Γ΄ ΤΑΞΗ

Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $|zw| = |z||w|$

Μονάδες 9

Β. *Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης Ι** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης ΙΙ** (δύο αριθμοί στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν).*

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. i^1	**1.** $-i$
Β. i^2	**2.** $+1$
Γ. i^3	**3.** i
Δ. i^4	**4.** -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ,** ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

β. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|=|\bar{z}|=|-z|$.

Μονάδες 2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών εκφράζει, στο μιγαδικό επίπεδο την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

δ. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $|z_1|-|z_2| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

Μονάδες 2

ε. Αν z_1 , z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma = 0$ με α,β,γ μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει: $z_1 = \bar{z_2}$

Μονάδες 2

στ. Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in IN^*$.

τότε ισχύει: f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 1 .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει: $Re(z+\frac{4}{z})=2Re(z)$ σχέση (1)

ι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

Αν $Re(z)\neq 0$

ii) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w= z+\frac{4}{z}$ είναι πραγματικός και ισχύει $-4\le w\le 4$

iii Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών u=z+3+4i

iv) Για το προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο του $|u|$.

v) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 ικανοποιούν την σχέση (1) και δεν είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 2|z_1 + z_2, + z_3|$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύουν $|4z_1 - i| = 2|i + \overline{z_1}|$. και $|4z_2 - i| = 2|i + \overline{z_2}|$, να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι εικόνες των z_1, z_2 και να δείξετε ότι $|z_1 - z_2| \le 1$

Μονάδες 6

Β. Έστω f(z) $= (2 + \frac{3}{2}i)z - \frac{5}{2}\bar{z}.i$, όπου z =χ+ψi, χ,ψ $\in \Re$. α) Να βρεθούν τα Re(f(z)), Im(f(z)) σε συνάρτηση με τα $z, \bar{z}$. β) Να βρείτε το γ.τ. των σημείων M(f(z)) στο μιγαδικό επίπεδο. γ) Να δειχτεί ότι $|f(z)| = |x-2\psi|\sqrt{5}$. δ) Να βρείτε το γ.τ. των εικόνων του z =χ+ψi, για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = \sqrt{5}$.

Μονάδες 19(5,5,5,4)

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z+i|^2 = 2 + 2Im(z)$

i) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του z

ii) Να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο το $|z+4i|$ γίνεται α) ελάχιστο β) μέγιστο iii) Αν είναι w=3z+8i α) να αποδείξετε ότι ο w κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε την ακτίνα και το κέντρο του β) δείξτε ότι το ελάχιστο του $|w-z|$ είναι 6 και το μέγιστο 10

Μονάδες 12

Γ΄ ΤΑΞΗ

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\sqrt{3}+i$ και $z_2=1-\sqrt{3}i$ Α) να αποδείξετε ότι: i) $\frac{z_1}{z_2}=i$ (Μον. 3) ii) $\frac{\alpha z_1-z_2}{z_1+\alpha z_2}=i$, $a\in\Re$ (Mon.4) iii) $z_1^{2014}+z_2^{2014}=0$ (Mon.6)

Β) i) Αν $z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=0$, δείξτε ότι: ν=4κ+2, με κ,ν φυσικούς (Μον.6) ii) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των z_1, z_2 δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Όπου Ο(0,0) (Μον.4) iii) Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z|=3$, να δείξετε ότι: $\frac{1}{5}\le\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|\le 5$

(Μον. 1,2,3,3,2,2)

Καλή επιτυχία

Πάντα διαβάζουμε την εκφώνηση τόσες φορές ώστε να αισθανόμαστε ότι έχουμε ξεχωρίσει τα δεδομένα και τα ζητούμενα.

Ξεκινάμε από αυτά που ξέρουμε.

Αν κάπου κάτι πάει στραβά

α) διαβάζουμε και το άλλο ερώτημα και ενδεχόμενα να προχωρήσουμε στη λύση του επόμενου ερωτήματος και μετά να επανέλθουμε στο ερώτημα που μας δυσκόλεψε β) γράφουμε ότι ξέρουμε σχετικά με τα δεδομένα της άσκησης.

Τσέκαρε στα θέματα ποια έχεις λύσει.

Ποτέ δεν ξέρεις ποιο είναι το δύσκολο θέμα.

Αν δεν έχεις τσαμπουκά ….. μη γίνεσαι κότα