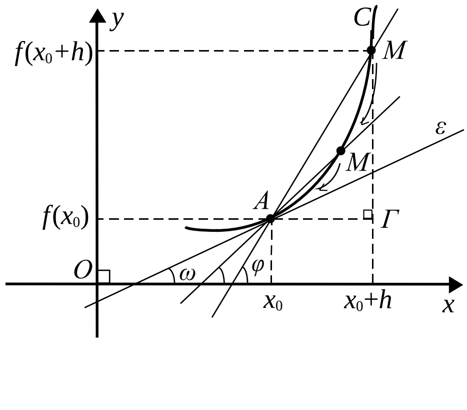
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΕΝΙΚΗΣ

1. Τι λέγεται συνάρτηση;
2. Τι λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής
3. Τι λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή συνάρτησης f και τι εξαρτημένη μεταβλητή;
4. Ποιες πράξεις ορίζονται μεταξύ συναρτήσεων και πως ορίζονται αυτές;
5. Τι λέγεται γραφική παράσταση (καμπύλη) συνάρτησης f και τι εξίσωση της γραφικής παράστασης;
6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;
7. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη;
8. Τι λέγεται τοπικό μέγιστο και τι τοπικό ακρότατο συνάρτησης f;
9. Τι λέγεται ολικό μέγιστο και τι ολικό ελάχιστο συνάρτησης;
10. Τι ονομάζουμε ακρότατα συνάρτησης;
11. Τι λέγεται συνεχής συνάρτηση σε σημείο του πεδίου ορισμού της
12. Τι λέγεται συνεχής συνάρτηση;
13. Τι λέγεται εφαπτόμενη καμπύλης; Πως ορίζεται ο συντελεστής της εφαπτόμενης;
14. Τι λέγεται μέση ταχύτητα και τι στιγμιαία ταχύτητα;
15. Τι λέγεται παράγωγος της συνάρτησης f στο $χ_0$;
16. Τι λέγεται ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο $χ_0$;
17. Δώστε δυο παραδείγματα με τα οποία να φαίνεται η εφαρμογή της παραγώγου
18. Δώστε μία γραφική παράστασης που να είναι συνεχής σε ένα σημείο αλλά σε αυτό το σημείο να μην είναι παραγωγίσιμη
19. Τι λέγεται παράγωγος της f
20. Τι λέγεται δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f
21. Να βρείτε τη παράγωγο της f(χ)=c Απόδειξη
22. Να βρείτε τη παράγωγο της f(χ)=χ Απόδειξη
23. Να βρείτε τη παράγωγο της $f(χ)=χ^2$. Απόδειξη
24. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να δείξετε ότι: (ημχ)΄=συνχ
25. Να βρείτε τη παράγωγο της cf(x) Απόδειξη
26. Να βρείτε τη παράγωγο της f(x)+g(x) Απόδειξη
27. Γράψτε τους τύπους της παραγώγου γινομένου πηλίκου και σύνθετης συνάρτησης
28. Τι λέει το κριτήριο της πρώτης παραγώγου;
29. Κριτήρια ακρότατων

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1. Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου *Α* αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου *Β*.
2. Έστω συνάρτηση f:A$\rightarrow$B. Αν το σύνολο *Α*, που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου *R* των πραγματικών αριθμών, ενώ το *Β* συμπίπτει με το *R*
3. Έστω λοιπόν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *Α*. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$ και **διαβάζουμε** "*y* ίσον *f* του *x*". Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της *f* στο *x***. Το γράμμα *x*, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του *Α*, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το *y*, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο *x* και εξαρτάται από την τιμή του *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
4. Αν δύο συναρτήσεις *f*, *g* ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο *Α*, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:
   - Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
   - Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
   - Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
   - Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.
5. Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *Α*. Γ**ραφική παράσταση** ή **καμπύλη της *f*** σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$. Επομένως, ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της *f*, μόνο όταν $y = f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της *f* και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f***.
6. Μια συνάρτηση *f* λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο *Δ*, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
7. Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**
8. Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *Α* λέμε ότι παρουσιάζει: **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_1, και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_2
9. Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *Α* λέμε ότι παρουσιάζει: **ολικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε *x* του πεδίου ορισμού, και **ολικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε *x* του πεδίου ορισμού
10. Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης
11. **Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *Α* λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$, αν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.**
12. **Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *Α* λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$**
13. **Έστω** λοιπόν *f* μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης *C*. Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ της *C* με $h \neq 0$. Παρατηρούμε ότι καθώς το *Μ* κινούμενο πάνω στη *C* πλησιάζει το *Α*, όταν δηλαδή $h \to 0$, τότε η ευθεία *ΑΜ* φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση *ε* η οποία λέγεται εφαπτομένη (tangent) της *C* στο *Α*. Από το σχήμα έχουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της *ΑΜ* είναι $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{M\Gamma}{A\Gamma} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$, οπότε ο



συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της *C* στο *A* θα είναι $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$.

14. $\text{Μέση ταχύτητα} = \dfrac{\text{διανυθέν διάστημα}}{\text{χρόνος}}$. Στιγμιαία ταχύτητα υ του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $\upsilon = \lim_{h\to 0}\dfrac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{\Delta S}{h}$ όπου s(t) η συνάρτηση θέσης του κινητού

15. Αν το όριο $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\boldsymbol{x_0}$ του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται “ f τονούμενο του x_0 ”. Έχουμε λοιπόν:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

16. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς το *x*, όταν $x = x_0$
17. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0, $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.
18.
19. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το *A*, και *B* το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f'}$.
20. Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της *f* και συμβολίζεται με f''

21. Έχουμε $f(x+h)-f(x) = c-c = 0$ και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$, οπότε $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$. Άρα $\boldsymbol{(c)' = 0}$.

22. Έχουμε $f(x+h)-f(x) = (x+h)-x = h$, και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$.

Επομένως $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$. Άρα $\boldsymbol{(x)' = 1}$.

23. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε $f(x+h)-f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$, και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$. Επομένως, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$. Άρα $\boldsymbol{(x^2)' = 2x}$

24. .

25. Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$, και για $h\neq 0$ $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c(f(x+h)-f(x)}{h}=c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$. Άρα $\boldsymbol{(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)}$.

26. Έστω η συναρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε $F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$ $=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$, και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$. Άρα

$$\boldsymbol{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$$

27. $\boldsymbol{(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$ $\quad$ $\boldsymbol{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$

$\boldsymbol{\big(f(g(x))\big)'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$

28. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο *Δ* Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο *Δ*

29. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο

1. Τι ονομάζουμε στατιστική;
2. Τι είναι η δημοσκόπηση
3. Ποιο το αντικείμενο της δειγματοληψίας;
4. Τι λέγεται πληθυσμός, τι άτομα και τι μεταβλητή ενός πληθυσμού;
5. Τι λέγονται στατιστικά δεδομένα
6. Είδη μεταβλητών
7. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποιοτικές ή κατηγορικές;
8. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; Σε τι διακρίνονται
9. Τι λέγεται απογραφή;
10. Τι λέγεται δείγμα και τι μέγεθος ενός δείγματος; Πότε ένα δείγμα λέγεται αντιπροσωπευτικό;
11. Ποιο είναι το αντικείμενο της δειγματοληψίας;
12. Τι περιέχουν οι γενικοί πίνακες στατιστικών δεδομένων και τι οι ειδικοί; Τι πρέπει να περιέχει ένας πίνακας στατιστικών δεδομένων ώστε να είναι σωστά κατασκευασμένος;
13. Σε ένα δείγμα μεγέθους ν. Τι ονομάζεται συχνότητα v_i της τιμής χ_i; Με τι ισούται το άθροισμα όλων των συχνοτήτων;
14. Τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα N_i της τιμής χ_j; Ποια σχέση συνδέει τις αθροιστικές συχνότητες δύο διαδοχικών τιμών της ποσοτικής μεταβλητής Χ;
15. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα fi της τιμής χ_ι Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα γ) Να δείξετε ότι: $0 \le f_i \le 1$ και ότι: $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$
16. Τι ονομάζεται αθροιστική σχετική συχνότητα F_ι της τιμής x_i.
17. Τι λέγεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων
18. Ποια σχέση συνδέει τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες δυο διαδοχικών τιμών της ποσοτικής μεταβλητής Χ;
19. Τι είναι το ραβδόγραμμα και πως κατασκευάζεται;
20. Τι είναι το διάγραμμα συχνοτήτων και πως κατασκευάζεται; Πως προκύπτει το πολύγωνο συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων;
21. Τι είναι το κυκλικό διάγραμμα και πως κατασκευάζεται;
22. Τι είναι το σημειόγραμμα και πως κατασκευάζεται;
23. Τι είναι το χρονόγραμμα και πως κατασκευάζεται;
24. Πότε κάνουμε ομαδοποίηση παρατηρήσεων; Πως βρίσκουμε το πλάτος μιας κλάσης και πως το κέντρο της;
25. α) Τι είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων και πως κατασκευάζεται; β) Πώς προκύπτει το πολύγωνο συχνοτήτων. γ) Με τι είναι ίσο το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;
26. Τι ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων και πως προκύπτει; β) Να ορίσετε (και με σχήμα) τις χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων.
27. Σε μια κατανομή συχνοτήτων: α) Ποια είναι τα μέτρα θέσης και τι εκφράζουν; β) Ποια είναι τα μέτρα διασποράς και τι εκφράζουν; γ) Τι εκφράζουν τα μέτρα ασυμμετρίας;
28. α) Πώς ορίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων; β) Αν είναι γνωστές οι συχνότητες ή οι σχετικές συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής χ πως υπολογίζεται η μέση τιμή τους; γ) Πώς υπολογίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων ομαδοποιημένων σε κλάσεις; δ) Πότε για ένα σύνολο παρατηρήσεων ορίζουμε το

σταθμικό μέσο και πως τον υπολογίζουμε;

29. α) Πώς ορίζεται η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων; β) Τι εκφράζει η διάμεσος ενός δείγματος; γ) Πώς βρίσκουμε τη διάμεσο ομαδοποιημένων δεδομένων;

30. α) Πώς ορίζεται το εύρος ή κύμανση ενός συνόλου μη ομαδοποιημένων παρατηρήσεω β) Πώς ορίζεται το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα;

31. Γιατί για τη διασπορά των παρατηρήσεων $t_1, t_2, ..., t_\nu$ μιας μεταβλητής X δεν αφαιρούμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση και να βρούμε τον αριθμητικό μέσο των διαφορών αυτών

32. α) Πώς ορίζεται η διακύμανση ή διασπορά ενός συνόλου μη ομαδοποιημένων παρατηρήσεων; β) Πώς ορίζεται η διακύμανση ή διασπορά ενός συνόλου ομαδοποιημένων παρατηρήσεων;γ) Ποιο το μειονέκτημα της διακύμανσης;

33. α) Πώς ορίζεται η τυπική απόκλιση ενός συνόλου παρατηρήσεων; β) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή ποιες ιδιότητες έχει η τυπική απόκλιση

34. α) Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας ενός συνόλου παρατηρήσεων; β) Πότε ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής χαρακτηρίζεται ομοιογενές; γ) πότε ένα δείγμα είναι πιο ομοιογενές από ένα άλλο;

35. Έστω οι ν παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ με μέση τιμή $\bar{x}$, διάμεσο δ_X και τυπική απόκλιση S_x. α) Αν $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν προσθέσουμε σε καθεμιά από τις $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_\nu$ μια σταθερά c, τότε να γράψετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του νέου συνόλου παρατηρήσεων.β) Αν $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_\nu$ επί μια σταθερά c, τότε να γράψετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του νέου συνόλου παρατηρήσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

1. Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για: • το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων • τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους • την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων. Ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με τον πρώτο στόχο λέγεται **σχεδιασμός πειραμάτων** ενώ, με τον δεύτερο ασχολείται η **περιγραφική στατιστική** που αποτελεί και το αντικείμενο μελέτης μας στη συνέχεια. Τέλος, η **επαγωγική στατιστική** ή **στατιστική συμπερασματολογία** περιλαμβάνει τις μεθόδους με τις οποίες γίνεται η προσέγγιση των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου συνόλου δεδομένων, με τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μικρού υποσυνόλου των δεδομένων
2. Οι έρευνες των ανθρώπινων πληθυσμών λέγονται **δημοσκοπήσεις**
3. Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **Δειγματοληψίας**
4. **Πληθυσμός** λέγεται ένα σύνολο που εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά.. Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**
5. Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις. Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ’ανάγκη διαφορετικά
6. Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε: Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές και σε ποσοτικές**
7. **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί
8. **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί διακρίνονται: Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές. Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν αποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).
9. Απογραφή λέγεται η εξέταση όλων των ατόμων (στοιχείων) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει
10. **Δείγμα** λέγεται κάθε υποσύνολο του πληθυσμού.Μέγεθος του δείγματος λέγεται ο αριθμός των στοιχείων του. Ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.
11. Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **Δειγματοληψίας**
12. Οι πίνακες διακρίνονται στους: α) **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,β) **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες. Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει: α) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα, β) τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων, γ) το **κύριο σώμα** (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα, δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ’αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.
13. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής *Χ*, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους *ν*, $\kappa \le \nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής

X στο σύνολο των παρατηρήσεων. Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος *ν* του δείγματος, δηλαδή:
$\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa = \nu$

14. **Οι αθροιστικές συχνότητες** εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i. Ορίζονται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. Ισχύει $N_{i+1} - N_i = \nu_{i+1}$

15. **α)Το πηλίκο** της συχνότητας ν_i προς το μέγεθος *ν* του δείγματος, λέγεται **σχετική συχνότητα** f_i της τιμής x_i, δηλαδή $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1,2,...,\kappa$. β) Εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι ίσες με τη τιμή x_i γ) Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες: (i) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,...,\kappa$ αφού $0 \le \nu_i \le \nu$ και $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$, αφού $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$.Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i\%$, δηλαδή $f_i\% = 100 f_i$.

16. **Αθροιστική σχετική συχνότητα** F_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής, λέγεται το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i. Συχνά οι F_i πολλαπλασιάζονται επί 100 εκφραζόμενες έτσι επί τοις εκατό, δηλαδή $F_i\% = 100 F_i$

17. Οι ποσότητες x_i, ν_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**

18. $F_{i+1} - F_i = f_{i+1}$

19. Το **ραβδόγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής *X* αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος των βάσεών τους καθορίζονται αυθαίρετα

20. το **διάγραμμα συχνοτήτων** χρησιμοποιείται στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή. Υψώνουμε σε κάθε x_i (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < ... < x_\kappa$) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων ν_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i, οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**.Ενώνοντας τα σημεία (x_i, ν_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα.

21. Το **κυκλικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε $\alpha_i = \nu_i \frac{360^o}{\nu} = 360^o f_i$ για $i = 1,2,...,\kappa$.

22. Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα**, στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα

23. Το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής

24. Στην περίπτωση που έχουμε πολλές τιμές μιας διακριτής μεταβλητής είτε, πολύ περισσότερο, στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της. Σ'αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν (ομαδοποιηθούν) τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται και **κλάσεις** έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει μόνο σε μία κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται **όρια των κλάσεων** Συνήθως υιοθετούμε την περίπτωση που μια κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά) αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), δηλαδή που οι κλάσεις είναι της μορφής [,). Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να "αντιπροσωπευθούν" από τις **κεντρικές τιμές**, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης. Το πρώτο βήμα στην ομαδοποίηση των δεδομένων είναι η εκλογή του αριθμού *κ* των ομάδων ή κλάσεων. Ο αριθμός αυτός συνήθως ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Γενικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός ο παρακάτω πίνακας:

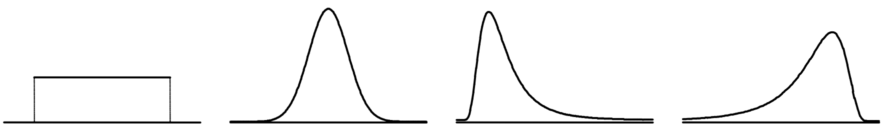
Μέγεθος δείγματος *ν*	Αριθμός κλάσεων *κ*	Μέγεθος δείγματος *ν*	Αριθμός κλάσεων *κ*
< 20	5	$200-400$	9
$20-50$	6	$400-700$	10
$50-100$	7	$700-1000$	11
$100-200$	8	≥ 1000	12

Το δεύτερο βήμα είναι ο προσδιορισμός του πλάτους των κλάσεων. **Πλάτος μιας κλάσης** ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης Για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις, χρησιμοποιούμε το **εύρος** *R* του δείγματος, δηλαδή τη διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του συνολικού δείγματος. Τότε υπολογίζουμε το πλάτος *c* των κλάσεων διαιρώντας το εύρος *R* διά του αριθμού των κλάσεων *κ*, στρογγυλεύοντας, αν χρειαστεί για λόγους διευκόλυνσης, πάντα προς τα πάνω. Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή των κλάσεων. Ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση, ή για πρακτικούς λόγους λίγο πιο κάτω από την μικρότερη παρατήρηση, και προσθέτοντας κάθε φορά το πλάτος *c* δημιουργούμε τις *κ* κλάσεις. Αυτονόητο είναι ότι η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα (πρέπει να) ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση.Τέλος, γίνεται η **διαλογή** των παρατηρήσεων. Το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση *i* καλείται **συχνότητα της κλάσης** αυτής ή **συχνότητα της κεντρικής τιμής** x_i , $i=1,2,...,\kappa$.

25. Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα** συχνοτήτων. Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**. Στην περίπτωση κλάσεων ίσου πλάτους Θεωρώντας το πλάτος *c* ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων βάζουμε τις συχνότητες. Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το **ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**, οπότε στον κάθετο άξονα βάζουμε τις σχετικές συχνότητες. Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος *ν*. Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα

σχετικών συχνοτήτων και το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** με εμβαδόν ίσο με 1. Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**. Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** της κατανομής.

26. Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**



(α) (β) (γ) (δ)

Ομοιόμορφη, κανονική, θετική ασυμμετρία, αρνητική ασυμμετρία

27. Ονομάζουμε **μέτρα θέσης** της κατανομής τα μέτρα που καθορίζουν τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα. Ονομάζουμε **μέτρα διασποράς** της κατανομής τα μέτρα που καθορίζουν τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους. Ονομάζουμε **μέτρα ασυμμετρίας** της κατανομής τα μέτρα που καθορίζουν τη μορφή της κατανομής. **Μέτρα θέσης είναι α**) η μέση τιμή ή αριθμητικός μέσος, β)ο σταθμικός μέσος ή σταθμισμένος αριθμητικός μέσος και γ) η διάμεσος **Μέτρα Διασποράς** είναι α) Εύρος β) Διακύμανση ή διασπορά (s^2) γ) Τυπική Απόκλιση (s) δ) Συντελεστής Μεταβολής (CV)

28. α) Η **μέση τιμή** ενός συνόλου *ν* παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων β) Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους *ν* οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής *X* είναι $t_1, t_2, ..., t_\nu$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση: $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$. Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής *X* με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση: $\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i$ Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$ όπου f_i οι σχετικές συχνότητες. γ) σε ομαδοποιημένα θεωρούμε σαν τιμές της μεταβλητής τις κεντρικές τιμές κάθε κλάσης δ) Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο**. Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, ..., w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

29. α) Διάμεσος (δ) ενός δείγματος *ν* παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το *ν* είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το *ν* είναι άρτιος αριθμός. Η διάμεσος δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις. β) η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι

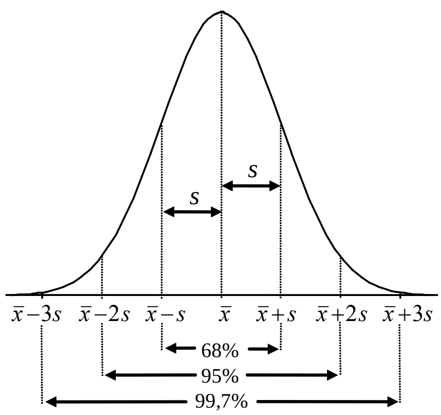
μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν. γ)στα ομαδοποιημένα διάμεσος είναι η τιμή που αντιστοιχεί στο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων στο 50% της $F_i\%$

30. **Εύρος** ή **κύμανση** (R), ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή: Εύρος $R=$ Μεγαλύτερη παρατήρηση-Μικρότερη παρατήρηση Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσης από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης

31. Ένας **άλλος** τρόπος για να υπολογίσουμε τη διασπορά των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής *X* θα ήταν να αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση και να βρούμε τον αριθμητικό μέσο των διαφορών αυτών, δηλαδή τον αριθμό: $\dfrac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})}{\nu}$ Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού $\dfrac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\dfrac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu}-\dfrac{\nu\bar{x}}{\nu}=\bar{x}-\bar{x}=0$.

32. Διακύμανση ή **διασπορά** ονομάζουμε τον μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Δηλαδή $s^2=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2$ Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση: $s^2=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2\nu_i$ β) Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση: $s^2=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2\nu_i$ όπου $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ τα κέντρα των κλάσεων με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$. γ) δεν έχει τις ίδιες μονάδες μέτρησης με την μεταβλητή

33. Αν πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού. Η ποσότητα αυτή λέγεται **τυπική απόκλιση**, συμβολίζεται με *s* και δίνεται από τη σχέση: $s=\sqrt{s^2}$ Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες: ι)το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$ ιι)το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$ ιιι)το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστη $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$ ιν)το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R\approx 6s$.



34. α)Συντελεστής **μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας**, λέγεται ο λόγος: $CV=\dfrac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}\cdot 100\%=\dfrac{s}{\bar{x}}\cdot 100\%$ Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται επί τοις εκατό, είναι συνεπώς ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς. Εκφράζει, δηλαδή, τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής.β) ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%. γ) Λέγεται ποιο ομοιογενές αυτό που έχει μικρότερο συντελεστή μεταβλητότητας

35. α)Αν Ψ=Χ+c τότε $\overline{\Psi}=\overline{\mathrm{X}}+c$, $S_\psi=S_x$, $\delta_\psi=\delta_\chi+c$ β)Αν Ψ=αΧ τότε $\overline{\Psi}=\alpha\overline{\mathrm{X}}$, $S_\psi=|a|S_x$ $\delta_\psi=a\delta_\chi$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Σε τι διακρίνονται τα πειράματα;
2. Τι λέγεται δειγματικός χώρος και τι ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης
3. Σε τι διακρίνονται τα ενδεχόμενα;
4. Πότε λέμε ότι πραγματοποιείται ένα ενδεχόμενο;
5. Τι λέγεται βέβαιο και τι αδύνατο ενδεχόμενο;
6. Ποιες πράξεις ορίζονται μεταξύ των ενδεχομένων και πως ορίζονται αυτές;
7. Πότε το σύνολο Α είναι υποσύνολο του Β
8. Τι λέγονται ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και πως αλλιώς ονομάζονται;
9. Με ποιους τρόπους μπορούμε να βρούμε ενδεχόμενα πειραμάτων που γίνονται σε δυο ή περισσότερες φάσεις;
10. Τι λέγεται σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου; Ποιες σχέσεις ισχύουν για τη σχετική συχνότητα; Αποδείξεις των σχέσεων.
11. Τι ονομάζεται στατιστική ομαλότητα και πως αλλιώς ονομάζεται;
12. Δώστε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας; Ποια είναι η απαραίτητη συνθήκη για να ισχύει ο κλασικός ορισμός πιθανότητας;
13. Δώστε τον αξιωματικό ορισμό πιθανότητας
14. Ποιοι οι κανόνες λογισμού πιθανοτήτων και απόδειξη αυτών

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Τα πειράματα διακρίνονται σε αιτιοκρατικά και πειράματα τύχης. Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** πείραμα. **πείραμα τύχης** πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
2. **δειγματικός χώρος** λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. **Ενδεχόμενο** ή γεγονός λέγεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης
3. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία
4. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
5. **βέβαιο ενδεχόμενο** είναι ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται πάντοτε Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος *Ω* ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι **βέβαιο ενδεχόμενο αδύνατο ενδεχόμενο λέμε το ενδεχόμενο** που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. **αδύνατο** ενδεχόμενο είναι το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης.
6. **Το** ενδεχόμενο $A\cap B$, που διαβάζεται "*A* τομή *B*" ή "*A* και *B*" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα *A* και *B*. Το ενδεχόμενο $A\cup B$, που διαβάζεται "*A* ένωση *B*" ή "*A* ή *B*" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα *A*, *B*. Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι *A*" ή "συμπληρωματικό του *A*" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το *A*. Το A' λέγεται και "αντίθετο του *A*". Το ενδεχόμενο $A-B$, που διαβάζεται "διαφορά του *B* από το *A*" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το *A* αλλά όχι το *B*. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A-B=A\cap B'$.
7. **Το Α λέγεται υποσύνολο του Α και γράφουμε $A\subseteq B$ όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β**
8. **Δύο ενδεχόμενα *A* και *B* λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $\boldsymbol{A\cap B=\varnothing}$.** Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**
9. Με δενδροδιάγραμμα και με πίνακα διπλής εισόδου
10. Αν σε *ν* εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο *A* πραγματοποιείται *κ* φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται *σχετική συχνότητα του Α* και συμβολίζεται με f_A. Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\lambda\}$ και σε *ν* εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\},...,\{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1=\frac{\kappa_1}{\nu}$, $f_2=\frac{\kappa_2}{\nu},...,f_\lambda=\frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

    1. $0\le f_i\le 1,\quad i=1,2,...,\lambda$ (αφού $0\le\kappa_i\le\nu$) 2. $f_1+f_2+...+f_\lambda=\frac{\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_\lambda}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}=1$.
11. Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**.
12. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου *A* τον αριθμό: $P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$ Απαραίτητη συνθήκη για να ισχύει ο κλασικός ορισμός πιθανότητας είναι τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα
13. Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν: $0\le P(\omega_i)\le 1$, $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1$ Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$ Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}\neq\varnothing$

ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing)=0$.

14. **1.** Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα *Α* και *Β* ισχύει:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, τότε το $A\cup B$ έχει $\kappa+\lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα *Α* και *Β* δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)$.

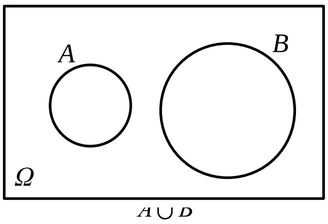
Επομένως:

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}$$

$$=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}$$

$$=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}.$$

$$=P(A)+P(B).$$



Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα *Α*, *Β* και *Γ* είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα *Α* και A' ισχύει:

$$\boxed{P(A')=1-P(A)}$$

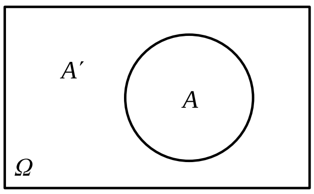
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A\cap A'=\varnothing$, δηλαδή τα *Α* και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

$$P(\Omega)=P(A)+P(A')$$

$$1=P(A)+P(A').$$

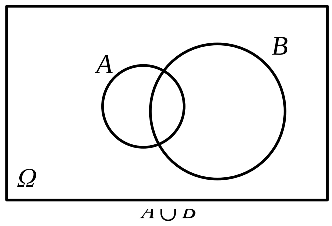


Οπότε $P(A')=1-P(A)$.

3. Για δύο ενδεχόμενα *Α* και *Β* ενός δειγματικού χώρου *Ω* ισχύει:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)\,, \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

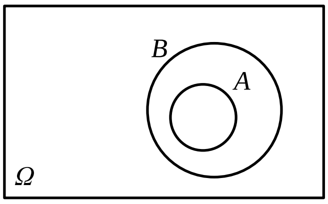
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος**

4. Αν $A\subseteq B$, τότε $P(A)\leq P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή $A\subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A)\leq N(B)$$

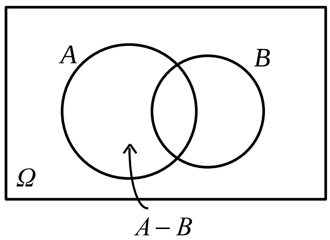
$$\frac{N(A)}{N(\Omega)}\leq\frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A)\leq P(B).$$

5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B).$$

Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.