ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4 ΩΡΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι γνησίως αύξουσα τότε

ι) η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)

ιι) f(χ) = $f^{-1}(x) \Leftrightarrow$ f(χ) = χ,   χ$\in$ A$\cap$f(A)

B. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R τέτοια, ώστε f^{2013}(χ)+3·f(χ) =$2x^3+3x^2+6x+5$ για κάθε χ$\in$R. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Η εξίσωση f(χ)=0   έχει μοναδική ρίζα χ_0 την οποία να βρείτε.

γ) Η f αντιστρέφεται.

δ) Το σημείο N(0,-1)$\in Cf^{-1}$.

ε) Αν η f και f^{-1} είναι συνεχείς στο R και f(-2)<-2, δείξτε ότι η εξίσωση f(χ)=f^{-1}(χ) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-2,−1).

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f (χ)=$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$, $t, x \in \Re$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{1+x^2} \le f(x) \le x$ για κάθε χ$\in$[0,+ ∞).

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

ε) Να δείξετε ότι f(x)>0 για κάθε χ θετικό

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον άξονα χ'χ και τις ευθείες με εξισώσεις χ = -1 και χ = 1 αν f(1) γνωστό.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=$|x\bar{z}-3z|^2$,χ$\in$R και z$\in$C με $|z|$=1

α) Να αποδείξετε ότι f(x)= $x^2-6xRe(z^2)+9$

β) Αν f(χ)$\geq$9 για κάθε χ$\in$R. τότε:

ι) Να αποδείξετε ότι ο z^2 είναι, φανταστικός αριθμός

ιι) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{e^x f(x)}{x^x}\eta\mu\frac{1}{f(x)})$ και το $\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{e^x(f(x)-9)}{x^x}\eta\mu\frac{1}{f(x)-9})$

ιιι) Αν w=2z+3i δείξτε ότι $|z-w|\leq 4$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. ι) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο R δείξτε ότι f΄(χ)≥0

ιι) Αν η f είναι συνεχής και 1-1 στο R δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

ιιι) Αν η f είναι κυρτή στο R τότε η γραφική παράσταση της f, είναι πάνω από τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε εφαπτόμενης της f, με εξαίρεση το σημείο επαφής

Β. Δίνεται συνάρτηση f που είναι 1 - 1, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για χ>0 ισχύει f(x)>0. Ακόμη για κάθε x_1,x_2<0 αλλά και για κάθε x_1,x_2>0 με $x_1<x_2$ ισχύει $\int_{f(x_1)}^{f(x_2)}\frac{dx}{(f^{-1}(x))^2}>2\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)}{x^3}dx$ τότε

i) Να δείξετε ότι η g(x) = $\frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,0) αλλά και στο (0,+∞)

ιι) Να δείξετε ότι x^2f΄(χ)≥ 2xf(x) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) και μετά να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο R .

ιιι) για χ>0 δείξτε ότι χf΄(χ)≥2f(x) και ότι f(0)≤0 και μετά ότι το f(0)=0

iv) Να βρεθεί το πρόσημο της f στο R.

v) Να δειχτεί ότι 2f(2) $\geq 3\int_0^2 f(x)dx$

vi) Να δειχτεί ότι υπάρχει ξ $\in$ (0,2) ώστε 4f'(ξ) $\geq 3\int_0^2 f(x)dx$

vii) Αν η τυχαία εφαπτόμενη της f στο x_0, διέρχεται από το σημείο A($\frac{4x_0}{5}$, 0) και ότι f(1)=1 α) να δειχτεί ότι συνάρτηση h(x)=$\frac{f(x)}{x^5}$ είναι σταθερή στο R τότε f(x) = $χ^5$ β) να βρεθεί η αντίστροφη της f αφού βρείτε πρώτα το πεδίο ορισμού της γ) δείξτε ότι f(x)≥5x-4 για κάθε χ>0 δ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της Cf της ψ=5χ-4 και της χ=3