Προαγωγικές εξετάσεις Β Λυκείου
Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1. (Μονάδες 15+10) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2 \ (\rho>0)$ στο σημείο $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ της περιφέρειάς του, έχει εξίσωση $x\cdot x_1+y\cdot y_1=\rho^2$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1) Η ευθεία $2x=y$ διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$
2) Αν $\mathrm{A}(2,1)$ και $\mathrm{B}(2,-3)$ τότε $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,-4)$
3) Η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}=(2,-4)$ στον άξονα $x'x$ είναι το διάνυσμα $\vec{\beta}=(2,0)$
4) Η εξίσωση $(x+y)^2+(x-y)^2-3=0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων
5) Αν $A(-2,5)$ και $B(4,3)$ το μέσον του τμήματος AB είναι το σημείο $M(2,8)$

ΘΕΜΑ 2ο (Μονάδες 10+7+8) Δίνεται η εξίσωση: $x^2-y^2+2y-1=0 \ (1)$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : y=x+1 \text{ και } \varepsilon_2 : y=-x+1$$

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι ευθείες που παριστάνει η (1) τέμνουν τους άξονες.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 3. (Μονάδες 7+8+10) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν

$$|\vec{\alpha}|=6 \ , \ |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=4 \text{ και } \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-14$$

Α) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\beta}$

Β) Να δείξετε ότι, αν διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ είναι κάθετα, τότε $\lambda=\dfrac{11}{25}$

Γ) Να αποδείξετε ότι προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ είναι το διάνυσμα $-\dfrac{7}{18}\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 4.(Μονάδες 10+5+10) Δίνονται οι εξισώσεις

$$(\lambda x)^2+y^2=\lambda^2 \text{ και } \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}=1 \text{ όπου } \lambda>1$$

Α) Να αποδείξετε ότι η πρώτη παριστάνει έλλειψη της οποίας να βρείτε την εστιακή απόσταση $(\mathrm{E'E})$ και η δεύτερη κύκλο του οποίου να βρείτε την ακτίνα ρ

Β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς μ,ν ισχύουν, $\mu^2=\dfrac{1}{\lambda^2-1}$ και $\nu^2=\dfrac{\lambda^2(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}$

Τότε να δείξετε ότι το σημείο $\mathrm{M}(\mu,\nu)$ είναι **κοινό** σημείο της έλλειψης και του κύκλου.

Γ) Έστω $\mathrm{E'}$, E οι εστίες της έλλειψης και M ένα **κοινό** σημείο τις έλλειψης και του κύκλου. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{E'}$, E και M είναι ορθογώνιο, έχει περίμετρο $2\lambda+2\sqrt{\lambda^2-1}$ και εμβαδόν $(\mathrm{E'EM})=1$