ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2018-19
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ Β.Ρ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ……………………………………………

ΘΕΜΑ 1ο (Μονάδες 20)

Α. Να δώσετε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης.

Β. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Bolzano

Γ. Να εξετάσετε αν η πρόταση: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ και η f δεν παίρνει ετερόσημες τιμές τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $-\infty$, είναι σωστή ή λάθος και να αιτιολογήσετε.

Δ. Να εξετάσετε αν η πρόταση: $\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, είναι σωστή ή λάθος και να αιτιολογήσετε.

ΘΕΜΑ 2ο (Μονάδες 8,10,8)

Α. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x^2+\eta\mu x+1}{1-\eta\mu\chi}$, $\lim_{x\to0}\frac{\ln x+x^2-1}{x}$, $\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x-1}+x^2+x+3+\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$, $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^3-1}}$.

Β. Αν $f:\Re\to\Re$ και η f είναι γνησίως μονότονη και $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+f(1)x-f(2))=1$ βρείτε την μονοτονία της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x^2)+f(x^3)=-3$ για χ>0.

Γ. Έστω $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ με $f:(-\infty,0)\to\Re$ ι) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} ιι) Να εξετάσετε αν υπάρχουν κοινά σημεία της Cf με την ψ=χ και της Cf^{-1} με την ψ=χ. ιιι) να ορίσετε την f^{-1} και να εξετάσετε αν $f^{-1}{}_0 f=f_0 f^{-1}$. ιν) Δείξτε ότι η Cf και η Cf^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 3ο (Μονάδες 12,10)

Α. Αν $f:\Re\to\Re$ συνεχής με $f^2(x)+2\eta\mu x^2 f(x)=x^2$ για κάθε χ πραγματικό και $f(1).f(-1)<0$ να βρείτε τους τύπους τη συνάρτησης f .

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0,0), Β(α,β) Γ(1,0) με (ΑΒ)<1 και (ΒΓ)>1. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της πλευράς ΑΓ ώστε $(\text{MB})^{2018}=(\text{MA})^{2018}+(\text{MΓ})^{2018}$.

ΘΕΜΑ 4ο (Μονάδες 8,8,8,8)

Αν $f:\Re\to\Re$ με $f(x)=1-\frac{1}{1+e^x}$, $x\in\Re$ ι) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης ιι) Να εξετάσετε αν είναι καλά ορισμένα τα παρακάτω όρια και αν είναι καλά ορισμένα να τα βρείτε α) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, β) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}$ ιιι)Αφού ορίσετε την f^{-1} δείξτε ότι οι Cf, Cf^{-1} έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο ιν) Δείξτε ότι η f(χ)=χ έχει τουλάχιστον μια ρίζα που είναι και κοινή ρίζα με την εξίσωση $f^{-1}(\chi)=\chi$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Ψευδής. Η f(x)=0 με $\chi \in \Re$ το $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$ δεν είναι καλά ορισμένο.

Δ. Αληθής αφού $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ και $\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = 0 = \lim_{x\to+\infty} -|f(x)|$ από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο (Μονάδες 8,10,8)

Α.

ι) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x^2+\eta\mu x+1}{1-\eta\mu\chi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[(2x^2+\eta\mu x+1)\frac{1}{1-\eta\mu\chi}] = +\infty$,αφού $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x^2+\eta\mu x+1) = \frac{\pi^2}{2}+2>0$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\eta\mu\chi) = 0$ και κοντά στο $\frac{\pi}{2}$ το 1-ημχ>0.

ιι) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x + x^2 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}[(\ln x + x^2 - 1)\frac{1}{x}] = -\infty$, αφού χ>0, $\lim_{x\to 0^+}(\ln x + x^2 - 1) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}) = +\infty$

ιιι) $\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x-1}+x^2+x+3+\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}[(x\sqrt{x-1}+x^2+x+3+\sqrt[3]{x-1})\frac{1}{x-1}] = +\infty$, αφού χ>1, $\lim_{x\to 1^+}(x\sqrt{x-1}+x^2+x+3+\sqrt[3]{x-1}) = 5>0$ και $\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{x-1}) = +\infty$

ιν) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^3-1}} \overset{x>1}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}+\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}} \overset{x>1}{=}$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} =$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1).\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} = 0$

Β. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+f(1)x-f(2)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+f(1)-\frac{f(2)}{x})] = 1$ (1)

Αν f(1)≠ -1 η (1) γίνεται $\pm\infty = 1$ άτοπο άρα f(1)= -1 οπότε

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x-f(2)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} - f(2)] = 1 \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to+\infty}[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} - f(2)] = 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to+\infty}[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} - f(2)] = 1 \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to+\infty}[\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} - f(2)] = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - f(2) = 1 \Leftrightarrow f(2) = -\frac{1}{2}$

Συνεπώς έχουμε 1<2 και f(1)=-1<f(2)=$-\frac{1}{2}$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η εξίσωση: $f(x)+f(x^2)+f(x^3)=-3$ έχει προφανή λύση την χ=1

Για χ>1 θα είναι $1<x<x^2<x^3$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα η f θα είναι $f(x)+f(x^2)+f(x^3)>-3$ ενώ αν $1>x>x^2>x^3>0$ θα είναι $f(x)+f(x^2)+f(x^3)<-3$ οπότε η εξίσωση $f(x)+f(x^2)+f(x^3)=-3$ με χ>0 έχει μοναδική λύση την χ=1.

Γ. ι) Για κάθε α, β με α<β<0 $\Rightarrow a^4>\beta^4 \Rightarrow \sqrt[3]{a^4}>\sqrt[3]{\beta^4} \Rightarrow f(a)>f(\beta)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα , οπότε είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται. Η f ως συνεχής ως σύνθεση συνεχών και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ έχει σύνολο τιμών το $(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x))=(0,+\infty)$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $(0,+\infty)$.

ιι) $f(x)=x \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{x^4}=x$ αδύνατη

και επειδή $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$ αδύνατη άρα δεν υπάρχουν κοινά σημεία της Cf με την ψ=χ και της Cf^{-1} με την ψ=χ.

ιιι) Για χ<0 και ψ>0 έχουμε ψ= $f(x) \Leftrightarrow \psi=\sqrt[3]{x^4} \Leftrightarrow x^4=\psi^3 \Leftrightarrow x=-\sqrt[4]{\psi^3}$ άρα $f^{-1}(x)=-\sqrt[4]{x^3}$

Επειδή η $f^{-1}{}_0 f$ ορίζεται για χ$\in Df=(-\infty,0)$ και η $f_0 f^{-1}$ ορίζεται για χ$\in Df^{-1}=(0,+\infty)$ θα είναι $f^{-1}{}_0 f \neq f_0 f^{-1}$

ιv) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι αδύνατη αφού δεν υπάρχουν χ που να ανήκουν στην $Df \cap Df^{-1}$

ΘΕΜΑ 3ο

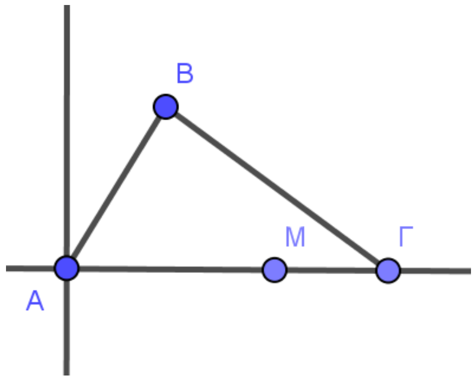
Α. ι) $f^2(x)+2\eta\mu x^2 f(x)=x^2 \Leftrightarrow f^2(x)+2\eta\mu x^2 f(x)+\eta\mu^2 x^2=x^2+\eta\mu^2 x^2 \Leftrightarrow (f(x)+\eta\mu x^2)^2=x^2+\eta\mu^2 x^2$ (1)

Όμως $x^2\geq 0$ και $\eta\mu^2 x^2 \geq 0$ άρα $x^2+\eta\mu^2 x^2\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει αν ισχύουν και οι δύο ισότητες δηλαδή μόνον για χ=0.

(1) $\Leftrightarrow \left|f(x)+\eta\mu x^2\right|=\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2}$ Για $g(x)=f(x)+\eta\mu x^2$ η g θα είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x)=0 \Leftrightarrow |g(x)|=0 \Leftrightarrow x=0$

Η g στο $(-\infty,0)$ είναι συνεχής χωρίς ρίζες και η g στο $(0,+\infty)$ είναι συνεχής χωρίς ρίζες άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$ οπότε g(x)= $\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2} \Leftrightarrow$ f(x)=-$\eta\mu x^2+\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2}>0$ ή g(x)= $-\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2} \Leftrightarrow$ f(x)=-$\eta\mu x^2-\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2}<0$ και στο $(0,+\infty)$ όμοια και επειδή $f(1).f(-1)<0$ θα είναι $f(x)=\begin{cases}-\eta\mu x^2+\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2}, \mathrm{x}\geq 0\\ -\eta\mu x^2-\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2}, \mathrm{x}<0\end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases}-\eta\mu^2 x+\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2}, \mathrm{x}<0\\ -\eta\mu^2 x-\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x^2}, \mathrm{x}\geq 0\end{cases}$.

Β.



Α(0,0), Β(α,β) Γ(1,0) με (ΑΒ)=$\sqrt{a^2+\beta^2}$ <1 και (ΒΓ)= $\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}$ >1.

Ζητάμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\chi \in (0,1)$ ώστε Μ(χ,0) και $(\mathrm{MB})^{2018}=(\mathrm{MA})^{2018}+(\mathrm{M\Gamma})^{2018} \Leftrightarrow$
$(\sqrt{(\alpha-\chi)^2+\beta^2})^{2018}=(\sqrt{\chi^2})^{2018}+(\sqrt{(1-\chi)^2})^{2018} \Leftrightarrow$
$(\sqrt{(\alpha-\chi)^2+\beta^2}^{2018}-\chi^{2018}-(1-\chi)^{2018}=0$

Θέτω ρ(χ)= $(\sqrt{(\alpha-\chi)^2+\beta^2})^{2018}-\chi^{2018}-(1-\chi)^{2018}$

Η ρ είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις και σύνθεση συνεχών και $\rho(1)=(\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2})^{2018}-1>0$ και $\rho(0)=(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^{2018}-1<0$ οπότε από ΘΒ η ρ θα εχει τούλα μια ρίζα στο (0,1) δηλαδή θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της πλευράς ΑΓ ώστε $(\mathrm{MB})^{2018}=(\mathrm{MA})^{2018}+(\mathrm{M\Gamma})^{2018}$.

<u>ΘΕΜΑ 4º</u>

ι) $f:\Re\to\Re$ με $f(x)=1-\dfrac{1}{1+e^x}$ για κάθε $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2\Rightarrow\ldots f(x_1)<f(x_2)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Re$ άρα f(A)= $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$ =(0,1)

ιι) α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+e^x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x(1+e^x)}=0$ =0 β)επειδή το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το (0,1) το όριο δεν είναι καλά ορισμένο αφού η παράσταση δεν ορίζεται κοντά στο $(-\infty)$

ιιι) Για $\chi\in\Re$ και $\psi\in(0,1)$ έχουμε ψ= $f(x)\Leftrightarrow$ ψ=$1-\dfrac{1}{1+e^x}\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{1+e^x}$=1-ψ$\Leftrightarrow 1+e^x=\dfrac{1}{1-\psi}\Leftrightarrow$ $e^x=\dfrac{1}{1-\psi}-1\Leftrightarrow e^x=\dfrac{\psi}{1-\psi}\Leftrightarrow \chi=\ln\dfrac{\psi}{1-\psi}$ Συνεπώς $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}$ με $\chi\in(0,1)$ Για τα κοινά σημεία Cf, Cf^{-1} θα πρέπει οι τετμημένες των σημείων να είναι στο κοινό πεδίο ορισμού δηλαδή πρέπει $\chi\in(0,1)$.
Θέτω $h(x)=f(x)-f^{-1}(x)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\dfrac{1}{2}-(-\infty)=+\infty>0$ άρα κοντά στο 0 υπάρχει α>0 τέτοιο ώστε f(α)>0, και $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=-\infty<0$ άρα κοντά στο 1 υπάρχει β<1 τέτοιο ώστε f(β)<0

Η f είναι συνεχής στο [α,β]$\subseteq$ (0,1) και f(α)f(β)<0 από ΘΒ η h έχει τούλα μία λύση στο (α,β) $\subseteq$(0,1).Άρα οι Cf, Cf^{-1} έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ιν) Επειδή θα είναι κοινή λύση θα πρέπει $\chi\in(0,1)$

Αν β(χ)=f(x)-x η β είναι συνεχής στο [0,1] και h(0).h(1)=$\dfrac{1}{2}.(-\dfrac{1}{1+e})$ <0 και από ΘΒ η h τούλα μία ρίζα στο (0,1).

Ακόμη $f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x$ Άρα η f(χ)=χ έχει τουλάχιστον μια ρίζα που είναι και κοινή ρίζα με την εξίσωση $f^{-1}(\chi)=\chi$.