

ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ-ΘΕΤΙΚΗΣ 2016

Γ' ΤΑΞΗ

B.P.

ΘΕΜΑ 1°

A. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

B. Τι λέγεται σημείο καμπής γραφικής παράστασης συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ. Γράψτε στο τετράδιό σας αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ τότε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Μονάδες 2

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 0$ συμπεραίνουμε ότι το $\chi \rightarrow \pm\infty$

Μονάδες 2

3. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$

Μονάδες 2

4. Αν $f(x)$ είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε η C_f έχει τουλάχιστον μια οριζόντια εφαπτόμενη

Μονάδες 2

5. Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $\int_{\alpha}^{\beta} (f^2(x) + 1) dx = 0$ τότε $\alpha = \beta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι $k=0$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο της $O(0,0)$.

Μονάδες 8

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \rho$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού ρ .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3°

Έστω συνάρτηση $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}$ για κάθε $x>0$ με $f(1)=0$ και συνεχής

συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $g^3(x) + 3g(x) = x$ με σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

i) Δείξτε ότι $f(x) = \ln x$

ii) Δείξτε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και να βρεθεί η g^{-1}

iii) Να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για $x > 0$

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ της C_g , ψ' , $\psi=0$, $\psi=1$

μονάδες 7,7,3,8

ΘΕΜΑ 4°

A. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ώστε $e^{f(x)} + \ln f(x) - x = e^{x+1} + \eta\mu^2 x$ για κάθε x πραγματικό, i) να βρείτε την μονοτονία της f το $f(0)$ και το $f'(0)$ και ii) αν

$\int_0^2 \frac{(e^{x+1} + 1 + 2\eta\mu\chi\sigma\nu\chi)}{f(x) \cdot e^{f(x)} + 1} f(x) dx = 2$ να δείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής

Μονάδες 5,5

B. Αν f συνεχής στο πεδίο ορισμού της $[0,1]$ συνάρτηση με

$\int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 \ln^2(1+e^x) dx \leq 2 \int_0^1 \ln(1+e^x) f(x) dx$ i) δείξτε ότι $f(x) = \ln(1+e^x)$ ii) δείξτε ότι η f είναι

κυρτή και να βρείτε την εφαπτομένη της στο σημείο της $(0, f(0))$ iii) δείξτε ότι αν E το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_f , $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ και $\chi=1$ τότε $E > \ln(2\sqrt[4]{e})$

Μονάδες 5,5,5

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ