ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ (3ωρο)

Β.Ρ.

Θέμα 1ο

Εξετάστε αν είναι Σωστές οι παρακάτω προτάσεις

1. Αν $f:\Re \to \Re$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα τότε $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$
2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή -∞
3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$
4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=2016$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2016$ ή -2016
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-\text{g}(\text{x})]=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\text{g}(\text{x})$
6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=$ 0, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$
7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$>ο, τότε και f(χ)>0 κοντά στο x_0
8. Αν f(x) > 0 στο R και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$>0
9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{¦«¡}{¡}$=0 συμπεραίνουμε ότι το $\chi\to\pm\infty$
10. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=2016$ τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2016^2$

(Μονάδες 10 x 2,5=25)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν $f(x)=\ln(1-x-|x|).\lim\limits_{\mu\to x-1}\dfrac{\mu^2-(2x+2)\mu+x^2+2x-3}{\mu-¡+1}$ και $g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt[4]{x}-1}$

ι) Να δείξετε ότι η $f(x)=-4\ln(1-x-|x|)$

ιι) Να δείξετε ότι η $g(x)=0$

ιιι) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο $f=g$

(Μονάδες 10+10+5=25)

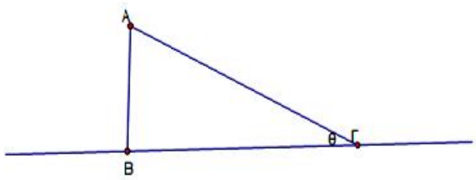
ΘΕΜΑ 3°

Α. Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Αν $\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{f(\chi)+4f(-\chi)}{\chi}=2015$, να βρείτε τα όρια :

ι) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{\chi f(2015\chi)}{\chi^2+f^2(\chi)}$

(Μονάδες 8+5=13)

Β. Δίνεται σημείο Α εκτός ευθείας και Β η προβολή του Α στην ευθεία. Σημείο Γ κινείται πάνω στην ευθεία και πάντα δεξιά του Α.



Αν $\widehat{A\Gamma B}$ =θ και ΑΒ=4 να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim\limits_{-\to 0} A\Gamma$ ii $\lim\limits_{-\to 0} B\Gamma$ i iii) $\lim\limits_{-\to 0}(B\Gamma - A\Gamma)$

iv) Δείξτε ότι όταν το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία και είναι πολύ μακριά από το Β τότε το ΑΓ είναι περίπου ίσο με το ΒΓ

v) $\lim\limits_{-\to\frac{®}{2}} A\Gamma$ vi) $\lim\limits_{-\to\frac{®}{2}} B\Gamma$ vii) $\lim\limits_{-\to\frac{®}{2}}(B\Gamma - A\Gamma)$ viii) $\lim\limits_{-\to\frac{®}{2}}\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

(Μονάδες 8x1,5=12)

ΘΕΜΑ 4°

Α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\Re$ και ισχύει: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left|2x^2-4x-|f(x)+2|\right|}{x-2}=L$ με $L\in\Re$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

Β. Αν g(x)= $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+\chi^2}+ ¡±³¬~ −±³¬)\omega^2+3x\omega+1}{\omega+2015x}$ημ$\frac{1}{\omega}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ να υπολογίσετε τις γωνίες α, β$\in$[0,π]

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x-x^3}+2x)$

(Μονάδες 10+10+5=25)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Λ,Λ,Σ,Λ,Λ,Λ,Σ,Λ,Λ,Σ

ΘΕΜΑ 2ο

ι) $\mu^2-(2x+2)\mu+x^2+2x-3$ (τριώνυμο ως προς ω) Δ=16 ρίζες οι χ-1, χ+3 άρα

$f(x)=\ln(1-x-|x|).\lim\limits_{\mu\to x-1}\dfrac{(\mu-x+1)(\mu-x-3)}{\mu-¡+1}$ $=\ln(1-x-|x|).\lim\limits_{\mu\to x-1}(\mu-x-3)$ =-4 $\ln(1-x-|x|)$.

ιι) $g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}-1)$ =0

ιιι) f: πρέπει $1-x-|x|$ >0 (1)

για $x\leq0$ (1): 1>0 ισχύει. Τότε f(χ)=0 (2)

για χ>0 (1): 1-2χ>0 $\Leftrightarrow$ $x<\dfrac{1}{2}$ άρα χ $\in(0,\dfrac{1}{2})$. Τότε f(x)= $\ln(1-2x)\neq0$ (3)

Άρα το Df= $(-\infty,\dfrac{1}{2})$

ToDg= $\Re$ άρα $f\neq g$

(2), (3) στο $(-\infty,0]$ είναι f=g

ΘΕΜΑ 3ο

ι) $\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{f(\chi)+4f(-\chi)}{\chi}=2015$ (4) για ω=-χ, $\lim\limits_{x\to0}(-x)=0$ έχω: $\lim\limits_{\omega\to0}-\dfrac{f(-\omega)+4f(\omega)}{\omega}=2015$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{f(-x)+4f(x)}{x}=2015\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{4f(-x)+16f(x)}{x}=8060$ (5). Από (4)+(5) $\lim\limits_{\chi\to0}-15\dfrac{f(\chi)}{\chi}=10075\Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=-\dfrac{10075}{15}=-\dfrac{2015}{3}$

ιι) $\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{\chi f(2015\chi)}{\chi^2+f^2(\chi)}=\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{2015\chi^2\dfrac{f(2015\chi)}{2015x}}{\chi^2(1+\dfrac{f^2(\chi)}{x^2})}=\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{2015\dfrac{f(2015\chi)}{2015x}}{(1+\dfrac{f^2(\chi)}{x^2})}=\dfrac{2015\dfrac{2015}{3}}{1+\dfrac{2015^2}{9}}$

B. ημθ=$\frac{4}{A\Gamma}$ ⇔ ΑΓ=$\frac{4}{\text{¦«¯}}$, εφθ=$\frac{4}{B\Gamma}$ ⇔ $B\Gamma=\frac{4}{\text{£¨¯}}$

i) $\lim\limits_{\text{¯}\to 0} A\Gamma = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}\frac{4}{\text{¦«¯}} = +\infty$ (α΄ τεταρτημόριο, ημχ>0)

ιι) ii) $\lim\limits_{\text{¯}\to 0} B\Gamma = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}\frac{4}{\text{£¨¯}} = +\infty$ (α΄ τεταρτημόριο, εφχ>0)

iii) $\lim\limits_{\text{¯}\to 0}(\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Gamma}) = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}(\frac{4}{\text{£¨¯}}-\frac{4}{\text{¦«¯}}) = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}(\frac{4\text{±³¬¯}}{\text{¦«¯}}-\frac{4}{\text{¦«¯}}) = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}(\frac{4(\text{±³¬¯}-1)}{\text{¦«¯}}) = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}(\frac{4(\text{±³¬¯}-1)(\text{±³¬¯}+1)}{\text{¦«¯}(\text{±³¬¯}+1)}) =$

$\lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}(\frac{4(\text{±³¬}^2\text{¯}-1)}{\text{¦«¯}(\text{±³¬¯}+1)}) = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}(\frac{-4\text{¦«}^2\text{¯}}{\text{¦«¯}(\text{±³¬¯}+1)}) = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}(\frac{-4\text{¦«¯}}{(\text{±³¬¯}+1)}) = 0$

iv) Όταν το Γ είναι πολύ μακριά από το Β, η γωνία θ τείνει να γίνει 0, όμως $\lim\limits_{\text{¯}\to 0}\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \lim\limits_{\text{¯}\to 0^+}\text{±³¬¯} = 1$

άρα ΒΓ περίπου ίσο με το ΑΓ

v) i) $\lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}} A\Gamma = \lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}}\frac{4}{\text{¦«¯}} = 4$

vi) $\lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}} B\Gamma = \lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}^-}\frac{4}{\text{£¨¯}} = \lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}^-}\frac{4\text{±³¬¯}}{\text{¦«¯}}$ =0

vii) $\lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}}(B\Gamma - A\Gamma) = \lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}}(\frac{4}{\text{£¨¯}}-\frac{4}{\text{¦«¯}}) = \lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}}(\frac{4\text{±³¬¯}}{\text{¦«¯}}-\frac{4}{\text{¦«¯}})$=-4

viii) $\lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}}\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \lim\limits_{\text{¯}\to\frac{\text{®}}{2}^-}\text{±³¬¯} = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

Α) Γενικά ισχύει $-|b(x)| \le b(x) \le |b(x)|$ οπότε αν $\lim\limits_{x\to x_0}|b(x)| = 0$ τότε από κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0} b(x) = 0\,(1)$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left|2x^2-4x-|f(x)+2|\right|}{x-2} = L$ με L ∈ ℜ αν $g(x) = \frac{\left|2x^2-4x-|f(x)+2|\right|}{x-2}$, με χ κοντά στο 2, τότε

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = L$ με L ∈ ℜ και άρα $g(x)(x-2) = \left|2x^2-4x-|f(x)+2|\right| \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)(x-2) = \lim\limits_{x\to 2}\left|2x^2-4x-|f(x)+2|\right| = 0$ από (1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-4x-|f(x)+2|) = 0$ Αν

$r(x) = 2x^2-4x-|f(x)+2|$,χ κοντά στο 2, τότε $\lim\limits_{x\to 2} r(x) = 0$ και $|f(x)+2| = 2x^2-4x-r(x) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}|f(x)+2| = \lim\limits_{x\to 2}(2x^2-4x-r(x)) = 0$ από (1) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+2) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}(f(x)) = -2$

Β. $g(x)=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡ ±³¬~ −±³¬})\omega^2+3x\omega+1}{\omega+2015x}\eta\mu\frac{1}{\omega}$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡ ±³¬~ −±³¬})\omega^2+3x\omega+1}{\omega(\omega+2015x)}\frac{\eta\mu\frac{1}{\omega}}{\frac{1}{\mu}}=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\omega^2(\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡ ±³¬~ −±³¬})+\frac{3x}{\mu}+\frac{1}{\mu^2})}{\omega^2(1+\frac{2015x}{\mu})}\frac{\eta\mu\frac{1}{\omega}}{\frac{1}{\mu}}$$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡ ±³¬~ −±³¬})+\frac{3x}{\mu}+\frac{1}{\mu^2})}{(1+\frac{2015x}{\mu})}\frac{\eta\mu\frac{1}{\omega}}{\frac{1}{\mu}}=\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡ ±³¬~ −±³¬}\quad \text{αφού}$$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{\omega}}{\frac{1}{\mu}}=\lim_{r\to0^+}\frac{\text{¦«}r}{r}=1 \text{ όπου } r=\frac{1}{\mu}>0\text{ , με } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu}=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡ ±³¬~ −±³¬})=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡ ±³¬~})=\text{±³¬}\quad(1)$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{\frac{1}{\chi^2}+1}+\text{±³¬~})=\text{±³¬}$ αν συνα$\neq$ -1 τότε το $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{\frac{1}{\chi^2}+1}+\text{±³¬~})\notin\Re$ άτοπο άρα συνα=-1οπότε η (1) γράφεται $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\chi^2}-\text{¡})=\text{±³¬}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1+\chi^2-\text{¡}^2}{\sqrt{1+\chi^2}+\text{¡}})=\text{±³¬}$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1)})=\text{±³¬}\quad\Leftrightarrow0=\text{±³¬}$ και επειδή η συνχ είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,π]

άρα 1-1 οπότε α=π και β=$\frac{®}{2}$

Γ. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x-x^3}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{-x^3(1-\frac{1}{x^2})}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{-x^3(1-\frac{1}{x^2})}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{(-x)^3}\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})}+2x)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[-x(\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})}-2)]=-\infty$