επόμενες προτάσεις:

- Οι απέναντι πλευρές του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες.
- Δύο απέναντι πλευρές του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες και παράλληλες.
- Οι απέναντι γωνίες του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες.
- Οι διαγώνιες του $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται.
- Μια γωνία του $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική καθεμιάς από τις δύο διαδοχικές της γωνίες.

Απόδειξη: (Θα αποδείξουμε ενδεικτικά μόνο την α' πρόταση).

Φέρνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ και τότε έχουμε: $\Delta\Delta B = \Delta\Delta \Gamma$ γιατί $AB = \Delta\Gamma$, $A\Delta = B\Gamma$, $B\Delta = B\Delta$. Άρα $(\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{B}_2)$ οπότε αντίστοιχα είναι $(A\Delta // B\Gamma$ και $AB // \Delta\Gamma)$. Συνεπώς το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε ένα παραλληλόγραμμο η μία πλευρά του χαρακτηρίζεται συνήθως **βάση** και η απόσταση μιας απέναντι κορυφής του από τη βάση **ύψος**.

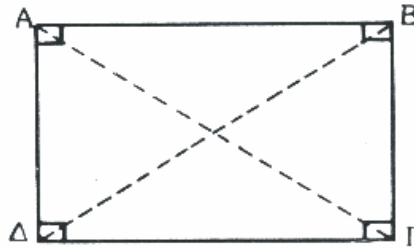
Ορθογώνιο.

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή απλά **ορθογώνιο** ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

Θα αποδείξουμε ότι:

Στο ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες.

Απόδειξη: Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια και ίσα αφού ($B\Gamma = B\Gamma$, $AB = \Gamma\Delta$, $B = \Delta = 90^\circ$). Συνεπώς $A\Gamma = B\Delta$.



Για να κρίνουμε αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο έχουμε τα εξής κριτήρια:

- Ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο αν ισχύει μία από τις προτάσεις:
- Μία γωνία του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθή.
- Οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

Απόδειξη: i) Αφήνεται για άσκηση.

ii) Ας υποθέσουμε ότι $A\Gamma = B\Delta$ (σχ. 50). Τότε επειδή $B\Gamma = B\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$, $AB = \Delta\Gamma$ έχουμε τριγ. $AB\Gamma =$ τριγ. $B\Gamma\Delta$ (1). Από την (1) προκύπτει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (2).

Όμως σε κάθε παραλληλόγραμμο είναι και $B + \Gamma = 180^\circ$. (3)

Συνεπώς από τις (2) και (3) έχουμε $2B = 180^\circ$ ή $B = 90^\circ$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Είναι φανερό ότι **βάση** και **ύψος** ενός ορθογωνίου είναι δυο διαδοχικές πλευρές του, που λέγονται **διαστάσεις** του ορθογωνίου.

Ρόμβος

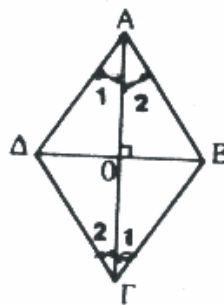
Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Θα αποδείξουμε ότι:

Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Απόδειξη: Έχουμε τριγ. $AOB =$ τριγ. $BO\Gamma$ γιατί $BO = BO$, $AB = B\Gamma$, $AO = O\Gamma$. Συνεπώς $\hat{BOA} = \hat{BO\Gamma}$

και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Επειδή όμως
 $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ θα είναι
 $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 90^\circ$ δηλαδή η BO είναι
 κάθετη στην AG . Ακόμη επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$
 και $B\Gamma \parallel A\Delta$ έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1, \hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$ δη-
 λαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, που σημαίνει ότι η διαγώνιος
 BD διχοτομεί τις γωνίες B και Δ . Όμοια
 εργαζόμαστε για τη διαγώνιο AG .



Μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

Ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, αν ισχύει μία από τις προτάσεις:

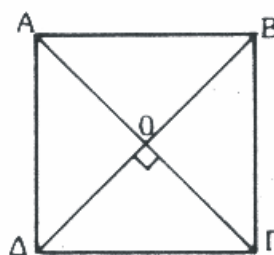
- Δύο διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες.
- Οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.
- Μία διαγώνιος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομεί μία γωνία του.

Τετράγωνο.

Τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ορθές. Δηλαδή, τετράγωνο είναι το παραλληλόγραμμο, που είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Να δείξετε ότι οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι κάθετες.



Το τραπέζιο.

Το τετράπλευρο, που έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές του παράλληλες, λέγεται **τραπέζιο**. Οι παράλληλες πλευρές λέγονται **βάσεις** και η απόστασή τους, **ύψος** του τραpezίου.

Ένα τραπέζιο, που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο**.

Αποδεικνύεται ότι:

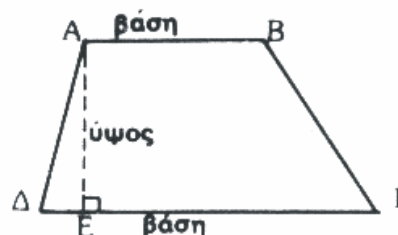
Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με βάσεις $ΑΒ$ και $ΓΔ$.

- Οι γωνίες, που πρόσκεινται σε κάθε βάση του, είναι ίσες.
- Οι διαγώνιές του είναι ίσες.

Αντίστροφα.

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν αληθεύει μία από τις συνθήκες:

- Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του, είναι ίσες.
- Οι διαγώνιές του είναι ίσες.
- Η ευθεία, που συνδέει τα μέσα των βάσεων, είναι κάθετη σ' αυτές.



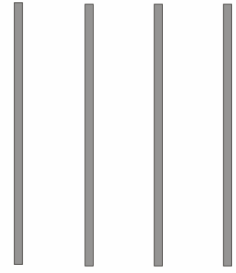
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

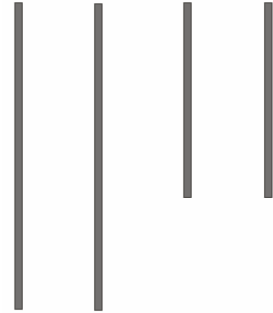
1. Χαρακτηρίστε την κάθε μία από τις παρακάτω φράσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- | | | |
|--|-----|-----|
| α. Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος. | (Σ) | (Λ) |
| β. Ένας ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο. | (Σ) | (Λ) |
| γ. Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος. | (Σ) | (Λ) |
| δ. Η διαγώνιος του ορθογώνιου χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα. | (Σ) | (Λ) |
| ε. Η διαγώνιος του τετραγώνου το χωρίζει σε δύο ισοσκελή τρίγωνα. | (Σ) | (Λ) |

2. Τι είδους τετράπλευρα μπορούν να κατασκευαστούν και με τις τέσσερις ίσες ράβδους της διπλανής εικόνας;
(Δικαιολογείστε την απάντηση).



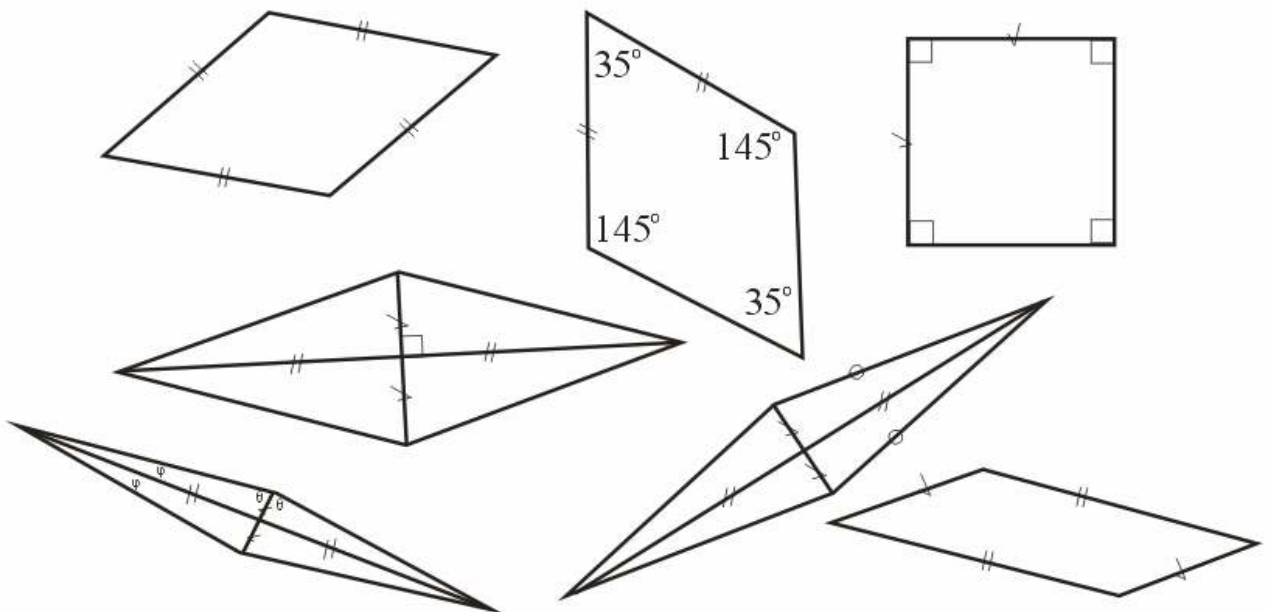
3. Τι είδους τετράπλευρα μπορούν να κατασκευαστούν και με τις τέσσερις ίσες ράβδους της διπλανής εικόνας;
(Δικαιολογείστε την απάντηση).



4. Εξηγείστε γιατί το διπλανό τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο. Τι παρατηρείτε για τις διπλάνες (προσκειμένες) γωνίες;

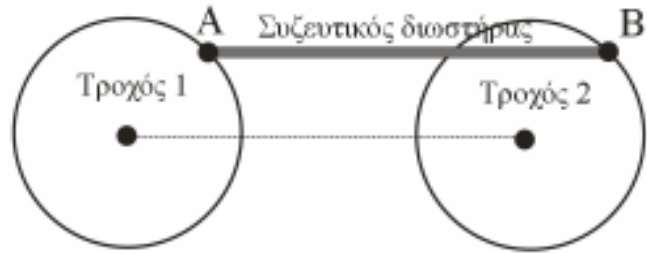


5. Κάποιο από τα παρακάτω τετράπλευρα δεν ανήκει στην ίδια κατηγορία με όλα τα υπόλοιπα. Εξηγείστε το γιατί.



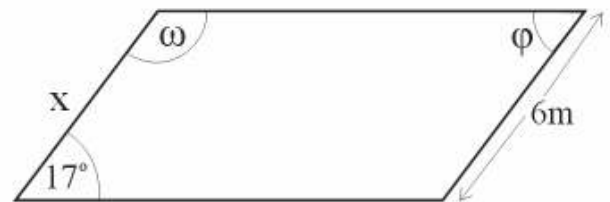
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δύο τροχοί με ίσες ακτίνες συνδέονται με ένα διωστήρα που έχει μήκος ίσο με την απόσταση των αξόνων των δύο τροχών. Να δικαιολογήσετε γιατί ο διωστήρας είναι πάντοτε παράλληλος προς την ευθεία που ενώνει τα κέντρα των τροχών.

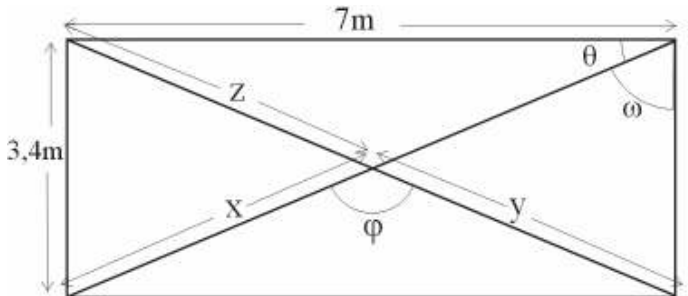


2. Αν σε ένα παραλληλόγραμμο μία γωνία του είναι ορθή να δικαιολογήσετε γιατί το παραλληλόγραμμο αυτό πρέπει να είναι ορθογώνιο.

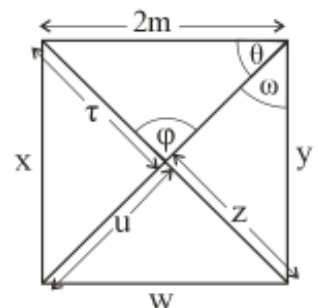
3. Αν το διπλανό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x και το μέτρο των γωνιών ω και ϕ .



4. Αν το διπλανό τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων x , y και z , καθώς και το μέτρο των γωνιών ω , ϕ και θ .



5. Αν το διπλανό τετράπλευρο είναι τετράγωνο, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων x , y , z , w , u και τ , καθώς και το μέτρο των γωνιών ω , ϕ και θ .



ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ-ΚΛΙΜΑΚΑ

Όταν η φωτογραφία ενός προσώπου μεγεθύνεται ή σμικρύνεται, το πρόσωπο παραμένει το ίδιο. Αυτό συμβαίνει γιατί οι σχέσεις όλων το μεγεθών στο σχήμα παραμένουν αναλλοίωτες. Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα το πλάτος της μύτης α προς το πλάτος α' της σμίκρυνσης είναι το ίδιο με το πλάτος του προσώπου β προς το πλάτος β' :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$$



Τέτοιες σχέσεις ισχύουν για όλα τα μήκη των επιμέρους στοιχείων των δύο σχημάτων. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται **όμοια**.

Όταν τα σχήματα είναι πολύγωνα έχουμε ειδικότερα:

Όμοια πολύγωνα

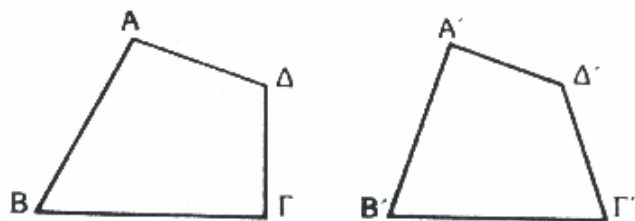
Δύο (κυριά) πολύγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν αντίστοιχα ίσες μία προς μία όλες τις γωνίες τους και ανάλογα τα ζεύγη των πλευρών που ορίζονται από τις κορυφές των αντίστοιχων ίσων γωνιών.

Για παράδειγμα τα δύο (κυριά) τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι **όμοια**, αν και μόνο, αν ισχύουν:

$$(I) \hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'},$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma'}, \hat{\Delta} = \hat{\Delta'}$$

$$(II) \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'}$$



Συμβολικά γράφουμε: $AB\Gamma\Delta \sim A'B'\Gamma'\Delta'$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η ομοιότητα δύο πολυγώνων απαιτεί δύο συνθήκες. Γενικά η ύπαρξη της μιας δεν συνεπάγεται οπωσδήποτε την άλλη.

Κλίμακες. Σμίκρυνση και μεγένθυση.

Όταν ο μηχανικός θέλει να απεικονίσει ένα οικοπέδο σ' ένα χαρτί, σχεδιάζει σ' αυτό ένα σχήμα πολύ μικρότερο, ώστε να χωράει στο χαρτί και να είναι **όμοιο** προς το σχήμα του οικοπέδου.

Αυτό το όμοιο σχήμα, που γίνεται στο χαρτί, λέγεται **σχέδιο** ή **σχεδιάγραμμα**.

Ο λόγος της ομοιότητας του σχεδίου προς το όμοιό του πραγματικό λέγεται **κλίμακα** και συμβολίζεται **κ**. Έστω:

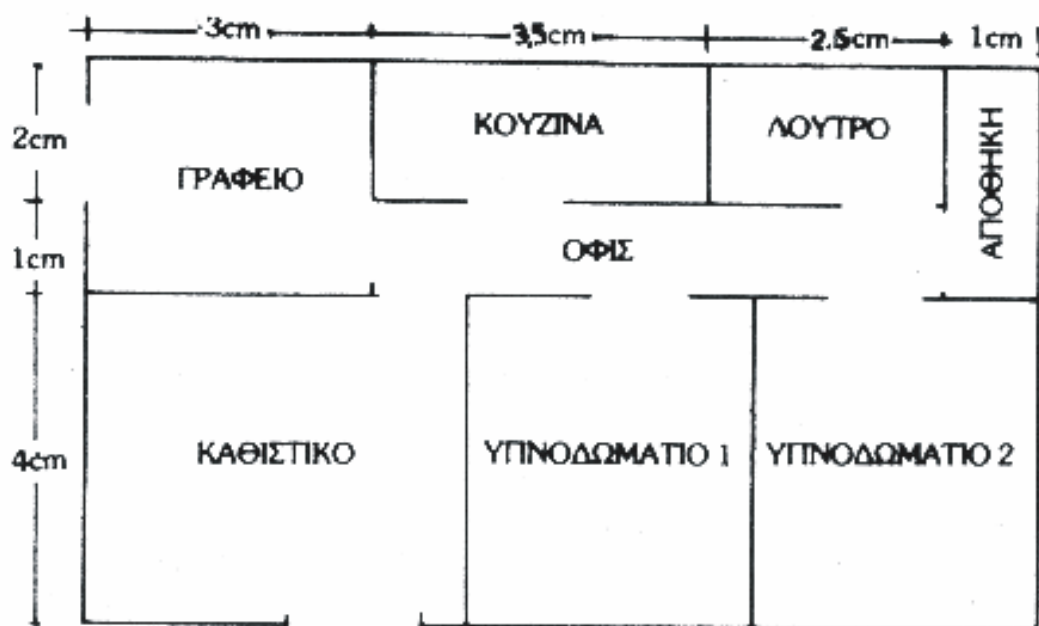
Αν συμβολίσουμε την απόσταση δύο σημείων του σχεδίου με **α** και την πραγματική απόσταση των αντίστοιχων σημείων με **[α]** τότε έχουμε

$$\kappa = \frac{a}{[a]} \quad \text{ή} \quad a = \kappa \cdot [a]$$

(Κλίμακα = $\frac{\text{απόσταση δύο σημείων του σχεδίου}}{\text{απόσταση δύο σημείων πραγματική}}$)

Αν είναι $\kappa < 1$ τότε λέμε ότι έχουμε **σμίκρυνση**, ενώ όταν $\kappa > 1$, έχουμε **μεγένθυση**. Η κλίμακα αναγράφεται πάντοτε στο φύλλο σχεδίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Το σχέδιο που ακολουθεί δείχνει την «κάτοψη» ενός σπιτιού με κλίμακα $\kappa = 1:100$. Να βρεθούν οι διαστάσεις κάθε δωματίου.



$$\text{Έχουμε } \kappa = \frac{a}{[a]} \quad \text{ή} \quad [a] = \frac{1}{\kappa} \cdot a \quad \text{με} \quad \frac{1}{\kappa} = 100$$

Συνεπώς βρίσκουμε

Καθιστικό:	$0,04 \times 100 = 4\text{m}$	και $0,04 \times 100 = 4\text{m}$
Υπνοδωμάτιο (1,2):	$0,03 \times 100 = 3\text{m}$	και $0,04 \times 100 = 4\text{m}$
Κουζίνα:	$0,035 \times 100 = 3,5\text{m}$	και $0,02 \times 100 = 2\text{m}$
Αποθήκη:	$0,01 \times 100 = 1\text{m}$	και $0,03 \times 100 = 3\text{m}$
Γραφείο:	$0,03 \times 100 = 3\text{m}$	και $0,03 \times 100 = 3\text{m}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Από το σχέδιο (παριστάνει μια «κάθετη τομή» της άκρης μιας γραφίδας) να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις $[d_1]$, $[d_2]$, $[b]$, $[c]$ του πραγματικού αντικειμένου.

Λύση: Μετράμε με ακρίβεια τις αποστάσεις d_1 , d_2 , b , c του σχεδίου και βρίσκουμε

$$d_1 = 10\text{mm}, \quad d_2 = 11\text{mm}, \quad b = 10\text{mm}, \quad c = 19\text{mm}. \quad \text{Από τη σχέση } \kappa = \frac{a}{[a]} \text{ για}$$

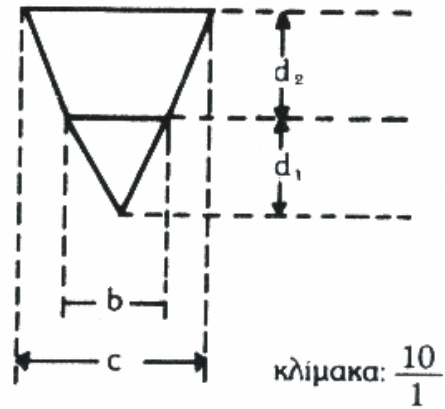
$$\kappa = 10 \text{ έχουμε}$$

$$10 = \frac{10}{[d_1]} \quad \text{ή} \quad [d_1] = 1\text{mm}$$

$$10 = \frac{10}{[b]} \quad \text{ή} \quad [b] = 1\text{mm}$$

$$10 = \frac{11}{[d_2]} \quad \text{ή} \quad [d_2] = 11\text{mm}$$

$$10 = \frac{19}{[c]} \quad \text{ή} \quad [c] = 1,9\text{mm}$$



2. Το σχέδιο παριστάνει μια τοποθεσία. Αν η πραγματική απόσταση των A και B είναι $AB = [d] = 11,4\text{km}$ να βρείτε:

- την κλίμακα με την οποία έγινε το σχέδιο και
- την πραγματική απόσταση των σημείων A και Γ .

Λύση: i) Μετράμε με ακρίβεια την απόσταση AB στο σχέδιο και βρίσκουμε

$$AB = d = 38\text{mm}. \quad \text{Από τη σχέση } \kappa = \frac{d}{[d]} \text{ για } d = 38\text{mm} = 3,8\text{cm}$$

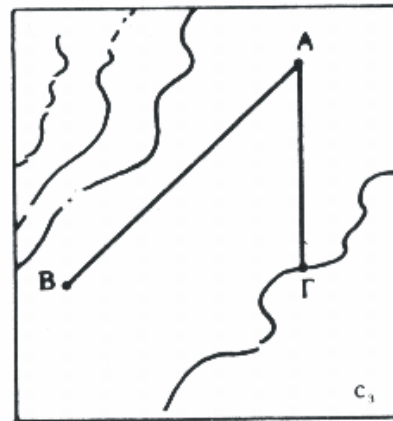
$$\text{και } [d] = 11,4\text{km} = 11,4 \cdot 10^5 \text{cm} = 1.140.000\text{cm} \text{ έχουμε}$$

$$\kappa = \frac{3,8}{1.140.000} = \frac{1}{300.000}$$

ii) Μετράμε στο σχέδιο την απόσταση $A\Gamma$ και βρίσκουμε $A\Gamma = c = 26\text{mm} = 2,6\text{cm}$. Οπότε με

$$\kappa = \frac{1}{300.000} \text{ από τη σχέση } \kappa = \frac{c}{[c]} \text{ έχουμε}$$

$$\kappa = \frac{1}{300.000} = \frac{2,6}{[c]} \quad \text{ή} \quad [c] = 300.000 \cdot 2,6\text{cm} = 780.000\text{cm} = 7,8\text{km}.$$

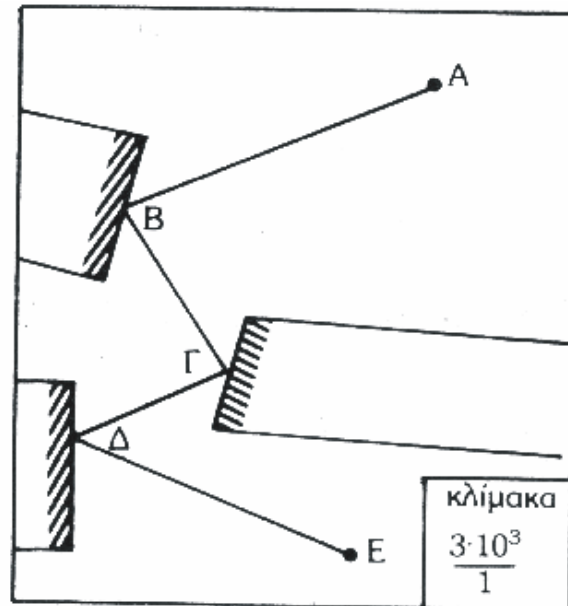


ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

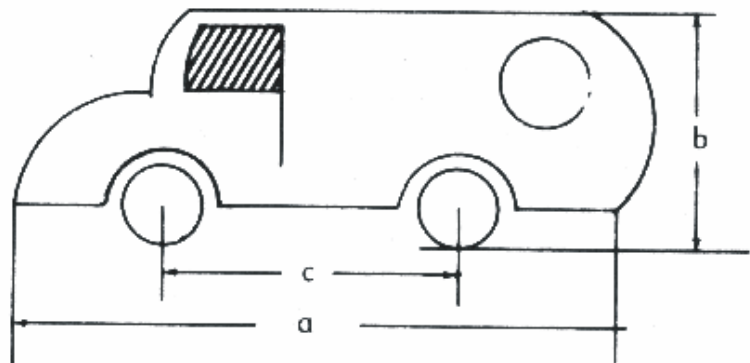
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Ένα ηλεκτρόνιο μετά από διαδοχικές ανακλάσεις, ξεκινώντας από το σημείο Α κατέληξε στο Ε. Η κίνηση φωτογραφήθηκε και έγινε η μεγένθυση όπως παρουσιάζεται στο σχέδιο (β). Να βρεθεί το πραγματικό μήκος της τροχιάς του ηλεκτρονίου.

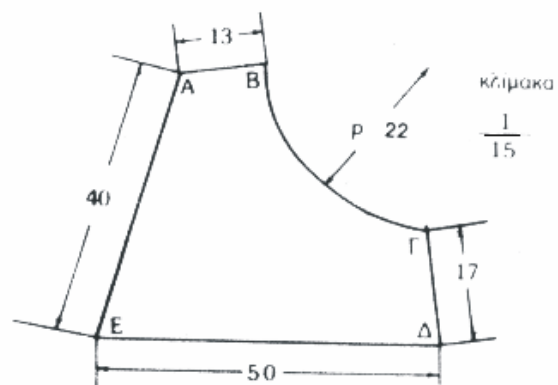


2. Στο διπλανό σχέδιο (ε) το πραγματικό μήκος του αμαξώματος είναι $[a] = 6,3\text{m}$. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις $[b]$ και $[c]$ αφού πρώτα βρεθεί η κλίμακα του σχεδίου.



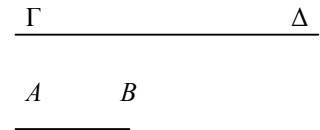
3. Το διπλανό σχέδιο παριστάνει ένα ενδυματολογικό σχέδιο (πατρόν). Να βρεθούν οι πραγματικές του διαστάσεις.

Οι διαστάσεις στο σχέδιο είναι σε mm.



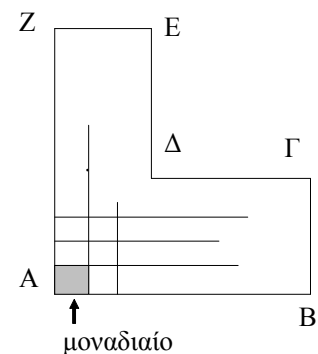
ΕΜΒΑΔΟ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Γνωρίζουμε, ότι για να μετρήσουμε το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ το συγκρίνουμε με ένα σταθερό ευθύγραμμο τμήμα AB , που το δεχόμαστε ως μονάδα μέτρησης. Ο θετικός αριθμός που προκύπτει από αυτήν τη μέτρηση λέγεται μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.



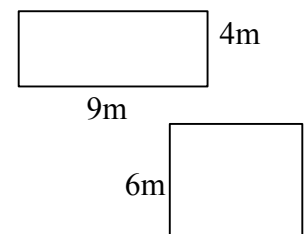
Το ίδιο κάνουμε για να μετρήσουμε μια επιφάνεια. Αυτή τη φορά βέβαια χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με τη μονάδα.

Ο θετικός αριθμός που φανερώνει πόσες φορές το μοναδιαίο τετράγωνο χωράει μέσα στην επιφάνεια που μετράμε λέγεται **εμβαδό** της επιφάνειας ή μέτρο της επιφάνειας.



Είναι φανερό ότι οι επιφάνειες δύο ίσων σχημάτων έχουν το ίδιο εμβαδό. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, υπάρχουν και επιφάνειες διαφορετικών σχημάτων που όμως έχουν το ίδιο εμβαδό.

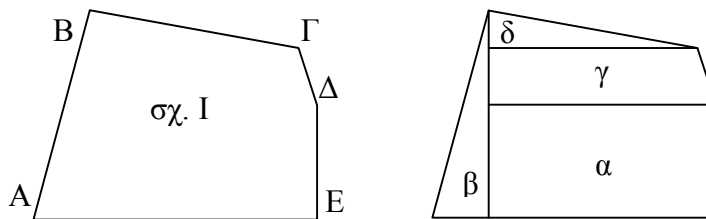
Για παράδειγμα, το διπλανό ορθογώνιο έχει το ίδιο εμβαδό με το τετράγωνο, αν και είναι διαφορετικά σχήματα.



Τις επιφάνειες των σχημάτων που έχουν το ίδιο εμβαδό τις ονομάζουμε **ισοεμβαδικές** ή **ισοδύναμες**.

Ένας τρόπος για να μετρήσουμε την επιφάνεια ενός σχήματος (εμβαδομέτρηση) είναι να το χωρίσουμε σε γνωστά σχήματα (ορθογώνια, τραπέζια, τρίγωνα, κλπ). Έπειτα, γνωρίζοντας τους τύπους για τα εμβαδά αυτών των γνωστών σχημάτων, μπορούμε να υπολογίσουμε συνολικά το εμβαδό της επιφάνειας που μας ενδιαφέρει.

Για παράδειγμα, το σχήμα I μπορεί να χωριστεί σε γνωστά σχήματα, δηλαδή στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (α), στα ορθογώνια τρίγωνα (β) και (δ) και στο ορθογώνιο τραπέζιο (γ).



Το σχήμα που αποτελείται από ένα πολύγωνο και τα εσωτερικά του σημεία, ονομάζεται **πολυγωνικό χωρίο**.

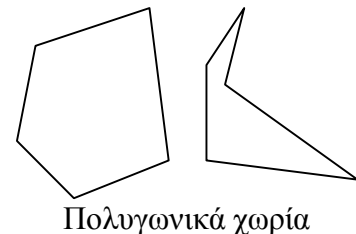
Τα εμβαδά των πολυγωνικών χωρίων έχουν τις εξής ιδιότητες:

α) Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.

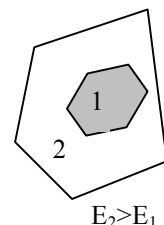
β) Αν μια πολυγωνική επιφάνεια χωρίζεται σε πολυγωνικά χωρία που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, το εμβαδό της ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των πολυγωνικών χωρίων. Έτσι στο σχήμα I παραπάνω έχουμε

$$E_{ABΓΔΕ} = E_{\alpha} + E_{\beta} + E_{\gamma} + E_{\delta}.$$

γ) Αν μια πολυγωνική επιφάνεια περιέχεται σε μια άλλη πολυγωνική επιφάνεια, το εμβαδό της είναι μικρότερο από αυτής που την περιέχει.



Πολυγωνικά χωρία



$$E_2 > E_1$$

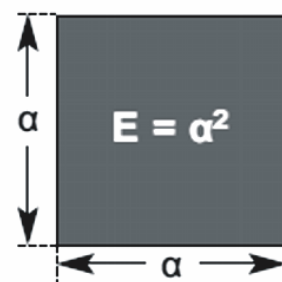
Εμβαδά βασικών σχημάτων

1. Εμβαδό τετραγώνου

Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι όσο το τετράγωνο της πλευράς του.

Δηλαδή, αν η πλευρά έχει μήκος α μέτρα, τότε το τετράγωνο έχει εμβαδό:

$$E = \alpha^2 \text{ m}^2$$

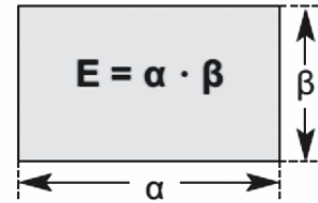


2. Εμβαδό ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου λέγεται συνήθως **μήκος**, η μικρότερη **πλάτος** και οι δύο μαζί διαστάσεις του ορθογώνιου.

Το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι ίσο με το μήκος επί το πλάτος του.

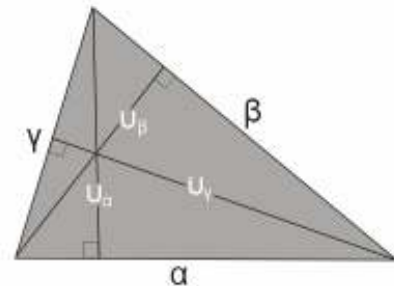
Δηλαδή, αν οι διαστάσεις του έχουν μήκος α μέτρα και β μέτρα, τότε το ορθογώνιο έχει εμβαδό:



$$E = \alpha \cdot \beta \quad \text{m}^2$$

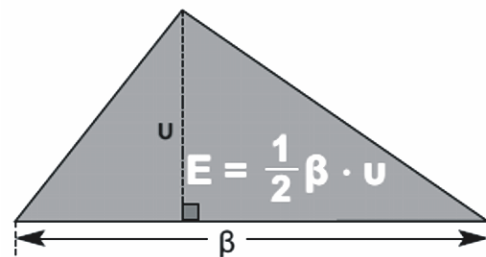
3. Εμβαδό Τριγώνου

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται η απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά, δηλαδή το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από την κορυφή προς την απέναντι πλευρά. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τρίγωνο με τα τρία ύψη, που το καθένα αντιστοιχεί σε κάθε μία πλευρά.



Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο της μιας πλευράς επί το ύψος που αντιστοιχεί σ' αυτήν.

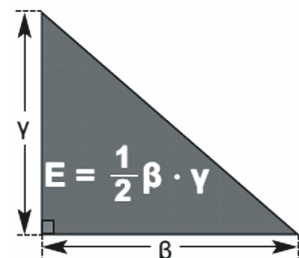
Δηλαδή, αν μία πλευρά του τριγώνου έχει μήκος β μέτρα και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος έχει μήκος u μέτρα, το εμβαδό του τριγώνου είναι:



$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot u \quad \text{m}^2$$

Στην ειδική περίπτωση που το τρίγωνο είναι ορθογώνιο η κάθετη πλευρά του είναι το ύψος προς την άλλη πλευρά, οπότε το εμβαδόν του προκύπτει ως το ημιγινόμενο των δύο κάθετων πλευρών:

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \quad \text{m}^2$$



Στην πράξη είναι ίσως δύσκολο να φέρουμε σωστά το ύψος, σε ένα τρίγωνο. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε έναν άλλο τύπο για το εμβαδό του τριγώνου, που χρειάζεται μόνο τις πλευρές του. Επιγράφεται **τύπος Ήρωνα** και είναι ο ακόλουθος:

$$E_{AB\Gamma} = \sqrt{\tau(\tau - a)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

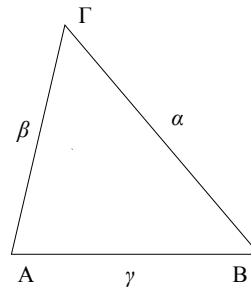
όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, δηλαδή: $\tau = \frac{1}{2}(a + \beta + \gamma)$.

Παράδειγμα: Στο διπλανό τρίγωνο έχουμε $a = 7\text{m}$, $\beta = 5\text{m}$ και $\gamma = 6\text{m}$. Πόσο είναι το εμβαδό του;

Λύση:

Έχουμε $\tau = \frac{1}{2}(a + \beta + \gamma) = \frac{1}{2}(7 + 5 + 6) = 9$.

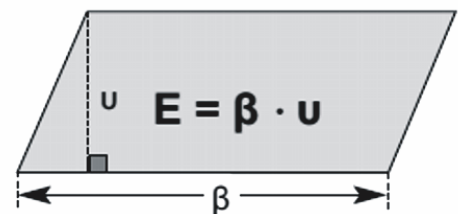
Άρα, $E = \sqrt{9(9 - 7)(9 - 5)(9 - 6)} = \sqrt{216} \approx 14,7\text{m}^2$.



4. Εμβαδό (πλάγιου) παραλληλογράμμου

Το εμβαδό κάθε πλάγιου παραλληλόγραμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιάς πλευράς του επί το αντίστοιχο προς αυτήν ύψος.

Δηλαδή, αν το μήκος μιας πλευράς του παραλληλογράμμου είναι β μέτρα και το αντίστοιχο προς αυτήν ύψος είναι u μέτρα, το εμβαδόν του είναι:

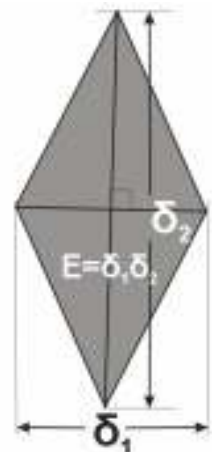


$$E = \beta \cdot u \quad \text{m}^2$$

4α. Εμβαδό ρόμβου

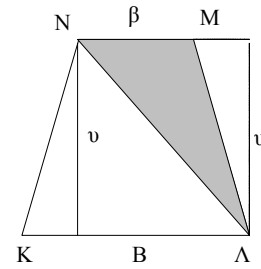
Στην ειδική περίπτωση που το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος με μήκη διαγωνίων δ_1 και δ_2 μέτρα το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο:

$$E = \delta_1 \cdot \delta_2 \quad \text{m}^2$$



5. Εμβαδό τραπεζίου

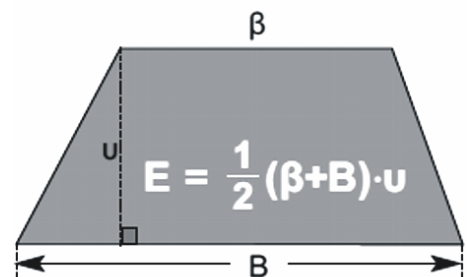
Όπως γνωρίζουμε, τραπέζιο είναι το τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες. Στο διπλανό τραπέζιο οι παράλληλες πλευρές είναι οι ΚΛ, ΝΜ. Η πλευρά ΚΛ λέγεται και **μεγάλη βάση**, ενώ η πλευρά ΜΝ λέγεται **μικρή βάση**. Η απόσταση μεταξύ των βάσεων είναι το **ύψος** του τραπεζίου.



Το εμβαδό τραπεζίου ισούνται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων επί το ύψος.

Δηλαδή, αν το μήκος της μικρής βάσης είναι **β** μέτρα, της μεγάλης βάσης **Β** μέτρα και το ύψος είναι **υ** μέτρα, το εμβαδόν του είναι:

$$E = \frac{B + \beta}{2} \cdot u \quad \text{m}^2$$

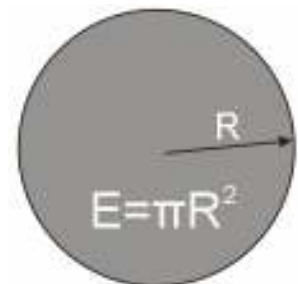


6. Εμβαδό κύκλου

Το εμβαδό του κύκλου δίνεται από τον τύπο:

$$E = \pi \cdot R^2 \quad \text{m}^2$$

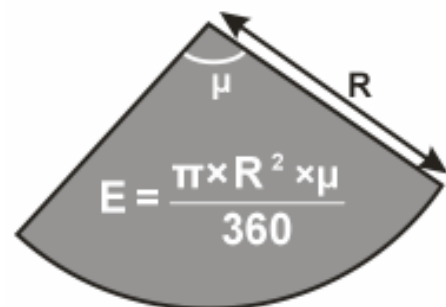
όπου **π** το γνωστό πηλίκος προς διάμετρο ($\approx 3,14\dots$) και **R** η ακτίνα του.



6. Εμβαδό κυκλικού τομέα

Το εμβαδό του κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu}{360} \quad \text{m}^2$$



όπου **π** το γνωστό πηλίκος προς διάμετρο ($\approx 3,14\dots$), **R** η ακτίνα του και **μ** η επίκεντρη γωνία σε μοίρες.

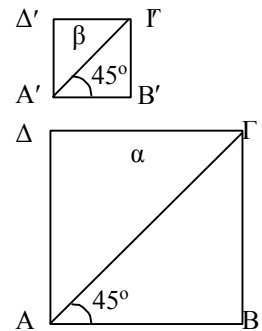
Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων

- Ας πάρουμε δύο τετράγωνα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ με πλευρές α και β αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας των τετραγώνων είναι:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\alpha}{\beta} = \lambda.$$

Τα εμβαδά τους είναι $E_1 = \alpha^2$ και $E_2 = \beta^2$ αντίστοιχα. Ο λόγος των εμβαδών τους είναι

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \lambda^2.$$



Δηλαδή ο λόγος των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητάς τους.

- Ας πάρουμε δύο όμοια ορθογώνια $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ με πλευρές α, β και α', β' αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας των ορθογωνίων είναι: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \lambda$.

Τα εμβαδά τους είναι $E_1 = \alpha \cdot \beta$ και $E_2 = \alpha' \cdot \beta'$.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha' \cdot \beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta}{\beta'} = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$.

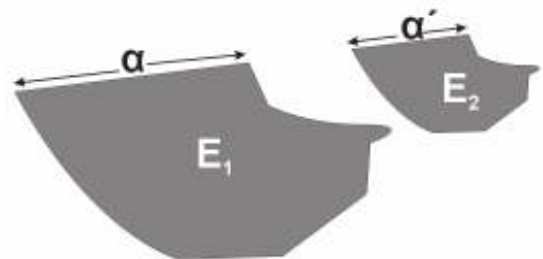
Δηλαδή, ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

Η ιδιότητα αυτή που αποδείξαμε για τα τετράγωνα και τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ισχύει **γενικά για όλα τα όμοια σχήματα.**

Δηλαδή:

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητάς τους

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = \lambda^2}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

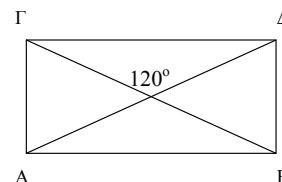
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου με περίμετρο 8m.
2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 5m και μία κάθετη πλευρά 4m. Πόσο είναι το εμβαδόν του;
3. Οι πλευρές ενός τετραγώνου μειώνονται κατά 20%. Είναι δυνατόν να μειωθεί το εμβαδόν του κατά 30%, 36% ή 40%; Είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε το μήκος της πλευράς. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
4. Αν σε ένα τρίγωνο μας δώσουν την περίμετρο και δύο πλευρές του μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του;
5. Σε ένα τρίγωνο έχουμε $\alpha=3m$, $\beta=2m$ και $\Gamma=30^\circ$. Πόσο είναι το εμβαδόν του;
6. Αν διπλασιάσω τις πλευρές ενός τετραγώνου πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;
7. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια. Αν έχουν ίσες τις υποτείνουσές τους είναι και μεταξύ τους ίσα;
8. Να βρείτε ένα τρόπο για να χωρίσουμε ένα τρίγωνο σε τρία ίσεμβαδικά μέρη; Πως θα το χωρίσουμε σε τέσσερα ίσεμβαδικά μέρη;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά 3.5in. Δώστε το αποτέλεσμα σε cm^2 .
2. Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι $25m^2$. Πόσο θα γίνει το εμβαδό του, αν ελαττώσουμε το μήκος της πλευράς κατά 2m;

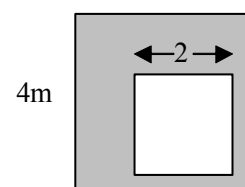
3. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό 100m^2 . Το μήκος του είναι 20m . Πόσα μέτρα είναι το πλάτος του;
4. Πόσο είναι το εμβαδό πλάγιου παραλληλόγραμμου με μήκος $3,5\text{m}$ και ύψος 3dm ;
5. Να υπολογίσετε το ύψος πλάγιου παραλληλογράμμου με εμβαδόν 10m^2 και ύψος 16dm .
6. Το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 100m^2 . Αυξάνουμε μία από τις πλευρές του κατά 10% . Πόσο είναι το νέο εμβαδό;
7. Ένας συνεταιρισμός αγόρασε μια έκταση $354,66$ στρεμ. προς 650€ το στρέμμα. Η έκταση χωρίστηκε σε οικόπεδα, με δρόμους και κοινόχρηστους χώρους συνολικής επιφάνειας $63,2$ στρ., που η κατασκευή τους κόστισε 22500€ . Πόσο πρέπει να πωληθεί το m^2 κάθε οικόπεδου ώστε ο συνεταιρισμός να έχει όφελος 300000€ ;
8. Οι πλευρές ενός τετραγώνου αυξάνονται κατά 3m και το εμβαδό του διπλασιάζεται. Πόσο ήταν το μήκος της πλευράς αρχικά.
9. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 20m . Το εμβαδό του είναι 24m^2 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του;
10. Αν αυξηθεί το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου κατά 3m , τότε το εμβαδό του αυξάνεται κατά 9m^2 . Αν αυξηθεί το πλάτος του κατά 3m , τότε το εμβαδό αυξάνεται κατά 12m^2 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του;
11. Αυξάνουμε το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου κατά 1m . Τότε το εμβαδό του αυξάνεται κατά 21m^2 . Πόση είναι η περίμετρός του;
12. Οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σχηματίζουν γωνία 120° και το μήκος κάθε μιας είναι 12cm . Να υπολογίσετε το εμβαδό του.



13. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 13m και περίμετρο 30m . Πόσο είναι το εμβαδό του;

14. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει τη μια κάθετη πλευρά 4m και περίμετρο 12m . Πόσο είναι το εμβαδό του;

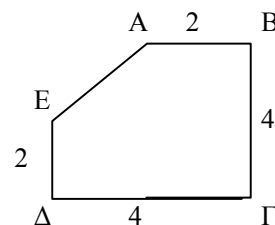
15. Βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος στο διπλανό σχήμα.



16. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 10m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

17. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 7m, 4.5m και 5.2m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

18. Πόσο είναι το εμβαδό του διπλανού σχήματος ΑΒΓΔΕ; Οι αριθμοί παριστάνουν τα μήκη των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων σε μέτρα.



19. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο 30m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

20. Να αποδείξετε ότι κάθε διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

21. Σε ένα **ισοσκελές τραπέζιο** οι δύο μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες και έχουν μήκος 5m. Όταν οι βάσεις του είναι 15m και 9m, πόσο είναι το εμβαδόν του;

22. Το εμβαδό ενός τραpezίου είναι 100m^2 . Το ύψος του είναι 10m και η μία βάση του 20m. Πόση είναι η άλλη βάση του;

23. Έστω ένα ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ, με $\angle A = 90^\circ$. Αν $AB = 4\text{m}$, $GD = 2\text{m}$ και η διαγώνιος $BD = 5\text{m}$, πόσο είναι το εμβαδό του;

24. Η διαγώνιος σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι 20m και το εμβαδό του 200m^2 . Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

25. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά είναι 10m και το ύψος προς την υποτείνουσα είναι 8m. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

26. Η μεγάλη βάση ενός τραpezίου είναι διπλάσια από την μικρή βάση. Το ύψος είναι το μισό της μικρής βάσης. Αν το εμβαδόν του τραpezίου είναι 12m^2 , να υπολογίσετε τις βάσεις και το ύψος του.

27. Σε ένα ρόμβο η γωνία $A = 60^\circ$ και η πλευρά $AB = 3\text{dm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

28. Σε ένα τρίγωνο έχουμε γωνίες $A = 30^\circ$ και $B = 45^\circ$. Η πλευρά γ που βρίσκεται απέναντι από την γωνία Γ, είναι 10m. Να υπολογίσετε τα μήκη α, β.

29. Ένα τρίγωνο έχει εμβαδό 5m^2 . Αν οι πλευρές $a = 5\text{m}$ και $b = 4\text{m}$, πόση είναι η γωνία Γ;

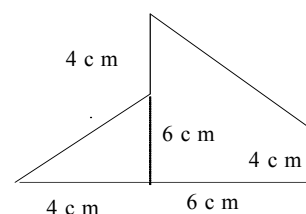
30. Ένας τοπογράφος μετρά ένα τετράπλευρο οικόπεδο $AB\Gamma\Delta$ και βρίσκει $AB=63\text{m}$, $B\Gamma=61\text{m}$, $\Gamma A=84\text{m}$, $A\Delta=60\text{m}$, $\Delta\Gamma=62\text{m}$. Πόσο είναι το εμβαδό του;

31. Αυξάνουμε τη πλευρά ενός τετραγώνου κατά 10%. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

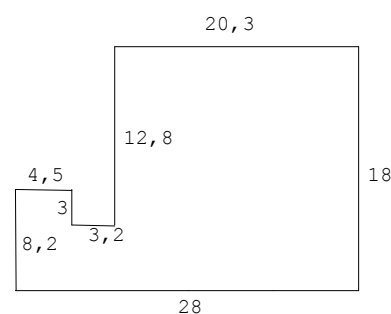
32. Μειώνουμε την πλευρά ενός τετραγώνου κατά 25%. Πόσο μειώνεται το εμβαδό του;

33. Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου διπλασιάζεται. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

34. Το διπλανό σχήμα παριστάνει την κάτοψη ενός οικοπέδου σε κλίμακα 10000:1. Υπολογίστε το εμβαδό του.



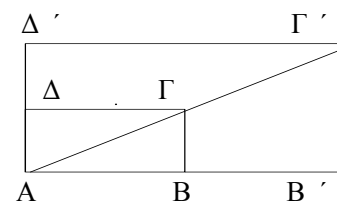
35. Το διπλανό σχήμα παριστάνει την κάτοψη ενός οικοπέδου σε κλίμακα 3000:1. Αν οι αριθμοί υποδηλώνουν mm πόσο είναι το εμβαδό του;



36. Η διχοτόμος ενός ισόπλευρου τριγώνου διπλασιάζεται. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

37. Η διάμεσος ενός ισοπλεύρου τριγώνου διπλασιάζεται. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

38. Προεκτείνουμε την διαγώνιο $A\Gamma$ του διπλανού ορθογώνιου παραλληλόγραμμου στο διπλάσιο, έτσι ώστε $A\Gamma=\Gamma\Gamma'$. Πόσο αυξάνεται τότε το εμβαδό του;



39. Ένας πατέρας έχει ένα τριγωνικό οικόπεδο και θέλει να το μοιράσει στους δύο γιους του. Πως θα επιτύχει δίκαιο μοίρασμα.

ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ

Πρακτικά, για να κατανοήσουμε την έννοια του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις π.χ. $a = 4\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$, και $\gamma = 7\text{cm}$

φανταζόμαστε ότι «γεμίζουμε» το χώρο, που καταλαμβάνει από το στερεό αυτό, με κύβους, που η ακμή τους είναι 1cm (μοναδιαίους κύβους). Παρατηρούμε τότε, ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο «γεμίζει» με 7 στρώματα κύβων που το καθένα έχει 12 κύβους. Συνεπώς το στερεό μας γεμίζει με $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ κύβους ή όπως λέγεται διαφορετικά με 84 κυβικά εκατοστά (Συμβολικά 84cm^3).

Ο αριθμός 84 ονομάζεται όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του με μονάδα μέτρησης το 1cm^3 . Γενικά αποδεικνύεται ότι:

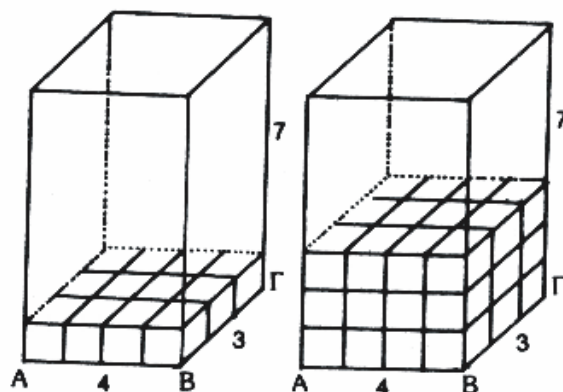
Ο όγκος V ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις a, b, γ δίνεται από το τύπο $V = a \cdot b \cdot \gamma$.

Για το κύβο ακμής a ο τύπος αυτός γίνεται $V = a^3$.

Μονάδες όγκου, που παράγονται από το 1m^3 είναι:

Μονάδα	Σχέση
Κυβικό χιλιόμετρο	$1\text{km}^3 = 10^9\text{m}^3$
Κυβική παλάμη	$1\text{dm}^3 = 10^{-3}\text{m}^3$
Κυβικό εκατοστό	$1\text{cm}^3 = 10^{-6}\text{m}^3 = 10^{-3}\text{dm}^3$
Κυβικό χιλιοστό	$1\text{mm}^3 = 10^{-6}\text{m}^3 = 10^{-6}\text{dm}^3$

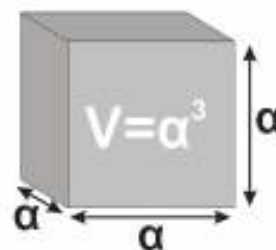
$$1\text{m}^3 = 10^3\text{dm}^3 = 100^3\text{cm}^3 = 1.000^3\text{mm}^3$$



Όγκοι βασικών σχημάτων

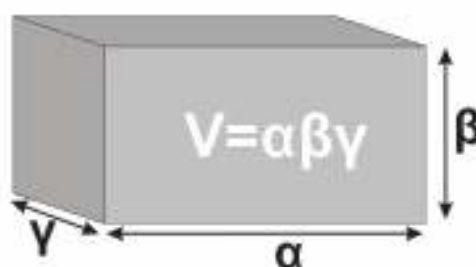
1. Όγκος κύβου

$$V = \alpha^3 \text{ m}^3$$



2. Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \text{ m}^3$$

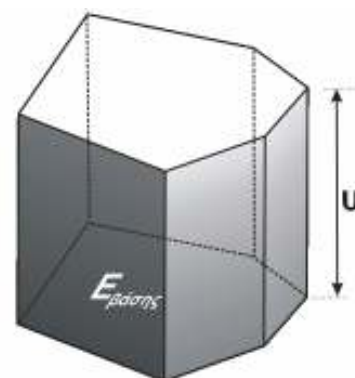


3. Όγκος πρίσματος

$$V = \text{Εμβαδό βάσης} \cdot \text{ύψος}$$

ή πιο σύντομα:

$$V = E_{\beta} \cdot \upsilon \text{ m}^3$$

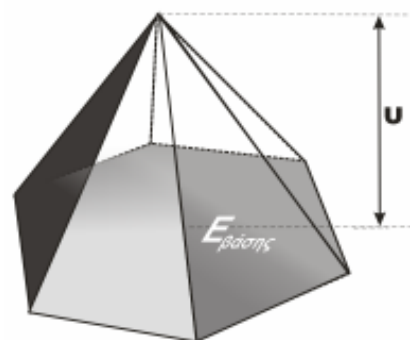


4. Όγκος πυραμίδας

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Εμβαδό βάσης} \cdot \text{ύψος}$$

ή πιο σύντομα:

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_{\beta} \cdot \upsilon \text{ m}^3$$

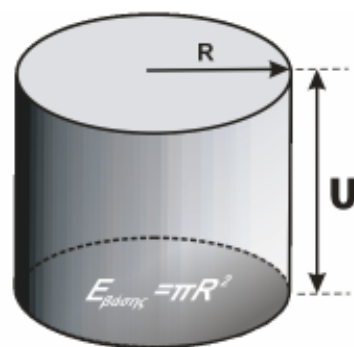


5. Όγκος κυλίνδρου

$$V = \text{Εμβαδό βάσης} \cdot \text{ύψος}$$

ή, αφού η βάση είναι κύκλος:

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot u \quad \text{m}^3$$



6. Όγκος κώνου

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Εμβαδό βάσης} \cdot \text{ύψος}$$

ή, αφού η βάση είναι κύκλος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot u \quad \text{m}^3$$



7. Όγκος σφαίρας

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \quad \text{m}^3$$

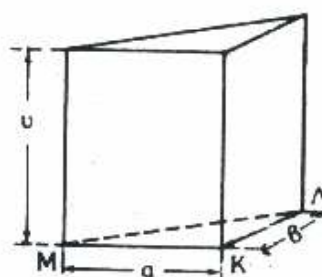


ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί ο όγκος κύβου με ακμή $a = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

2. Αν στο διπλανό σχήμα είναι
 $a = 0,3\text{m}$, $b = 4\text{m}$,
 $u = 0,42\text{m}$ και
 $MK \perp KL$, να βρεθεί ο όγκος του
 πρίσματος.



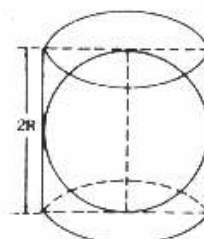
3. Να βρεθεί το ύψος πυραμίδας που
 έχει όγκο 20m^3 και οι πλευρές της
 τριγωνικής βάσης της είναι 12m ,
 13m , 11m . (Χρησιμοποιήστε το
 τύπο του Ήρωνα).

4. Το ύψος κυλίνδρου είναι 4m και η βάση του έχει ακτίνα $2,5\text{m}$. Να βρεθεί ο όγκος του.

5. Ένας κύβος έχει ακμή $a = 3\text{m}$. Να βρεθεί το ύψος κώνου που έχει όγκο ίσο με τον όγκο του κύβου και ακτίνα $R = 2\text{m}$.

6. Ο όγκος σφαίρας είναι 113.040m^3 . Να υπολογιστεί η ακτίνα της.

7. Στο διπλανό σχήμα να βρεθεί ο όγκος του μέρους του κυλίνδρου που βρίσκεται εκτός της σφαίρας, αν η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι 4cm .



8. Αν O το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κύβου και $ΑΒΓΔ$ μια έδρα του, να βρεθεί ο όγκος της πυραμίδας $OΑΒΓΔ$ αν η ακμή του κύβου είναι 4cm .

9. Είναι γνωστό ότι αν ϵ το ειδικό βάρος ενός σώματος, B το βάρος του και V ο όγκος του, τότε $\epsilon = \frac{B}{V}$.

Με βάση την ισότητα αυτή να βρείτε το βάρος κάθε μιας από τις σιδερένιες ράβδους που εικονίζονται στα παρακάτω σχήματα. Οι διαστάσεις είναι σε mm και το ειδικό βάρος του σιδήρου $7,8$.

