ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Β.Ρ.

ΘΕΜΑ 1ο (Μονάδες 5x5)

Να σχεδιάσετε μια τυχαία γραφική παράσταση συνάρτησης f όταν:

i) Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ και $f(1)=-1$

ii) Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$ και $f(1)=1$

iii) Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 1} f(x)=2= f(1)$

iv) Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 2} f(x)=3$, $f(2)=-2$, $f(1)=-1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ και $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$

v) Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 1} f(x)=2=2 f(1)$ και $f(3)=-1$

ΘΕΜΑ 2ο (Μονάδες 5x5)

Να σχεδιάσετε μια τυχαία γραφική παράσταση συνάρτησης f όταν:

i) Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ είναι συνεχής στο [1,2] και ασυνεχής στο 1 και στο 2

ii) Έχει πεδίο ορισμού το [1,2] είναι συνεχής στο (1,2) και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή

iii) Έχει πεδίο ορισμού το [1,2] είναι συνεχής στο [1,2] και έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -1

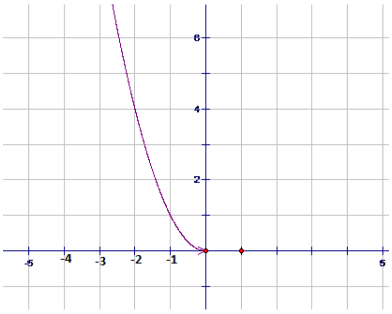
iv) Έχει πεδίο ορισμού το [1,2] είναι συνεχής στο (1,2) παίρνει τις τιμές 1 και 3 όμως δεν παίρνει την τιμή 2

v)) Έχει πεδίο ορισμού το [0,2] είναι συνεχής στο [0,1], συνεχής στο(1,2] και ασυνεχής στο1

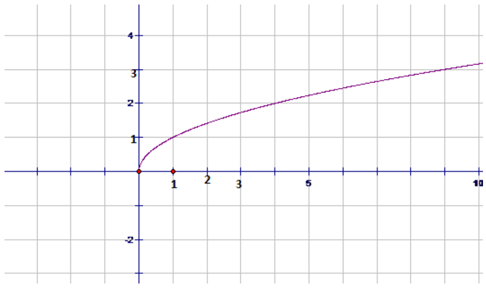
ΘΕΜΑ 3ο (Μονάδες 10,5,10)

Α) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1}

i)



ii)



iii) Τι παρατηρείται στις μονοτονίες και τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

Β) Δώστε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που να είναι ασυνεχής ενώ η γραφική παράσταση της f^{-1} να είναι συνεχής

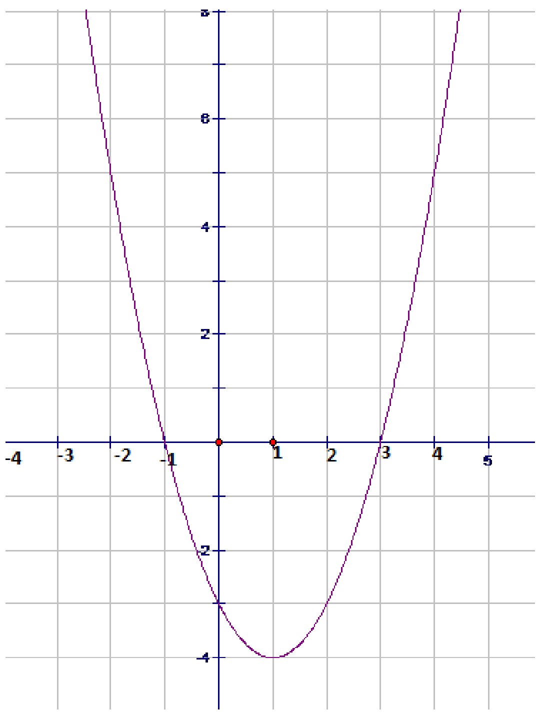
Γ) Δώστε τύπους συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\Re$ και

ι) να είναι συνεχής στο $\Re$-{1,2}

ιι) να είναι συνεχής στο $\Re$-{1} ενώ θα είναι συνεχής στο [1,+∞)

ΘΕΜΑ 4ο (Μονάδες 4,4,5,12)

Δίνεται η γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\Re$ που είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και έχει ρίζες το -1 και το 3.



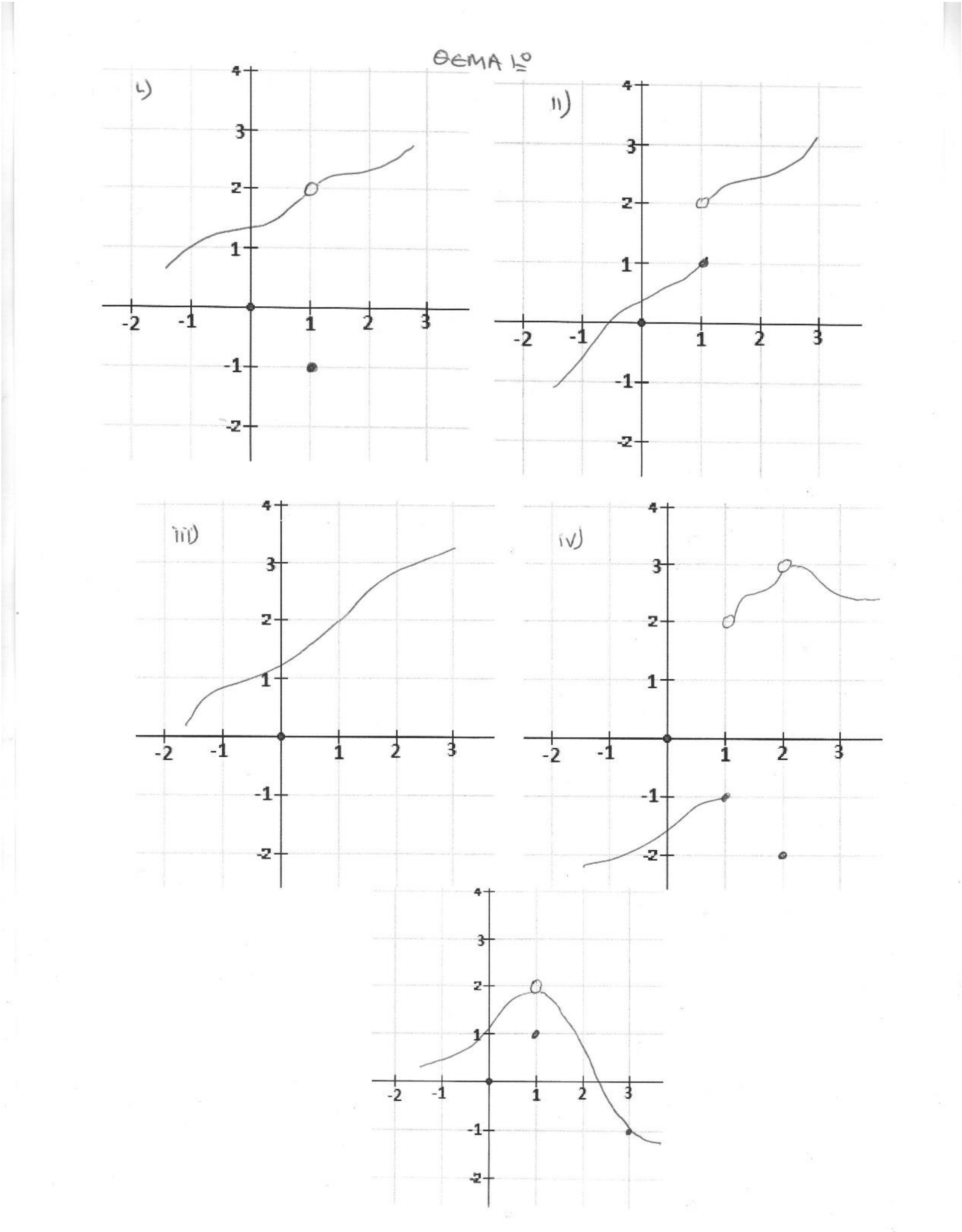
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $|f|$, $\frac{1}{f}$, $\sqrt{f}$,- f

ii) Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων $|f|$, $\frac{1}{f}$, $\sqrt{f}$, - f

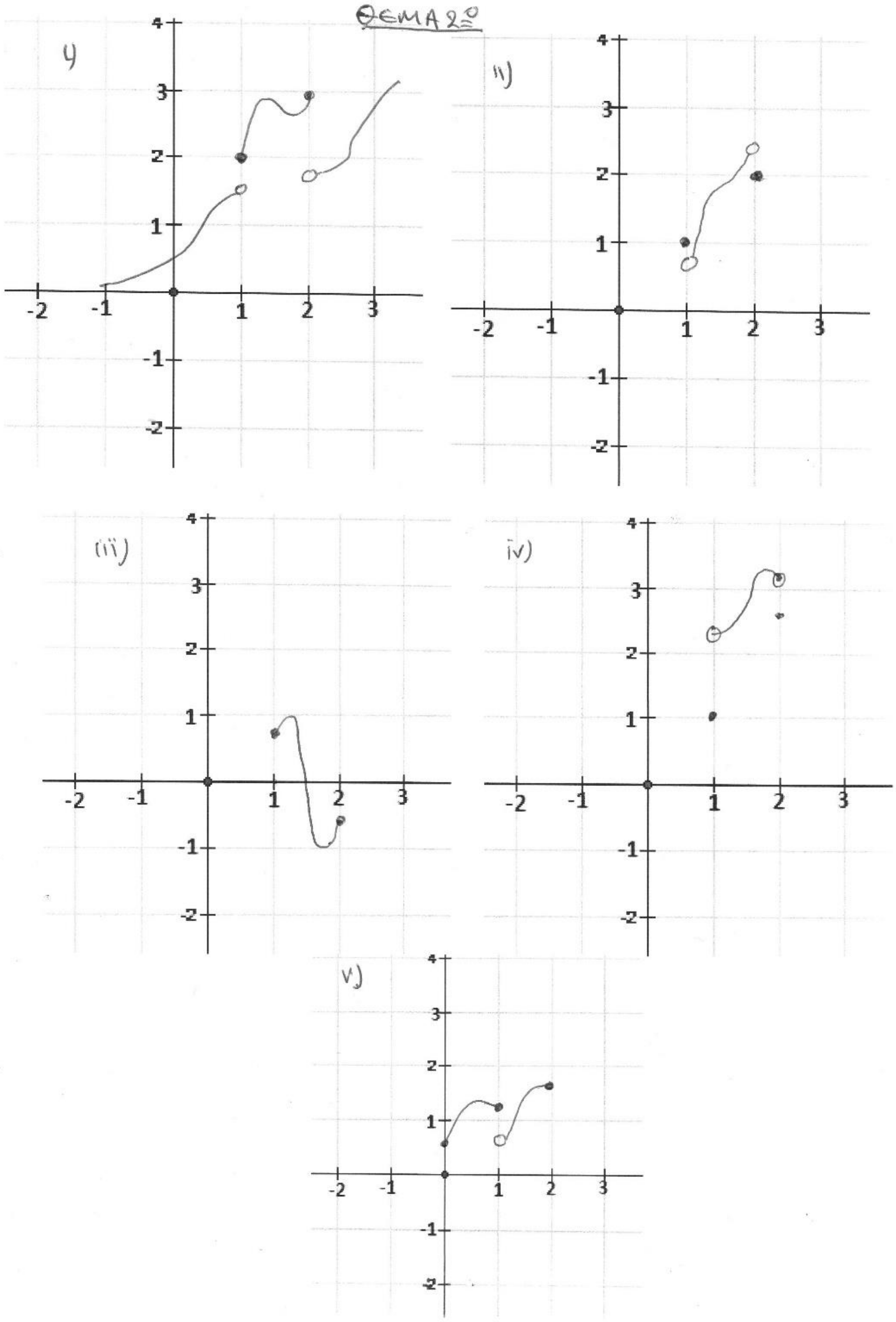
iii) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to -1}|f(x)|$, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}|f(x)|$ $\lim\limits_{x\to +\infty}|f(x)|$

iv) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $|f|$, $\frac{1}{f}$, $\sqrt{f}$,- f

Λύση



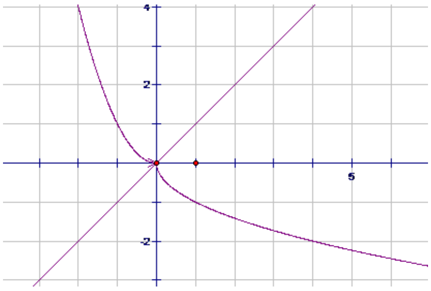
ΘΕΜΑ 2ο



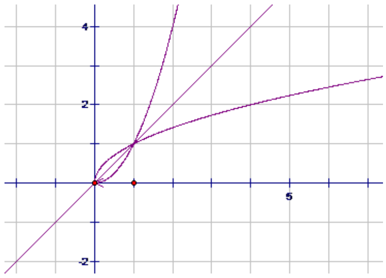
ΘΕΜΑ 3ο

Α.

i)

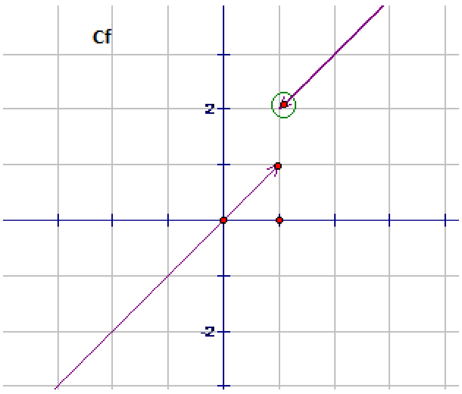


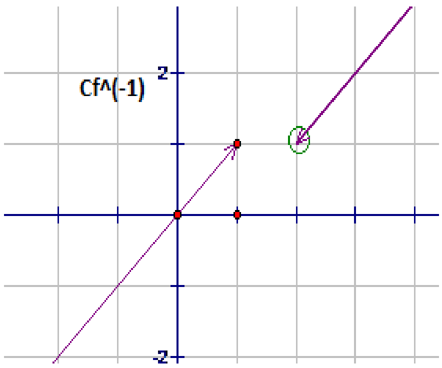
ii)



ii) Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας και στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα τα κοινά σημεία της $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην διχοτόμο 1ου ,3ου τεταρτημορίου

Β.





Γ ι) $f(x)=\begin{cases} x+1, x\leq 1 \\ 2x+3, 1<x<2 \\ -x-4, x\geq 2 \end{cases}$ ιι) $f(x)=\begin{cases} x+1, x<1 \\ 2x+3, x\geq 1 \end{cases}$

ΘΕΜΑ 4ο

ι) $D_{|f|}=\Re$ ιι) $D_{\frac{1}{f}}=\Re-\{-1,3\}$ ιιι) $D_{\sqrt{f}}=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ ιv) $D_{-f}=\Re$

ii)

$|f(x)|$: Στο $(-\infty,-1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και μη αρνητική άρα $|f(x)|=\mathrm{f(x)}$ οπότε η |f| είναι γνησίως φθίνουσα. Στο [-1,1] η f είναι γνησίως φθίνουσα και μη θετική οπότε $|f(x)|=-\mathrm{f(x)}$ οπότε η |f| είναι γνησίως αύξουσα. Στο [1,3] η f είναι γνησίως αύξουσα και μη θετική οπότε $|f(x)|=-\mathrm{f(x)}$ οπότε η |f| είναι γνησίως φθίνουσα.. Στο $[3,+\infty]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και μη αρνητική οπότε $|f(x)|=\mathrm{f(x)}$ οπότε η |f| είναι γνησίως αύξουσα.

$\frac{1}{f}$: Στο $(-\infty,-1)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και θετική οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα ($x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{f(x_1)}<\frac{1}{f(x_2)}$) . Στο (-1,1] η f είναι γνησίως φθίνουσα και αρνητική οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα ($x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{f(x_1)}<\frac{1}{f(x_2)}$). Στο [1,3) η f είναι γνησίως αύξουσα και αρνητική οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι επίσης γνησίως φθίνουσα $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)}$. Στο $(3,+\infty]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και θετική οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

$\sqrt{f(x)}$: Στο $(-\infty,-1]$ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow\sqrt{f(x_1)}>\sqrt{f(x_2)}$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[3,+\infty]$ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow\sqrt{f(x_1)}<\sqrt{f(x_2)}$ είναι γνησίως αύξουσα.

-f : λόγω συμμετρίας ως προς χ΄χ άξονα είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

ιιι)

$\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{f(x)}$=0

$\lim\limits_{x\to -1}|f(x)|$=0

$\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{f(x)}$=0

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{f(x)}$=0

$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

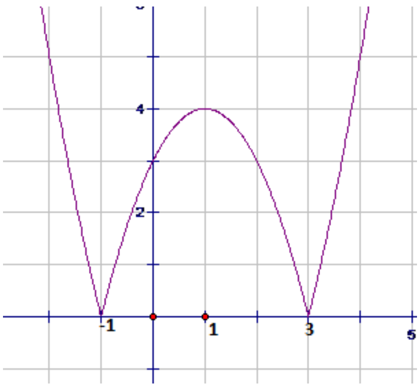
$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}|f(x)|=+\infty$

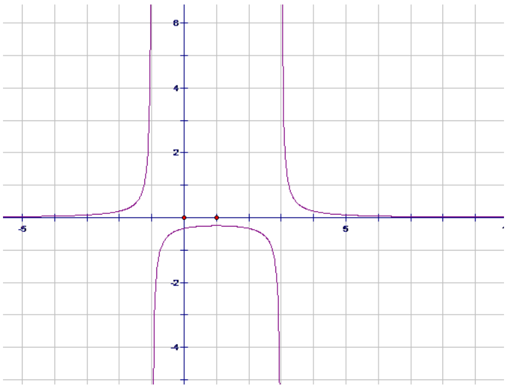
$\lim\limits_{x\to +\infty}|f(x)|=+\infty$

ιv)

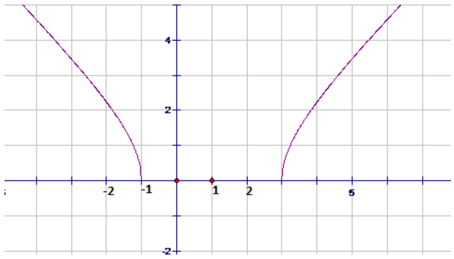
$|f(x)|$



$\frac{1}{f}$



$\sqrt{f(x)}$



-f(x)