<u>Διαγώνισμα στο θεώρημα Bolzano με λύσεις</u>

<u>Θέμα 1ο</u>

α) Να δώσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το R, που να είναι συνεχής στο R-{α,β} και να είναι συνεχής στο [α,β] .

(Μονάδες 8)

β) Να δώσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f συνεχούς στο [α,β] που να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β) και να ισχύει f(χ)≥ 0 για κάθε χ$\in$ [α,β]

(Μονάδες 7)

γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και η f έχει ρίζα στο (α,β) τότε υποχρεωτικά θα ισχύει το θεώρημα Bolzano σε κάποιο υποδιάστημα του [α,β].

2. Αν η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$, είναι συνεχής στο (α,β) και f(α).f(β)<0 τότε η f θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

3. Αν για την f ισχύει το θεώρημα Bolzano στο [1,3] τότε η f θα έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

4. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει ρίζα στο R.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και στο διάστημα (β,γ] και f(α).f(γ)<0 τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,γ)

(Μονάδες 10)

<u>Θέμα 2ο</u>

α) Αν $f(x)=\begin{cases} e^x + x\eta\mu\dfrac{1}{\chi} & x<0 \\ \sigma\upsilon\nu\chi-\chi^2+\chi\eta\mu\chi, & \chi\geq 0 \end{cases}$ δείξτε ότι η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2})$

(Μονάδες 11)

β) Αν η f είναι συνεχής και $f^3(x)-3f^2(x)+3f(\mathrm{x})=\mathrm{x}^3+x^2-2014$ για κάθε χ πραγματικό να δείξετε ότι η εξίσωση f(χ)=1 έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

(Μονάδες 14)

<u>Θέμα 3ο</u>

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4-7x^3+6x^2+3x=3$ έχει τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

(Μονάδες 11)

β) Αν f(χ)= x^3+x+1 ι) δείξτε ότι η f αντιστρέφεται ιι) η εξίσωση f(χ)=0 έχει ακριβώς μία αρνητική ρίζα ιιι) Αν η f^{-1} είναι συνεχής στο $\Re$ να δείξετε ότι η εξίσωση (π-x).$f^{-1}(x)$ =-3χ έχει τουλάχιστον μία ρίζα θετική και μικρότερη του π.

(Μονάδες 14)

Θέμα 4^o

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2-\chi\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi}{2\chi-\pi}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π).

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση χ.συν(χ+3)- x^2 =-1 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-1,1).

(Μονάδες 8)

γ) Δείξε ότι η εξίσωση xln(x+1)+ημx=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (-1,0).

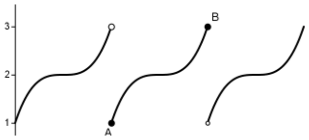
(Μονάδες 9)

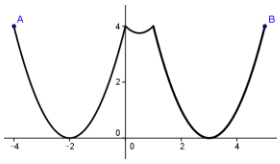
ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΜΕ ΜΟΡΙΑ ΑΝΑ ΒΗΜΑ↓

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

α) 

β) 

γ) Λ,Λ,Σ,Σ,Λ

Θέμα 2ο

α)

Για χ<0: η $f(x)=e^{x}+x\eta\mu\frac{1}{\chi}$ συνεχής ως σύνθεση (ημχ, $\frac{1}{x}$) και πράξεις συνεχών. (Μον.1)

Για χ>0: η f(x)= $\sigma\upsilon\nu\chi-\chi^{2}+\chi\eta\mu\chi$ συνεχής ως πράξεις συνεχών. (Μον.1)

$\lim\limits_{x\to o^-} f(x)=\lim\limits_{x\to o^-}(e^{x}+x\eta\mu\frac{1}{\chi})\overset{*}{=}1$ (1), (Μον.1)

*αφού $\left|x\eta\mu\frac{1}{\chi}\right|=|x|\left|\eta\mu\frac{1}{\chi}\right|\le|x|$ συνεπώς $-|x|\le x\eta\mu\frac{1}{\chi}\le|x|$ και $\lim\limits_{x\to o^-}-|x|=\lim\limits_{x\to o^-}|x|=0$ και από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to o^-}x\eta\mu\frac{1}{\chi}=0$ (Μον.3)

$\lim\limits_{x\to o^+} f(x)=\lim\limits_{x\to o^+}(\sigma\upsilon\nu\chi-\chi^{2}+\chi\eta\mu\chi)=1$ και f(0)=1 επομένως η f είναι συνεχής στο 0 (Μον.1) και

άρα η f είναι συνεχής στο $\Re$ άρα και στο $[-\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}]$ (Μον.1)

$f(-\frac{2}{\pi})=e^{-\frac{2}{\pi}}-\frac{2}{\pi}\eta\mu(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{2}{\pi}}+\frac{2}{\pi}>0$ (Μον.1)

$f(\frac{\pi}{2})=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^{2}}{4}+\frac{\pi}{2}\eta\mu(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi^{2}}{4}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^{2}-\pi}{4}<0$ (Μον.1)

Άρα $f(-\frac{2}{\pi})\ f(\frac{\pi}{2})<0$ Συνεπώς από ΘΒ η f και επομένως η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2})$ (Μον.1)

β)

$f^3(x)-3f^2(x)+3f(x)-1=x^3+x^2-2015 \Leftrightarrow (f(x)-1)^3=x^3+x^2-2015$ (1) (Μον.1)

Αν $h(x)=x^3+x^2-2015$, $x\in\Re$ συνεχής ως πολυωνυμική στο $\Re$ (Μον.1) και $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2-2015)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty<0$ (Μον.2), $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2-2015)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty>0$. (Μον.2) Συνεπώς υπάρχουν $\alpha\in\Re$, κοντά στο $-\infty$ και β κοντά στο $+\infty$ ώστε h(α)<0 και h(β)>0. (Μον.4) Η h ως συνεχής στο[α,β] και h(α) h(β)<0 (Μον.2) από ΘΒ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq\Re$. (Μον.1) Άρα υπάρχει ξ $\in\Re$ ώστε h(ξ)=0 δηλαδή από (1) $(f(\xi)-1)^3=0\Leftrightarrow f(\xi)=1$ (Μον.1)

<u>Θέμα 3^ο</u>

α)

$x^4-7x^3+6x^2+3x=3\Leftrightarrow x^4-7x^3+6x^2+3x-3=0$ (1). (Μον.2) Το 1 είναι ρίζα. (Μον.1) Από Horner $x^4-7x^3+6x^2+3x-3=0 \Leftrightarrow$ (χ-1)(x^3-6x^2+3) =0 (Μον.1)Θέτω h(x)= x^3-6x^2+3.(Μον.2) Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική (Μον.1)και h(0)h(1)=-6<0 (Μον.2)από ΘΒ η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο(0,1) (Μον.1) και συνεπώς η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο(0,1) (Μον.1)

β)

ι) Για κάθε $x_1,x_2\in\Re=Df$ με $x_1<x_2\Rightarrow...f(x_1)<f(x)$ άρα η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται (Μον.2)

ιι) Η f είναι συνεχής στο[-1,0] και f(-1)f(0)=-1<0 και από ΘΒ η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-1,0) αρνητική, δηλαδή υπάρχει ξ αρνητικό ώστε το f(ξ)=0 (Μον.3)

ιιι) Θέτω h(x)= (π-χ). $f^{-1}(x)$ +3χ η h είναι συνεχής στο [0,π] ως πράξεις συνεχών. (Μον.2)

f(ξ)=0$\Leftrightarrow f^{-1}(0)=\xi<0$ (Μον.2) άρα h(0)=π.ξ<0 και h(π)=3π>0 οπότε h(0).h(π)<0 (Μον.3)και από ΘΒ η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο(0,π) άρα και η εξίσωση (π-x). $f^{-1}(x)$ =-3χ έχει τουλάχιστον μία ρίζα θετική και μικρότερη του π. (Μον.2)

<u>Θέμα 4^ο</u>

α)

Θέτω h(χ)= $x^2-\chi\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi$. Η h συνεχής στο [0,π] και h(0).h(π)=$-\pi^2-1$ <0 και από Θβ η h τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π). (Μον.2) Η ρίζα του παρονομαστή της εξίσωσης $\frac{x^2-\chi\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi}{2\chi-\pi}=0$ (1) είναι η χ=$\frac{\pi}{2}$ (Μον.2) και h($\frac{\pi}{2}$)=$\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\neq0$ άρα ο αριθμητής της εξίσωσης έχει ρίζα η οποία δεν είναι ρίζα του παρονομαστή συνεπώς η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π). (Μον.4)

β)

Θέτω h(x)= χ.συν(χ+3)- x^2 +1 η h είναι συνεχής στο [-1,1] (Μον.2) και h(-1)=-συν(2)>0 αφού $\frac{\pi}{2}<2<\pi$ (Μον.2) και h(1)=συν4<0 αφού $\pi<4<3\frac{\pi}{2}$ (Μον.2) άρα από ΘΒ η h άρα και η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-1,1) (Μον.2)

γ)

Για χ$\in$(-1,0) είναι xln(x+1)+ημx=0$\Leftrightarrow$ ln(x+1)+$\frac{\eta\mu x}{x}$=0. (Μον.2) Θέτω h(x)= ln(x+1)+$\frac{\eta\mu x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} ln(x+1)+\frac{\eta\mu x}{x})=-\infty<0$ (Μον.2), $\lim\limits_{x\to 0^-} ln(x+1)+\frac{\eta\mu x}{x})=1>0$,(Μον.2) άρα υπάρχουν α>-1 και κοντά στο -1 με h(α)<0 και β κοντά στο 0 και β<0 με h(β)>0. (Μον.2) Τότε η h είναι συνεχής στο [α,β] ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και h(α)h(β)<0 από ΘΒ η η και συνεπώς η εξίσωση xln(x+1)+ημx=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β)$\subseteq$(-1,0) (Μον.1)