

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ – ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ 2013-14**

**ΘΕΜΑ 1°**

**A.1.** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Μονάδες 8,5

**A.2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο ( $=, \leq, \geq$ ) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α.  $P(A') \dots 1 - P(A)$

Μονάδες 2

β. αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B) \dots P(A)$

Μονάδες 2

**B.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

α. Αν  $A' \subseteq B$  τότε  $P(A) + P(B) < 1$ .

β. Αν  $P(A) = P(A')$  τότε  $2P(A) = P(\Omega)$ .

Μονάδες 4

**B.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $A \subseteq B$ ,  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(B) = \frac{5}{12}$  τότε η  $P(A \cup B)$  είναι ίση με:

α.  $\frac{1}{4}$       β.  $\frac{5}{12}$       γ.  $\frac{2}{3}$       δ.  $\frac{1}{6}$

Μονάδες 2,5

**B.3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης A** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης B**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$

Στήλη A	Στήλη B
α. $P(A-B)$	1. $\frac{1}{20}$
β. $P((B-A)')$	2. $\frac{2}{15}$
γ. $P((A \cap B)')$	3. $\frac{4}{5}$
	4. $\frac{1}{12}$
	5. $\frac{19}{20}$

Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ 2°

Έστω  $v$  ο αριθμός των εργατών που μπορούν να απασχοληθούν σε μια βιοτεχνία και  $x$  οι μονάδες ημερήσιας παραγωγής του προϊόντος της βιοτεχνίας αυτής.

Έχει παρατηρηθεί ότι όταν οι μονάδες του παραγόμενου προϊόντος είναι περισσότερες από 24 τότε το κόστος της ημερήσιας παραγωγής των  $x$  μονάδων του προϊόντος αυτού είναι:  $K(x) = x^3 - 6vx^2 + 32v^3 - v^2 + 18v$  €. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι  $1 + 6 \cdot \frac{\ln(4v-24)}{v} - \ln(v-6)$  €.

α) Να βρείτε πόση πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή σε σχέση με το πλήθος  $v$  των εργατών έτσι ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος παραγωγής το οποίο συμβολίζουμε με  $M(v)$ .

Μονάδες 3

β) Όταν έχουμε ελάχιστο κόστος παραγωγής να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες ώστε να έχουμε μέγιστο κέρδος.

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε τον αριθμό των εργατών που πρέπει να απασχολούνται στη βιοτεχνία έτσι ώστε το ελάχιστο κόστος παραγωγής  $M(v)$  να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 6

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $M(v)$ , όταν  $v = 10$ .

Μονάδες 4

Β. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x - 2$ , με  $x$  πραγματικό αριθμό και  $\alpha$  θετικό ακέραιο.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .

β. Αν η παράμετρος  $\alpha$  παίρνει τις τιμές που προκύπτουν από τη ρίψη ενός ζαριού και θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα :

A: Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B: Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη στον  $x'x$ .

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cup B)$ .

Μονάδες 4+4=8

## ΘΕΜΑ 3°

I. Οι απουσίες που έχει ο κάθε μαθητής της Γ' τάξης ενός Λυκείου είναι από 20 έως και 80.

Υπάρχουν 35 μαθητές με απουσίες από 20 έως και 50.

Επιλέγουμε στην τύχη έναν από τους παραπάνω μαθητές και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: Ο μαθητής έχει απουσίες από 20 έως και 50.

B: Ο μαθητής έχει πάνω από 30 απουσίες.

Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι 0,5 και η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να έχει απουσίες από 30 έως και 50 είναι 0,3 να υπολογίσετε:

α. Το πλήθος των μαθητών της Γ' τάξης αυτού του Λυκείου.

β. Την πιθανότητα του ενδεχομένου B.

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A - B$ .

Μονάδες 12

δ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου  $B - A$ .

Μονάδες 3

II) Ομαδοποιήσαμε τις  $n$  παρατηρήσεις ενός δείγματος σε 5 κλάσεις πλάτους  $c$ . Το πολύγωνο συχνοτήτων δημιουργείται από τις ευθείες  $\varepsilon_1: \psi = \chi - \frac{3}{2}$  και  $\varepsilon_2: \psi = -\chi + \frac{15}{2}$ . i) Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών. ii) Αν το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι  $A(\frac{9}{2}, 3)$  α) να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος  $n$ . β) Αν  $n=9$  να βρεθούν τα όρια των κλάσεων και οι συχνότητες των κλάσεων και να υπολογιστεί η διάμεσος.

Μονάδες 10

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

A. Σε ένα pet-shop υπάρχουν λιγότερα από 50 γατάκια. Επιλέγοντας τυχαία ένα γατάκι η πιθανότητα να είναι αρσενικό μαύρο είναι 30%, ενώ η πιθανότητα να είναι άσπρο είναι  $\frac{1}{3}$ . i) Ποια η πιθανότητα να είναι μαύρο θηλυκό ii) πόσα είναι συνολικά τα γατάκια.

Μονάδες 10

B. Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  και  $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$  παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  με διάμεσο  $\bar{x} = \frac{1}{4}$ . Δίνεται επίσης ότι η μέση τιμή των  $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B), P(B-A), P(A-B)$  είναι  $\bar{x} = \frac{1}{5}$ . Υπολογίστε τις πιθανότητες  $P(A \cap B), P(A \cup B)$

Μονάδες 10

Γ) Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  του δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν  $A \subseteq B, P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{12}$  και  $P(B) - P(A') = \frac{1}{3}$ . Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cap B$  και  $A \cup B$ .

Μονάδες 5

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ