Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Να αποδείξετε ότι: $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

Μονάδες 9

Β. Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z; (Να δώσετε τον ορισμό με γεωμετρικό και αλγεβρικό τρόπο)

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

ι) Για κάθε μιγαδικό z_1, z_2 ισχύει $|\overline{z_1}-z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Μονάδες 2

ιι) Για κάθε μιγαδικό z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία $z_1 > z_2 \Leftrightarrow$ $z_1 - z_2 >0$.

Μονάδες 2

ιιι). Αν z μιγαδικός με $z^3=1$ τότε $z^5=(z^3)^{\frac{5}{3}}=1$

Μονάδες 2

ιν. Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 2

ε. Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z,w ισχύει $|z+w|^2=|z|^2+|w|^2$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\sqrt{2}+i$ και $z_2=1-i\sqrt{2}$ να αποδείξετε ότι: i) $\frac{z_1}{z_2}$=i ii) $\frac{xz_1-z_2}{z_1+xz_2}=i$, $x\in\Re$ iii) $z_1^{2014}+z_2^{2014}=0$ iv) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 καιO(0,0) δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. v)Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z|$=1 , να δείξετε ότι: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\le\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|\le\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

Μονάδες (5x5)

ΘΕΜΑ 3°

Α. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ και Α,Β,Γ οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο ώστε ΑΒΓ τρίγωνο και $\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 11

Β. Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει: $\mathrm{Re}(z+\frac{4}{z})=2\mathrm{Re}(z)$

ι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii) Αν $\mathrm{Re}(z)\neq 0$, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w= z+\frac{4}{z}$ είναι πραγματικός και ισχύει $-4\leq w\leq 4$

Μονάδες 7+7

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η ισότητα z+iz+(2z-1)x-1=0 με χ πραγματικό, i)Να δειχτεί ότι $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=2\left|z^2\right|$ ii) Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος C_1 κέντρου Κ$(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ και ακτίνας R=$\frac{\sqrt{2}}{4}$ με εξαίρεση το σημείο $(\frac{1}{2},0)$. iii) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_2 του $\bar{z}$. iv) Αιτιολογήστε ότι τα κοινά σημεία των C_1, C_2 είναι πάνω στον χ΄χ και να τα βρείτε. v) Να βρείτε το μέγιστο του $\left|z-\bar{z}\right|$ vi) Αν $\left|z-\bar{z}\right|$=max$\left|z-\bar{z}\right|$ να βρεθεί ο z.

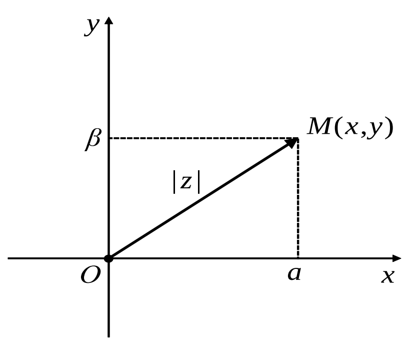
Μονάδες (5x4+5)

Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (ΛΥΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ 1°

Α. $\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=$
$(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

Β. Έστω $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ η εικόνα του μιγαδικού $\mathrm{z}=\mathrm{x}+\mathrm{y}i$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του Μ από την αρχή Ο, δηλαδή $|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$



Γ. i) Σ ii) Λ iii) Λ

iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ 2ο

i) i. $z_2 = i\cdot\left(1-i\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}+i = z_1$ άρα $\frac{z_1}{z_2}$=i

ii) Από i) $z_1 = iz_2$ ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{xz_1 - z_2}{z_1 + xz_2} = \frac{xz_2\cdot i - z_2}{z_2\cdot i + xz_2} = \frac{z_2(\text{xi}-1)}{z_2(i+x)} = \frac{\text{xi}-1}{i+x} = \frac{\text{i}(i+x)}{i+x} = i$$

iii) $z_1^{2014} + z_2^{2014} = (iz_2)^{2014} + z_2^{2014} = i^{2014}z_2^{2014} + z_2^{2014} = (i^4)^{503}i^2 z_2^{2014} + z_2^{2014} = -z_2^{2014} + z_2^{2014} = 0$

iv) $z_1 = iz_2 \Rightarrow |z_1| = |iz_2| \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow (\mathrm{OA}) = (\mathrm{OB})$ άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

$$|z_1 - z_2| = |iz_2 - z_2| = |z_2(i-1)| = |z_2|.\sqrt{2} = (AB)$$

Επειδή $(AB)^2 = 2|z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = (OA)^2 + (OB)^2$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

v) <u>1ος τρόπος</u>

$|z|$=1 συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Επειδή (ΟΑ)=$|z_1| = \left|\sqrt{2}+i\right| = \sqrt{3} > 1$, το Α εξωτερικό σημείο του μοναδιαίου κύκλου, άρα $\sqrt{3}-1 \leq |z - z_1| \leq \sqrt{3}+1$ (1)

Είναι (ΟΒ)= $|z_2| = \left|1 - i\sqrt{2}\right| = \sqrt{3} > 1$ Β εξωτερικό σημείο του μοναδιαίου κύκλου, άρα

$\sqrt{3}-1 \leq |z - z_2| \leq \sqrt{3}+1$ $\frac{1}{\sqrt{3}+1} \leq \frac{1}{|z-z_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ (2) πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) (όλοι οι όροι μη αρνητικοί) προκύπτει $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \leq \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

<u>2ος τρόπος</u>

$$\big||z| - |z_1|\big| \leq |z - z_1| \leq |z| + |z_1| \Leftrightarrow \left|1-\sqrt{3}\right| \leq |z - z_1| \leq 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}-1 \leq |z - z_1| \leq 1+\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\big||z| - |z_2|\big| \leq |z - z_2| \leq |z| + |z_2| \Leftrightarrow \left|1-\sqrt{3}\right| \leq |z - z_2| \leq 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}-1 \leq |z - z_2| \leq 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} \leq \frac{1}{|z-z_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{3}-1} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1),(2) κατά μέλη έχουμε:

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{1}{\sqrt{3}+1} \le |z-z_1|\frac{1}{|z-z_2|} \le \left(1+\sqrt{3}\right)\frac{1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \le \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| \le \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

ΘΕΜΑ 3ο

C. $\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right|=\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| \Rightarrow \frac{|z_3-z_2|}{|z_2-z_1|}=1 \Rightarrow |z_3-z_2|=|z_2-z_1|$

άρα (ΒΓ)=(ΑΒ) (1)

$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{z_3-z_2+z_2-z_1}{z_2-z_1}=\frac{-1+i\sqrt{3}+2}{2} \Rightarrow \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| \Rightarrow \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}=1 \Rightarrow |z_3-z_1|=|z_2-z_1| \Rightarrow$ (ΑΓ)=(ΑΒ) (2)

Από (1),(2) το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ισόπλευρο

D. **i)** Πρέπει $z\neq 0$

$Re(z+\frac{4}{z})=2Re\left(z\right) \Leftrightarrow \frac{z+\frac{4}{z}+\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}}}{2}=2\frac{z+\bar{z}}{2} \Leftrightarrow z+\frac{4}{z}+\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}}=2(z+\bar{z}) \Leftrightarrow$

$z+\bar{z}-4\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}=0 \Leftrightarrow (z+\bar{z})(1-4\frac{1}{z\bar{z}})=0 \Leftrightarrow z+\bar{z}=0$ ή $z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας ψ΄ψ (χ=0) ή ο κύκλος κέντρου (0,0) και ακτίνας 2 , με εξαίρεση το σημείο (0,0).

ii) Αν Re(z)≠0 τότε ο γεωμετρικός τόπος του z είναι ο κύκλος κέντρου (0,0) και ακτίνας 2.

Ο γεωμετρικός τόπος του z είναι ο κύκλος κέντρου (0,0) και ακτίνας 2 συνεπώς

$-2\le \text{Re}(z)\le 2 \Rightarrow -4\le 2\text{Re}(z)\le 4 \Rightarrow -4 \le w \le 4$

ΘΕΜΑ 4ο

i) z+iz+(2z-1)x-1=0 $\Leftrightarrow$ (2z-1)x=1-z-iz (1)

Αν 2z-1=0 $\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}$ στην (1) $0=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}$ άτοπο

Άρα $z\neq\frac{1}{2}$* οπότε $\frac{1-z-iz}{2z-1}=x\in\Re$ άρα

$\frac{1-z-iz}{2z-1}=\frac{1-\bar{z}+i\bar{z}}{2\bar{z}-1} \Leftrightarrow 2\bar{z}-1-2z\bar{z}+z-2iz\bar{z}+iz=2z-2z\bar{z}+2iz\bar{z}-1+\bar{z}-i\bar{z} \Leftrightarrow$

$z-\bar{z}+4iz\bar{z}-i(z+\bar{z})=0 \Leftrightarrow 2\text{Im}(z)i+4i|z|^2-i2\text{Re}(z)=0 \Leftrightarrow \text{Re}(z)-\text{Im}(z)=2\left|z^2\right|$

ii) Αν z=x+ψi με x,ψ $\in \Re$ τότε $\text{Re}(z) - \text{Im}(z) = 2\left|z^2\right| \Leftrightarrow x - \psi = 2(x^2 + \psi^2) \Leftrightarrow$

$(x^2 + \psi^2) - \frac{x}{2} + \frac{\psi}{2} = 0$. ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος C_1 κέντρου Κ$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ και

ακτίνας R=$\frac{\sqrt{2}}{4}$, δηλαδή $(x - \frac{1}{4})^2 + (\psi + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$ {*το σημείο $(\frac{1}{2}, 0)$ εξαιρείται του κύκλου}

iii) Η εικόνα του $\bar{z}$ είναι συμμετρική ως προς τον χ΄χ της εικόνας του z. Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $\bar{z}$ είναι συμμετρικός του γεωμετρικού τόπου της εικόνας του z ως προς χ΄χ.

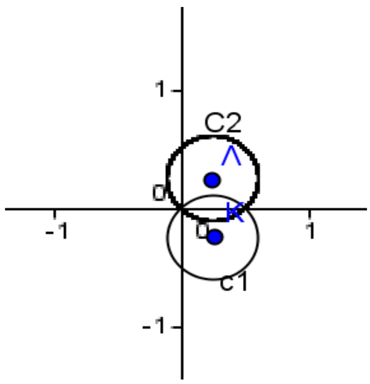
Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $\bar{z}$ έχει εξίσωση $(x - \frac{1}{4})^2 + (-\psi + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$(x - \frac{1}{4})^2 + (\psi - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$ δηλαδή είναι κύκλος C_2 κέντρου Λ$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ και ακτίνας R=$\frac{\sqrt{2}}{4}$ {*το σημείο $(\frac{1}{2}, 0)$ εξαιρείται του κύκλου}

iv) τα κοινά σημεία των C_1, C_2 είναι σημεία όπου $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \Re \Leftrightarrow$ ψ=0

$\begin{cases} (x - \frac{1}{4})^2 + (\psi - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8} \\ \psi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{2} \\ \psi = 0 \end{cases}$ άρα τα κοινά σημεία των

δυο κύκλων είναι Α(0,0) και Β$(\frac{1}{2}, 0)$ όμως το Β απορρίπτεται γιατί δεν είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου



v) Τα κέντρα των δυο κύκλων είναι σε ευθεία κάθετη στον χ΄χ λόγω συμμετρίας ως προς τον χ΄χ οπότε το max$\left|z - \bar{z}\right|$ επιτυγχάνεται για τα σημεία που η ΚΛ τέμνει τους δυο κύκλους και επειδή οι κύκλοι τέμνονται (δυο κοινά σημεία)

max$\left|z - \bar{z}\right|$=(ΚΛ)+ R+R= $\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

vi) Τα κέντρα των δυο ίσων κύκλων είναι σε ευθεία κάθετη στον χ΄χ λόγω συμμετρίας ως προς τον χ΄χ και επειδή το κέντρο Κ είναι κάτω από το κέντρο Λ οπότε το max$\left|z - \bar{z}\right|$ επιτυγχάνεται για το σημείο που η ΚΛ τέμνει τον C_1 και είναι κάτω από τον χ΄χ έστω το σημείο Δ με τετμημένη χ=$\frac{1}{4}$ και τεταγμένη ψ=$-\frac{1}{4} - R = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ Άρα ο z ώστε να έχουμε max$\left|z - \bar{z}\right|$ είναι z=$\frac{1}{4} - \frac{1+\sqrt{2}}{4}i$.

Βαγγέλης Ραμαντάνης