ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄

1. Δώστε τον ορισμό του συνόλου των μιγαδικών
2. Έστω μιγαδικοί αριθμοί z, w. Να γράψετε τι ονομάζουμε εικόνα τον z.
3. Δώστε τον ορισμό του συνόλου των φανταστικών
4. Τι λέγεται πραγματικό και τι φανταστικό μέρος μιγαδικού
5. Δώστε την γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος και της διαφοράς μιγαδικών. Δείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών είναι ίσο με το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους όμοια για την διαφορά
6. Πότε δυο μιγαδικοί είναι ίσοι
7. Τι λέγεται συζυγής μιγαδικού
8. Δείξτε ότι: $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$ και ότι: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
9. Να υπολογίσετε το i^{ν} με $\nu\in\mathbb{N}$
10. Αποδείξτε ότι α), $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$, β) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ γ) $\overline{z^{\nu}}=(\overline{z})^{\nu}$ δ) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$ ε) $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}z.i$
11. Δείξτε ότι: α) $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$ β) $|z^2|=z.\overline{z}$
12. Δείξτε ότι: α) $\frac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, β) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ γ) $|z^{\nu}|=|z|^{\nu}$
13. Δείξτε ότι: $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ Δείξτε ότι η απόσταση των εικόνων δυο μιγαδικών z_1,z_2 είναι $|z_1\text{-}z_2|$
14. Γράψτε με τη βοήθεια του μέτρου μιγαδικού το γ.τ . α)κύκλου β)έλλειψης γ)υπερβολής
15. Έστω μιγαδικοί αριθμοί z,w. Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τους αριθμούς : |z|+|w|, |z|-|w|, |z-w|
16. Έστω μιγαδικοί αριθμοί z,w. Να αποδείξετε ότι: α. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, β. $\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$
17. Έστω μιγαδικοί αριθμοί z ,w. Να γράφετε τι ονομάζουμε i) διανυσματική ακτίνα του z ιι) μέτρο του z.
18. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1,z_2,z_3, ισχύουν: i) $|z|^2=z\overline{z}$, ii) $|z_1z_2|=|z_1|.|z_2|$
19. Δίνεται η εξίσωση: αz^2 + βz + γ = 0 (1), με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$, $\alpha\neq 0$ και $z\in C$. Να λυθεί η (1) στο σύνολο C των μιγαδικών.
20. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α και Δ ένα διάστημα με $\Delta\subseteq A$. Να γράφετε τι ονομάζουμε: α) σύνολο τιμών της f, β) σύνολο τιμών της f στο Δ.
21. Έστω συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού Α και Β αντίστοιχα. Να γράψετε πότε λέμε ότι οι f, g είναι ίσες;.
22. Έστω συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού Α και Β αντίστοιχα. Να δώσετε τον ορισμό της σύνθεσης της f με την g.
23. Τι λέγεται γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) στο Δ συνάρτηση; Τι λέγεται γνησίως μονότονη συνάρτηση
24. Πως ορίζονται οι πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων
25. Τι λέγεται ολικό ελάχιστο και τι ολικό μέγιστο συνάρτησης
26. Πότε μία συνάρτηση είναι «1-1» Ποια τα κριτήρια για να είναι 1-1
27. Δείξτε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε είναι 1-1 στο Δ
28. Τι λέγεται αντίστροφη συνάρτησης και πότε υπάρχει
29. Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ψ=χ
30. Δείξτε ότι f^{-1}(f(x))=x και ότι f($f^{-1}(x))=x$ και εξετάστε αν είναι ίσες
31. Πότε είναι καλά ορισμένο το $\lim_{x\to x_0}f(x)$
32. Τι προκύπτει αν $\lim_{x\to x_0}f(x)$>0 και τι αν $\lim_{x\to x_0}f(x)$<0
33. Τι προκύπτει αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}f(x)$ και f(χ)>0

34. Δώστε την έννοια του ορίου
35. Γραφική παράσταση της –f, $|f(x)|$
36. Δείξτε ότι αν P(χ) πολυωνυμική τότε $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
37. Δείξτε ότι αν P(χ), Q(x) πολυωνυμικές τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
38. Διατυπώστε το κριτήριο παρεμβολής
39. Ποιο το όριο σύνθετης συνάρτησης
40. Ποια τα όρια εκθετικής λογαριθμικής
41. Τι λέγεται ακολουθία
42. Ποιες συναρτήσεις είναι συνεχείς
43. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Bolzano.
44. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα διατήρησης πρόσημου
45. Διατυπώστε το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής.
46. Αν η f είναι συνεχής στο Δ = [α,β] με f(α) $\neq$ f(β), να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α),f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$ (α,β), τέτοιο ώστε f(ξ)=η
47. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε x εσωτερικό του Δ. ισχύει, f΄(χ)> 0, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
48. Αν οι f ,g είναι συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα Δ, με : $f'(x) = g'(x)$, για κάθε χ εσωτερικό του Δ , να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε : f (x) = g(x)+C, για κάθε χ $\in$ Δ.
49. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Α και $\chi_0 \in$ A . α. Να γράψετε πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο χ_0. β. Να γράψετε πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0. γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο χ_o.
50. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ = [α, β]. Να γράψετε: α) Πότε η f είναι συνεχής στο [α, β]. β) Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β].
51. Αν η f είναι συνεχής στο Δ με f΄(χ)=0, για κάθε χ εσωτερικό του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.
52. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα (α, β) και $\chi_0 \in$ (α,β) **α.** Να γράψετε πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο χ_o. **β.** Να γράψετε ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της f στο (α,β).
53. Αν f(x) = $x^{-\nu}$, χ $\neq$ 0 και ν $\in$ N* με ν>1, να αποδείξετε ότι: f'(χ)=-ν$\chi^{\nu-1}$, για κάθε χ $\neq$ 0.
54. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. και $x_0 \in$ A. Να γράψετε α) πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. β) ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων της f σε ένα διάστημα, Δ $\subseteq$ A.
55. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, εσωτερικό διαστήματος Δ, με Δ $\subseteq$ Α και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ_0 , να αποδείξετε ότι: f '(χ_0) = 0
56. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ να γράψετε : τι ονομάζουμε παράγουσα της f στο Δ.
57. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση G της μορφής: G(x)= F(x) + c, όπου c είναι μια σταθερά, είναι, παράγουσα της f και αντίστροφα.
58. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\chi_0 \in$ Δ, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και (f + g)΄(χ_0) = f'(χ_0) + g'(χ_0)
59. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α και [α,β] υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της. Να γράψετε πότε λέμε ότι: α) η f είναι παραγωγίσιμη β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) γ) η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β].
60. Αν f(x) = α^x , με α > 0 και α $\neq 1$, να αποδείξετε ότι: f΄(x) = α^xlnα
61. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α και $\chi_0 \in$ A α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 **β.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της f, στο χ_0.
62. α. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής. β. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία τον θεωρήματος Μέσης Τιμής.
63. Τι λέγεται συνάρτηση και τι γραφική παράσταση συνάρτησης
64. Δώστε τις γραφικές παραστάσεις των f(x)=lnx, g(x)=e^x, h(x)=$\sqrt{|x|}$, k(x)=$\frac{\alpha}{x}$, l(x)=ax^2 ,

m(x)= ax^3, n(x)=ημχ,συνχ,εφχ

65. Τι λέγεται εφαπτόμενη γραφικής παράστασης συνάρτησης f σε σημείο της που είναι παραγωγίσιμη και ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής;
66. Τι λέγεται μέση ταχύτητα και τι στιγμιαία ταχύτητα κινητού
67. Τι λέγεται παράγωγος συνάρτηση (πρώτη) Τι λέγεται δεύτερη παράγωγος; Τι ν-οστη παράγωγος
68. Να βρείτε τις παραγώγους των c, x, $\sqrt{x}$, ημχ, συνχ
69. Να βρείτε την παράγωγο της f(x)=x^{ν} αν i)ν∈N-{0,1} ιι)ν∈R-Z
70. Δείξτε ότι (cf(χ))΄=cf΄(χ)
71. Να βρείτε τις παραγώγους των εφχ, σφχ, ,ln$|x|$
72. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης
73. Τι λέγεται ρυθμός μεταβολής του ψ ως προς χ στο x_0
74. Τι λέγεται οριακό κόστος και τι οριακό κέρδος
75. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle και μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού
76. Τι λέγεται τοπικό μέγιστο της f και τι τοπικό ελάχιστο;
77. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία συνάρτησης και ποια πιθανά ακρότατα
78. Πότε μία συνάρτηση λέγεται κυρτή και πότε κοίλη;
79. Τι λέγεται σημείο καμπής. Ποια είναι τα πιθανά σημεία καμπής
80. Τι λέγεται κατακόρυφη, οριζόντια , πλάγια ασύμπτωτη
81. Διατυπώστε τον κανόνα l'Hospital
82. Τι λέγεται αρχική ή παράγουσα της συνάρτησης f στο Δ
83. Αν f συνάρτηση ορισμένη στο Δ και F μια παράγουσα της στο Δ δείξτε: α)όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c είναι παράγουσες της f στο Δ β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c
84. Τι λέγεται εμβαδό χωρίου από γραφική παράσταση συνεχούς, χ΄χ, χ=α και χ=β
85. Τι λέγεται α) $\int_a^{\beta} f(x)dx$ β) $\int_a^{x} f(x)dx$
86. Ποιες ιδιότητες έχει το ορισμένο ολοκλήρωμα
87. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού
88. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής i) Αν f΄(χ)>0 στο (α, χ_0), και f΄(χ)<0 στο (χ_0, β), τότε το f(χ_0) είναι τοπικό μέγιστο της f ii) Αν f΄(χ)<0 στο (α, χ_0) και f΄(χ)>0 στο (χ_0, β), τότε το f(χ_0) είναι τοπικό ελάχιστο της f iii) Αν η f΄(χ) διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το f($\chi_0$) δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).
89. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος. Αν *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα *Δ* και *α* είναι ένα σημείο του *Δ*, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, για κάθε $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*. Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
90. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β] α. Να γράψετε, με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος, μια παράγουσα F της f, στο [α, β], τέτοια ώστε: F (α) = 0. β. Να γράψετε, με τη βοήθεια τον ορισμένου ολοκληρώματος, τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού χωρίου που περικλείεται από: τη C_f τον άξονα χ' χ , την ευθεία χ = α και την χ = β.
91. <u>Εκτός ύλης</u>. Αν f(χ) = ημχ , να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f (χ) = συνχ.
92. (Εκτός ύλης) τι λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ και ποιες οι ιδιότητές του

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\Re$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο: • Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\Re$,

με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,• Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο, ώστε $i^2=-1$, • Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\Re$

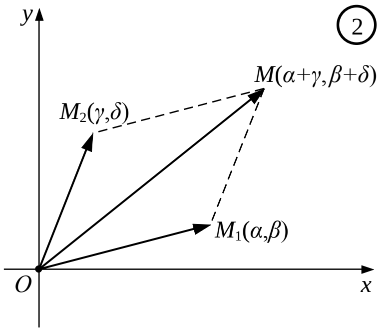
2. Έστω ο μιγαδικός z=χ+yi, με x,y$\in$R. Το αντίστοιχο σημείο M(x,ψ) , ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, με τετμημένη x=Re(z) και τεταγμένη y=Im(z), ονομάζουμε εικόνα του μιγαδικού z.
3. I={x/x=βi, με β$\in\Re$}
4. Αν z=α+βi με α,β πραγματικούς τότε ο α λέγεται πραγματικό μέρος του z και σημειώνεται $\mathbf{Re}(z)$, ενώ ο β λέγεται φανταστικό μέρος του z και σημειώνεται $\mathbf{Im}(z)$.
5. Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε: $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$. Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε: $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$.Δηλαδή $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i}$.

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



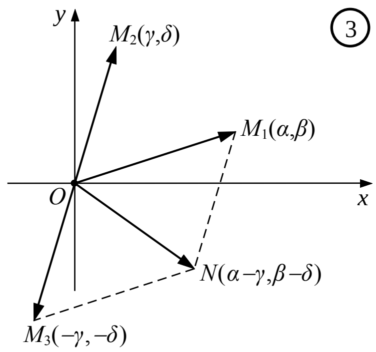
“**Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”.**

Επίσης, η διαφορά

$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



“**Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”.**

6. Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha+\beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i\Leftrightarrow\alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.}$$

7. Ο αριθμός $\alpha-\beta i$ λέγεται συζυγής του $\alpha+\beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{\alpha+\beta i}$. Δηλαδή, $\boldsymbol{\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i}$.

Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται συζυγείς μιγαδικοί

8. Θέτω z=χ+ψi και πράξεις
9. για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4,

   οπότε έχουμε: $i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 & , \text{ αν } \upsilon=0\\ i & , \text{ αν } \upsilon=1\\ -1 & , \text{ αν } \upsilon=2\\ -i & , \text{ αν } \upsilon=3\end{cases}$

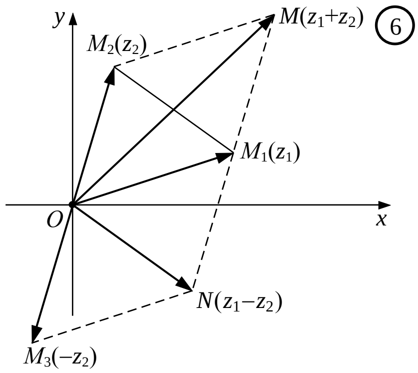
10. α) $\overline{z_1-z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i}$ $=(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)i=(\alpha-\beta i)-(\gamma-\delta i)=\overline{z}_1-\overline{z}_2$. β) πράξεις όμοια

    γ)Ισχύει $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\ldots\cdot\bar{z}_\nu$. αν είναι $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=z$, τότε η ισότητα γίνεται: $\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu$ δ) Αν z=χ+ψi τότε $z+\overline{z}=$ χ+ψi+x-ψi=2x=2 $\mathrm{Re}(z)$, ε) Αν z=χ+ψi τότε $z+\overline{z}=$ χ+ψi-x+ψi=2ψi=2 $\mathrm{Im}(z)i$

11. Πράξεις με z=χ+ψi
12. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\Leftrightarrow|z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2\Leftrightarrow(z_1\cdot z_2)\overline{(z_1\cdot z_2)}=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2$

    $\Leftrightarrow z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2$και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

    Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα. γ) $|z_1z_2\ldots z_\nu|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_\nu|$αν $z_1=z_2=z_\nu$ τότε$|z^\nu|=|z|^\nu$



13. Από τη τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος z_1+z_2 και της διαφοράς z_1-z_2 δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

    $\boxed{\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|}$

    Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως:

    “Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”.

    Δηλαδή:$\boxed{(M_1M_2)=|z_1-z_2|}$

14. η εξίσωση$|z-z_0|=\rho,\quad \rho>0$ παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ. Η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$. Η εξίσωση $|z-\gamma|+|z+\gamma|=2\alpha$ έλλειψη αν γ<α Η εξίσωση $|z-\gamma|-|z+\gamma|=2\alpha$ κλάδο υπερβολής αν γ>α
15. Για τους αριθμούς: | z|+| w |,| z|-| w |, | z - w |, ισχύει: ||z|-|w||$\leq$|z-w|$\leq$|z|+|w|
16. Έστω z=α+βi και w=γ+δι. Έχουμε: α. $\overline{\mathrm{z}+\mathrm{w}}=\overline{(\alpha+\beta \mathrm{i})+(\gamma+\delta \mathrm{i})}=\overline{\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\iota}$ =α+γ-(β+δ)i=α-βi+γ-δi= $\overline{\mathrm{z}}+\overline{\mathrm{w}}$. β. $\overline{\mathrm{z.w}}=\overline{(\alpha+\beta\mathrm{i})(\gamma+\delta\mathrm{i})}=\overline{(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)\mathrm{i}}$ =(αγ-βδ)-(αδ+βγ)i=(αγ-βγί)-(βδ+αδί) = γ(α-βί)-(α-βi)δi=(α-βi)(γ-δί)=$\overline{\mathrm{z}}.\overline{\mathrm{w}}$
17. Έστω z=x+yi, με x,y$\in$R και M(x,y) η αντίστοιχη εικόνα τον z. i) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ονομάζεται διανυσματική ακτίνα του z. ιι) Μέτρο του μιγαδικού z, ονομάζουμε την απόσταση της εικόνας

του M(z) από την αρχή των αξόνων και το συμβολίζουμε με | z | Είναι δηλαδή: $|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{\chi^2+\psi^2}$

18. α) Έστω z=χ+yi.Τότε είναι $\bar{z}$ = χ-ψi, οπότε έχουμε: $z.\bar{z}$ = (χ+ψi)(x-ψi)=χ^2-$(\psi i)^2$ =χ^2-$\psi^2 i^2$ =x^2-ψ^2(-1)=x^2+ψ^2=$|z|^2$. β) Έχουμε: $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2| \Leftrightarrow$ $|z_1z_2|^2=(|z_1|.|z_2|)^2$ $\Leftrightarrow$ $(z_1.z_2)(\overline{z_1z_2})=|z_1|^2|z_2|^2 \Leftrightarrow$ $z_1.z_2.\bar{z_1}.\bar{z_2}=z_1.\bar{z_1}z_2.\bar{z_2}$

19. Έχουμε: αz^2+βz+γ=0 ⇔ αz^2+βz=-γ ⇔ $z^2+\frac{\beta}{\alpha}z=-\frac{\gamma}{\alpha}$ ⇔ $z^2+2.\frac{\beta}{2\alpha}z+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ ⇔ $(z+\frac{\beta}{2\alpha})^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \Leftrightarrow (z+\frac{\beta}{2\alpha})^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ Όπου Δ = β^2 -4αγ διακρίνουσα της (1). Για τη λύση της (2) και συνεπώς και της (1) διακρίνουμε τις περιπτώσεις: α) Αν είναι Δ>0, τότε η (2) έχει δύο (άνισες) πραγματικές ρίζες: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ β) Αν είναι Δ=0, τότε η (2) έχει μία (διπλή) πραγματική ρίζα: $z_0=\frac{-\beta}{2\alpha}$ γ) Αν είναι Δ<0, τότε η (2) γίνεται: $(z+\frac{\beta}{2\alpha})^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \Leftrightarrow (z+\frac{\beta}{2\alpha})^2=\frac{i^2(-\Delta)}{4\alpha^2} \Leftrightarrow (z+\frac{\beta}{2\alpha})^2=\frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{4\alpha^2} \Leftrightarrow z+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ Άρα για Δ<0 η (1) έχει δύο μιγαδικές ρίζες που είναι συζυγείς

20. α) Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού A ⊆ R, ονομάζουμε το σύνολο: f(A)={f(x)/χ ∈ A}. β) Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f στο Δ με Δ ⊆ D_f, ονομάζουμε το σύνολο:f(A) ={f(χ)/χ ∈ Δ }.

21. Δυο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα είναι ίσες, όταν ισχύουν: α) A=B και β) **f** (x)=g(x), για κάθε χ ∈ A.

22. Έστω f, g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα. Ονομάζουμε σύνθεση της f με την g μια (νέα) συνάρτηση, που τη συμβολίζουμε με g ∘ f, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο: $D_{g_0 f}$ = { x ∈ A / f(x) ∈ B} και τύπο: (g∘f)(x) = g(f(x)) για κάθε x ∈ $D_{g_0 f}$.

23. Μια συνάρτηση *f* λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο *Δ*, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$. Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

24. Ορίζουμε ως f+g, f-g,f.g, $\frac{f}{g}$ τις συναρτήσεις με τύπους (f+g)(χ)=f(x)+g(x), (f-g)(x)=f(x)-g(x),(f.g)(x)=f(x)g(x),$(\frac{f}{g})$(x)=$\frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδία ορισμού των τριών πρώτων το $A\cap B$, ενώ της τέταρτης το $A\cap B$-{χ/χ ρίζες του παρονομαστή που είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της g) Τα A, B είναι τα πεδία ορισμού της f, g αντίστοιχα

25. Η συνάρτηση f λέμε ότι στο χ_0 ∈A (πεδίο ορισμού της f)παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(\chi_0)$όταν f(x)≤ $f(\chi_0)$ για κάθε χ∈A. Η συνάρτηση f λέμε ότι στο χ_0 ∈A (πεδίο ορισμού της f)παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\chi_0)$όταν f(x)≥ $f(\chi_0)$ για κάθε χ∈A

26. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται 1-1 όταν για κάθε $x_1,x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$προκύπτει $f(x_1)\neq f(x_2)$ Κριτήρια: 1) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι 1-1 όταν για κάθε $x_1,x_2 \in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$ προκύπτει $x_1=x_2$ 2) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι 1-1 όταν η εξίσωση ψ=f(χ) έχει μοναδική λύση ως προς χ για κάθε ψ του συνόλου τιμών 3) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι 1-1 όταν είναι γνησίως μονότονη 4)κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση σε ένα το πού σημείο

27. Για κάθε $x_1,x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ έστω $x_1<x_2$ τότε $f(x_1)<f(x_2)$ δηλαδή $f(x_1)\neq f(x_2)$. Άρα η f είναι 1-1

28. Έστω 1-1 συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, τότε σε κάθε στοιχείο ψ του συνόλου

τιμών υπάρχει μοναδικό χ του πεδίου ορισμού της f για το οποίο ισχύει f(χ)=ψ. Έτσι ορίζεται μια νέα συνάρτηση που συμβολίζουμε νε $f^{-1}(x)$ με την οποία σε κάθε ψ του συνόλου τιμών της f αντιστοιχίζεται μοναδικό χ του πεδίου ορισμού της f Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f και ισχύει f(χ)=ψ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\psi)$ =χ Η αντίστροφη υπάρχει αν και μόνον αν η f είναι 1-1

29. Επειδή f(χ)=ψ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\psi)$ =χ ένα σημείο (α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε το σημείο (β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} και αντιστρίφως. Τα σημεία (α,β), (β,α) είναι συμμετρικά ως προς την ψ=χ διχοτόμο της γωνίας πρώτου τρίτου τεταρτημορίου άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ψ=χ

30. ισχύει f(χ)=ψ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\psi)$ =χ άρα $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε χ $\in$ Α και $f(f^{-1}(\psi))=\psi$ για κάθε ψ $\in$ f(A) για ψ το χ, $f(f^{-1}(x))=x$ Δεν είναι ίσες γιατί έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού

31. Όταν υπάρχουν τιμές του πεδίου ορισμού κοντά στο χ_0

32. f(x)>0 και f(x)<0 αντίστοιχα κοντά στο χ_0

33. $\lim\limits_{x\to\chi_0} f(x)\ge 0$

34. Οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό l καθώς το χ προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό χ_0 γράφουμε $\lim\limits_{x\to\chi_0} f(x)=l$

35. Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

36. $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\Re$. $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)$ $=\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_0$ $=\alpha_\nu\lim\limits_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim\limits_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_0$ $=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0)$.Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

37. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in\Re$ με $Q(x_0)\ne 0$. Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\ne 0$

38. Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$,τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$

39. Το $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0, 1. Θέτουμε $u=g(x)$ .2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ και 3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$.Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\ne u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει: $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)}$.

40. Αν $\alpha>1$, τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0$ $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$ $\lim_{x\to0}\log_\alpha x=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$

Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=0$ $\lim_{x\to0}\log_\alpha x=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$

41. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha:N^*\to R$

42. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0\in R$ ισχύει

$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

— Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

— Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0\in R$ ισχύει

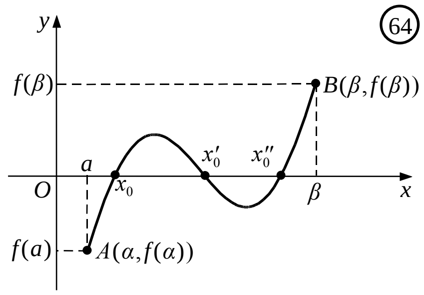
$\lim_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$ και $\lim_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$.

— **Οι** συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log x$, $0<\alpha\neq1$ **είναι συνεχείς**

Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in R$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.



43. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης *f* στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της *f* τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο

44. Αν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ* και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, γιατί αν άλλαζε πρόσημο στα α,β από θεώρημα Bolzano στο [α,β] θα είχε ρίζα άτοπο

45. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m

46. Έστω ότι είναι f(α) < f(β). Τότε έχουμε: f(α)<η<f(β), οπότε αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση: h(χ)=f(χ)-η, αυτή είναι συνεχής στο [α,β] με h(α)=f(α)-η<0 και h(β)=f(β)-η>0. Άρα είναι h(α).h(β)<0 οπότε (θεώρημα Bolzano) υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε: h(ξ)=0. Επομένως είναι: f(ξ)-η=0. Άρα f(ξ)=η.

47. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $\chi_1<\chi_2$ Θα αποδείξουμε ότι $f(\chi_1)<f(\chi_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[\chi_1,\chi_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις τον Θ.Μ,Τ. Επομένως υπάρχει ξ ∈ (χ_1,χ_2) τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)$. Όμως είναι f΄(ξ)>0 και $x_2-x_1>0$, οπότε $(\chi_2-\chi_1)f'(\xi)>0$ και επομένως έχουμε: $f(x_2)-f(x_1)>0$, ισοδύναμα: $f(x_1)<f(x_2)$·

48. Θεωρούμε τη συνάρτηση f -g, η οποία είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο χ ∈ Δ ισχύει: (f-g)'(x) = f'(x)-g'(x) = 0, Δηλαδή για κάθε εσωτερικό σημείο χ∈Δ, είναι (f-g)'=0. Επομένως, η συνάρτηση f-g είναι σταθερή στο Δ. Αρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για

κάθε $\chi \in \Delta$, να ισχύει f(χ)-g(χ)=c. Οπότε, f(x)=g(x)+c, για κάθε $x \in A$.

49. **α.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, όταν: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. **β.** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **γ.** Για $x \in D_f$, με $x \neq x_0$, έχουμε: $f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.(x-x_0)$ όμως $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0}$ [χ-χ_0]=0 οπότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.(x-x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$ =f΄(x_0).0=0 Επομένως $\lim_{x\to x_0}$ [f(x)-f(χ_0)]=0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}$ f(x)= f(χ_0) Άρα η f είναι συνεχής στο χ_0.

50. **α)** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] , όταν: είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (α,β), δηλαδή όταν για κάθε $\chi_o \in$ (α,β) ισχύει: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ και ακόμα είναι: $\lim_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$ **β)** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κλειστό διάστημα [α,β] , όταν: Είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), δηλαδή όταν για κάθε χο $\in$(α,β) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και ακόμα είναι πραγματικοί αριθμοί τα πλευρικά όρια : $\lim_{x\to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ και $\lim_{x\to \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$

51. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $\chi_1,\chi_2 \in \Delta$ ισχύει:f(χ_1) = f(χ_2) Έστω $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$. Αν $x_1 = \chi_2$, τότε προφανώς f(x_1)=f(χ_2)· Αν $x_1 < \chi_2$, τότε στο διάστημα [χ_1, χ_2] η f ικανοποιεί τις υποθέσεις τον ΘΜ.Τ. Επομένως υπάρχει ξ $\in$ (χ_1 , χ_2) τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει f΄(ξ) = 0, οπότε, λόγω της (1) είναι f (χ_2) - f (x_1) = 0. Άρα f(χ_2) = f(χ_1). Αν είναι $\chi_1 > \chi_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι f(χ_2)=f(χ_1). Επομένως για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in$ A είναι f(χ_1) = f(χ_2). Οπότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

52. **α.** Η συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα (α,β), παρουσιάζει καμπή στο $\chi_0 \in$(α,β), όταν: ι) η f είναι κυρτή στο (α,χ_o) και κοίλη στο (χ_o,β) ή αντίστροφα, και ιι) υπάρχει εφαπτομένη ευθεία της f στο χ_o. **β.** Πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f, σε ένα διάστημα Δ , είναι: α) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f΄΄ μηδενίζεται, και β) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f΄΄ .

53. Για κάθε $\chi \in$ R* έχουμε $(x^{-\nu})' = (\frac{1}{\chi^\nu})' = \frac{(1)'\chi^\nu - 1.(\chi^\nu)}{(\chi^\nu)^2} = \frac{0.\chi^\nu - \nu.\chi^{\nu-1}}{\chi^{2\nu}} = \frac{-\nu\chi^{\nu-1}}{\chi^{2\nu}} = -\nu\chi^{-\nu-1} = -\frac{\nu}{\chi^{\nu+1}}$

54. α) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\chi_o \in$ A, όταν υπάρχει δ > 0 τέτοιο, ώστε : f(x)$\leq$ f(x_0), για κάθε $\chi \in$(χ-δ,χ+δ)$\cap$A. β) Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα A. Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων της f στο A είναι: 1. τα άκρα του A, όταν η f ορίζεται σε αυτά. 2.τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f΄ μηδενίζεται 3.τα εσωτερικά σημεία του A στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

55. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο χ_o τοπικό μέγιστο . Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε για κάθε χ $\in$ (χ_0-δ,χ_o+δ), να ισχύει: (χ_0-δ , χ_0+δ) $\subseteq \Delta$ και f(x)$\leq$ f(x_o) (1) Ακόμα η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_o, οπότε ισχύει: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_{0^-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_{0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Επομένως για κάθε χ $\in$(χ_o - δ ,χ_0), λόγω της (1) είναι: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ οπότε: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_{0^-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (2) όμοια, για κάθε $x \in$ (x_o ,x_o+δ), λόγω της (1) είναι: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ οπότε: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_{0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ (3) Έτσι από τις (2) και (3)

έχουμε: $f'(x_o) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

56. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in A$.

57. Η συνάρτηση F είναι παράγουσα της f στο Δ, άρα $F'(x)=f(x)$. Έστω η συνάρτηση $G(x)=F(x)+c$. Για κάθε $\chi \in \Delta$ είναι $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)+(c)'=F'(x)=f(x)$ Άρα και η G(x) είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $G'(x)=f(\chi)$. Επομένως είναι: $F'(\chi)=G'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά $c \in R$ έτσι ώστε: $G(x)=F(x)+C$, για κάθε $x \in A$.

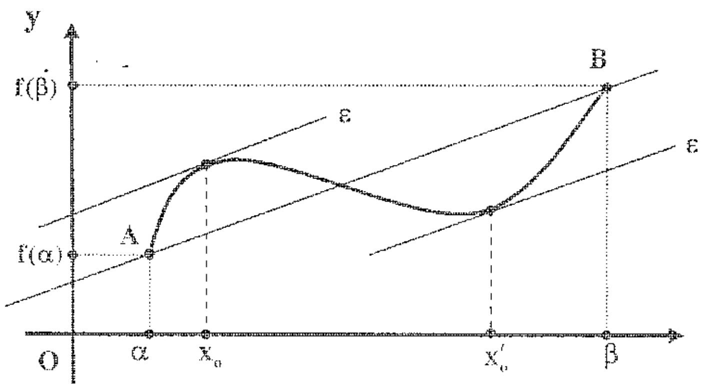
58. Για τιμές του χ "κοντά στο χ_o, έχουμε: $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} =$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$ Δηλαδή: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

59. α) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\chi_o \in A$. β) Μια συνάρτηση f, λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\chi_o \in (\alpha,\beta)$. γ) Μια συνάρτηση f, λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \Re$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} \dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \Re$

60. Έχουμε: $f'(x) = (\alpha^\chi)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(\chi\ln\alpha)' = e^{x\ln a}\ln\alpha = \alpha^\chi \ln\alpha$

61. **α.** Μια συνάρτηση f, λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_o του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει και είναι πραγματικός, αριθμός το: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Το όριο αυτό, ονομάζεται παράγωγος της f στο χ_o και συμβολίζεται με $f'(\chi_o)$. Δηλαδή: $f'(\chi_o) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **β.** Αν μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A και $\chi_o \in A$, είναι παραγωγίσιμη στο χ_o, τότε η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση: $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.

62. **α.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα [α, β] τέτοια, ώστε: η f είναι συνεχής στο [α, β] η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ **β.** Αν για μια συνάρτηση f, ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής (Θ.Μ. Τ.) σε ένα διάστημα [α, β], τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο, στο ανοικτό διάστημα (α,β), στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (βλέπε σχήμα) A(α,f(α)) και B(β,f(β)), της C_f.



Πράγματι:Η ευθεία ΑΒ, έχει συντελεστή διεύθυνσης: λ = $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ Οπότε, αν $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ τότε η εφαπτομένη ευθεία τηςC_f στο ξ είναι παράλληλη με την ΑΒ, αφού λ = f'(ξ).

63. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\Re$. Ονομάζουμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία ή κανόνα f όπου σε κάθε στοιχείο $x\in$Α αντιστοιχούμε ακριβώς ένα πραγματικό αριθμό ψ. Το ψ ονομάζεται τιμή της f στο χ και συμβολίζεται με f(χ). Γραφική παράσταση της f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται η απεικόνιση των σημείων (χ,f(χ)), $x\in$Α σε ένα σύστημα συντεταγμένων

64. Σχολικό βιβλίο σελ 136,137,138

65. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός *λ*, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της *Α*, την ευθεία *ε* που διέρχεται από το *Α* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $\boldsymbol{y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)}$,

66. η μέση **ταχύτητα** του κινητού στο χρονικό διάστημα t,t_0 είναι $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$.

ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $\upsilon(t_0)$ το $\upsilon(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$.

67. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, Αν Δ είναι το σύνολο των χ_oεΑ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και σε κάθε χ_o εΔ αντιστοιχίσω το $f'(\chi_0)$ τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση που λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(\chi)$. Η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται με f''. Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της *f***, με $\nu\geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή $\boldsymbol{f^{(\nu)}=[f^{(\nu-1)}]',\quad \nu\geq 3}$.

68. • Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in R$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$ Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$.Επομένως, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$. • Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$ Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$.Επομένως, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1$,δηλαδή $(x)'=1$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$,

Οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

- ***Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ Πράγματι, για κάθε $x\in\Re$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$=\eta\mu x\cdot\dfrac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\dfrac{\eta\mu h}{h}$.Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x$.Δηλαδή, $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

- ***Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$ Πράγματι, για κάθε $x\in\Re$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$=\sigma\upsilon\nu x\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\dfrac{\eta\mu h}{h}$,οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim\limits_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\dfrac{\eta\mu h}{h}\right)$ $=\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x$.Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

69. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, $\nu\in N-\{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$ Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\dfrac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

Η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in R-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ Πράγματι, αν $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως, $y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}=x^\alpha\cdot\dfrac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

70. $(cf(x))'=cf'(x)+c'f(x)=cf'(x)$

71. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A=\Re-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ Πράγματι, για κάθε $x\in A$ έχουμε: $(\varepsilon\varphi x)'=\left(\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\dfrac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ $=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A_f=\Re-\{x|\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ όμοια • Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\Re^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ Πράγματι — αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ — αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$y'=(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

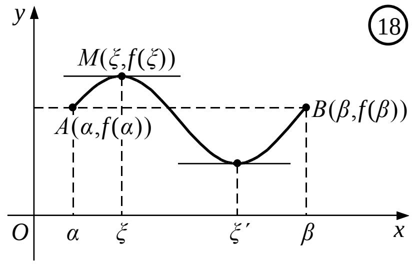
72. η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε

η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$ **κανόνας της αλυσίδας** $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

73. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν *f* είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του *y* ως προς το *x* στο σημείο** x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$

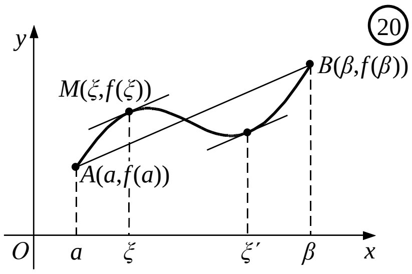
74. Η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους *K* ως προς την ποσότητα *x*, όταν $x=x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο** x_0**.** Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο** x_0 και **οριακό κέρδος στο** x_0**.**

75. Αν μια συνάρτηση *f* είναι: συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των *x*.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.) Αν μια συνάρτηση *f* είναι: συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *AB*.

76. Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*. Μία συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο**,** όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\ge f(x_0)$, για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της *f*.

77. οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης *f* σ' ένα διάστημα *Δ* είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η παράγωγος της *f* μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η *f* δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του *Δ* (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).Τα *εσωτερικά* σημεία του *Δ* στα οποία η *f* δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της *f* στο διάστημα *Δ*.

78. Έστω μία συνάρτηση *f* *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του *Δ*. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση *f* στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του *Δ.* Η συνάρτηση *f* στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτ*

ε ρ ι κ ό του *Δ*.

79. Έστω μια συνάρτηση *f* παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η *f* είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της *f* *ο ι π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς σ η μ ε ί ω ν κ α μ π ή ς* μιας συνάρτησης *f* σ' ένα διάστημα *Δ* είναι: i) τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f'' μηδενίζεται, και ii) τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία δεν υπάρχει η f''

80. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f* στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$). Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται πλάγια **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f* στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$ αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$ **<u>Θεώρημα όχι ορισμός</u>** Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της *f* στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$ αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$

81. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

82. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ(1) ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

83. • Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\Re$, είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

• Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της *f* στο *Δ*. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα, υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

84. Έστω *f* μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της *f*, τον άξονα των *x* και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου *Ω* • Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε *ν* ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$. • Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι $S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x=[f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_\nu)]\Delta x$. • Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu$. Αποδεικνύεται

ότι το $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu$ υπάρχει στο και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $\boldsymbol{E(\Omega)}$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega)\geq 0$.

85. . Έστω μια συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_\nu=\beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa\in[x_{\kappa-1},x_\kappa]$, για κάθε $\kappa\in\{1,2,...,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\kappa)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu=\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x^{(1)}$.Αποδεικνύεται ότι,"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\boldsymbol{\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$ (1) υπάρχει στο $\Re$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ". Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το *α* στο *β*, συμβολίζεται με $\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(x)dx}$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το *α* στο *β*". Δηλαδή, $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ Οι αριθμοί *α* και *β* ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα *Δ* και *α* είναι ένα σημείο του *Δ*, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt\ \ x\in\Delta$ είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ* Δηλαδή ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

86. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in\Re$. Τότε ισχύουν $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx+\mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$ Αν η f είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε διάστημα *Δ* και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$

87. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν *G* είναι μια παράγουσα της *f* στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η *G* είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in$R τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$,οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$. Πολλές φορές, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, συμβολίζουμε τη διαφορά $G(\beta)-G(\alpha)$ με $[G(x)]_\alpha^\beta$,

88. ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της *f*. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

ΣΧΟΛΙΑ

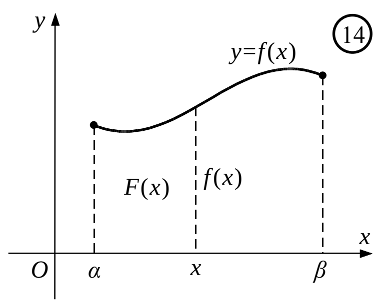
• Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής), η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.

2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.

3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.

89. Εποπτικά το συμπέρασμα του θεωρήματος προκύπτει ως εξής:



$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$

$=$Εμβαδόν του χωρίου Ω. $\approx f(x)\cdot h$, για μικρά $h>0$.

Άρα, για μικρά $h>0$ είναι $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$, οπότε $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

90. α. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in$ Α, τότε η συνάρτηση: F(x) = $\int_\alpha^\chi f(t)dt$, x $\in$ A είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή για κάθε χ $\in$ Δ ισχύει: $\frac{d}{dx}(\int_\alpha^\chi f(t)dt) = f(\chi)$ ή $(\int_\alpha^\chi f(t)dt)'$ =f(x) **β.** Το εμβαδό χωρίου το οποίο περικλείεται από: τη γραφική παράσταση C_f μιας συνεχούς συνάρτησης f, τον άξονα χ'χ, την ευθεία χ = α και την

ευθεία χ = β με α < β υπολογίζεται από τον τύπο: E= $\int_{\alpha}^{\beta}|f(\chi)|d\chi$ (Το απόλυτο |f (χ)| στον τύπο, δηλώνει ότι πρέπει να βρούμε τα σημεία μηδενισμού της f στο διάστημα (ολοκλήρωσης) [α, β] καθώς και το πρόσημο των τιμών f(x) στο [α, β].)

91. Έστω χ $\in$ R.τότε για κάθε **h** $\neq$ 0, ισχύει: $\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h}$ = $\frac{\eta\mu(\chi+h)-\eta\mu\chi}{h}$ = $\frac{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu h+\eta\mu h\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi}{h}$ = $\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)\eta\mu\chi+\eta\mu h\sigma\upsilon\nu\chi}{h}$ = $\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}\eta\mu\chi+\frac{\eta\mu h}{h}\sigma\upsilon\nu\chi$ Όμως είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}$ = 0 και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}$ = 1 Οπότε: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h}$ = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)\eta\mu\chi+\eta\mu h\sigma\upsilon\nu\chi}{h}$ = $\lim\limits_{h\to 0}$ [$\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}\eta\mu\chi+\frac{\eta\mu h}{h}\sigma\upsilon\nu\chi$]= $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}$ ημχ+ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}\sigma\upsilon\nu\chi$ = 0·ημχ + 1·συνχ = συνχ. Δηλαδή, (ημχ)΄ =συνχ.

92. ***Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης *f* σ’ ένα διάστημα *Δ* ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της *f* στο *Δ***, συμβολίζεται $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα εφ του *x* ντε *x*”. Δηλαδή, $\int f(x)dx = F(x)+c$, $c\in\Re$, όπου *F* μια παράγουσα της *f* στο *Δ*. Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* έχουν παράγουσα σ’ ένα διάστημα *Δ*, τότε $\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx$ $\lambda\in\Re^*$ και $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx$