Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης 1983

ZHTHMA1 Α. α) Αν (α_ν), (β_ν) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με :
$\lim\alpha_\nu = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim\beta_\nu = \beta \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι :
$\lim(\alpha_\nu\beta_\nu) = \alpha\beta$.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (γ_ν) με :
$\gamma_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}}\left(\sqrt{\nu^2+1}-\nu\right)$

ZHTHMA2 Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α,β) και f(α)=f(β)=0. Να αποδειχθεί :

α) Ότι για τη συνάρτηση : $F(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$ όπου $c \notin [\alpha,\beta]$ υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.

β) Αν $c \notin [\alpha,\beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση y=f(x) διέρχεται από το σημείο (c,0).

ZHTHMA3 Α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x>0 ισχύει η σχέση $\log x \le |x-1|$

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\log x}{1-x}, & 0 < x \ne 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

. Να αποδειχθεί ότι

i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
ii) Είναι φθίνουσα στο διάστημα (0,1)
iii) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

ZHTHMA4 Στο τετράεδρο ΟΑΒΓ να αποδειχθεί ότι

α) Αν $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A} = 0$ τότε $\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

β) Αν $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και d_1 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ,ΓΑ και d_2 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΓ,ΑΒ τότε $d_1 = d_2$.

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης 1983

ΖΗΤΗΜΑ1 α) Να αποδειχθεί ότι η τετμημένη καθώς και η τεταγμένη του αθροίσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με το άθροισμα των τετμημένων και αντίστοιχα των τεταγμένων των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Μ (1,-1) και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $5x-9y+12=0$.

ΖΗΤΗΜΑ2 α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε μια θέση x_0 του πεδίου ορισμού της ;

β) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2-9x+2}{x-2}, & x\in\mathbb{R}-\{2\} \\ 7, & x=2 \end{cases}$ στη θέση $x_0=2$

ii) $g(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$ στη θέση $x_0=0$

ΖΗΤΗΜΑ3 α) Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής : $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0

ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σε ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο $y=f(x)$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο (1,1) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $y=x^3$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2-|x|-2$. Να γίνει μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1984

ΖΗΤΗΜΑ1 α) Έστω ότι $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι τα διανύσματα (α_1, α_2), (β_1, β_2) αντίστοιχα (ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς) και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ το εσωτερικό τους γινόμενο. Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$.

β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χοψ θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α το σημείο (2,1) και έστω ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δυο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις 3x+ψ-11=0, x-ψ+3=0. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

ΖΗΤΗΜΑ2 α) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 < |\alpha| < 1$, να αποδείξετε ότι $\lim \alpha^\nu = 0$.

β) Να μελετήσετε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία (β_ν) με

$\beta_\nu = \dfrac{\lambda^\nu + 2^{\nu+1}}{2 \cdot \lambda^\nu - 3 \cdot 2^{\nu-1}}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, -2$.

ΖΗΤΗΜΑ3 α) Δίνονται τα σύνολα διανυσμάτων B_1, B_2 του χώρου $\mathbb{R}^2$ με

$B_1 = \{ (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta), (\eta\mu\theta, -\sigma\upsilon\nu\theta) \}$

$B_2 = \{ (\sigma\upsilon\theta - \eta\mu\theta, -\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta), (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta) \}$ με

$\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το καθένα από τα σύνολα B_1, B_2 είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ (για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$)

β) Έστω $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα (και μόνο) διάνυσμα (x,y) του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε τα διατεταγμένα ζεύγη των συντεταγμένων να είναι (λ,μ-1) και (λ-1,μ) ως προς τις βάσεις B_1, B_2 αντίστοιχα.

ΖΗΤΗΜΑ4 Έστω z ο μιγαδικός αριθμός x+yi με $y \neq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Θέτουμε :

$\omega = \dfrac{\bar{z}^2}{z-1}$ όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z. Να αποδείξετε ότι ω είναι πραγματικός αριθμός εάν και μόνο εάν το σημείο (x,y) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xoy , ανήκει σε μία υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης 1984

ΖΗΤΗΜΑ1 Θεωρούμε τους πίνακες $\begin{bmatrix} \frac{συνx}{\sqrt{2}} & \frac{ημx}{\sqrt{2}} \\ \frac{ημx}{\sqrt{2}} & \frac{συνx}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{συνx}{\sqrt{2}} & -\frac{ημx}{\sqrt{2}} \\ -\frac{ημx}{\sqrt{2}} & \frac{συνx}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ και ονομάζουμε Η(x) τον πρώτο και Σ(x) το δεύτερο.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $Η^2(x)+Σ^2(x)=Ι$ όπου Ι ο πίνακας $Ι=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $Σ^2(x)-Η^2(x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(x\in\mathbb{R})$

ΖΗΤΗΜΑ2 α) Έστω το σύστημα $(Σ):\begin{cases} α_1x+β_1ψ=γ_1 \\ α_2x+β_2ψ=γ_2 \end{cases}$ με τους $α_1,β_1,γ_1,α_2,β_2,γ_2$ πραγματικούς αριθμούς. Να αποδείξετε ότι αν ο πίνακας $\begin{bmatrix} α_1 & β_1 \\ α_2 & β_2 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

β) Να λύσετε (και να διερευνήσετε) το σύστημα :

$\begin{cases} (λ+1)x-2(λ-1)ψ=3 \\ x+3λψ=4λ+5 \end{cases}$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

ΖΗΤΗΜΑ3 Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής x με : $ψ(x)=x+\frac{4}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο των τιμών της ψ

β) Να εξετάσετε την ψ ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα (0,2] και $[2,+\infty)$

ΖΗΤΗΜΑ4 α) Έστω μια πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού της Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, που περιέχει ένα ανοικτό διάστημα (α,β) με α,β$\in\mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα από τα άκρα του διαστήματος (α,β). Τι εννοούμε όταν λέμε ότι : η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 το $+\infty$ και τι όταν λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 το $-\infty$;

β) Έστω η πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x με $ψ(x)=\frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$ να βρείτε το $\lim_{x\to 5}ψ(x)$.

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης 1985

ΖΗΤΗΜΑ1

α) Έστω μια ευθεία που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει εξίσωση: Αx+Βψ+Γ=0 με $|A|+|B|\neq 0$. Έστω $P(x_1,\psi_1)$ είναι ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση του σημείου P από την ευθεία ισούται με : $\dfrac{|Ax_1+B\psi_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

β) Θεωρούμε δυο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση x+μψ+1=0 και 2μx+2ψ+λ=0 αντίστοιχα (όπου μ,λ είναι πραγματικοί αριθμοί). Να προσδιορίσετε για ποια ζεύγη τιμών των λ,μ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ2

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x+2y+3\omega=0 \\ 4x+(3+\lambda)y+6\omega=0 \\ 5x+4y+(1+\lambda)\omega=0 \end{cases}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

β) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος για την περίπτωση που το λ ισούται με την μικρότερη από τις τιμές που βρήκατε στο ερώτημα α) του ζητήματος αυτού.

ΖΗΤΗΜΑ3

α) Έστω μια ακολουθία (β_ν). Αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_ν) και (γ_ν) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε ν>κ (κ ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \gamma_\nu$ τότε και η (β_ν) έχει το ίδιο όριο.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2-2\nu+3}$.

ΖΗΤΗΜΑ4

α) Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0)=0$. Αν $f''(x_0)>0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2(x-3)+4$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης 1985

ΖΗΤΗΜΑ1 α) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$. Να υπολογισθεί ο πίνακας A^2-2A.

β) Έστω λ∈ℝ και Χ ένας πίνακας 2x2. Να βρεθεί ο Χ αν

$$X+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & \lambda-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -5\\ 3\lambda & 2(\lambda^2-1)\end{bmatrix}.$$

ΖΗΤΗΜΑ2 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$, x∈ℝ. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και το είδος μονοτονίας σε καθένα από αυτά, καθώς και τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. Επίσης να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει

α) τα κοίλα άνω

β) τα κοίλα κάτω

Ακόμα να βρεθούν τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

ΖΗΤΗΜΑ3 α) Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A\subseteq\mathbb{R}$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η f λέγεται άρτια

ii) Πότε η f λέγεται περιττή

iii)Πότε η f λέγεται περιοδική

iv)Πότε η f λέγεται φραγμένη άνω και

v) Πότε η f λέγεται φραγμένη κάτω

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$, x∈ℝ. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ΖΗΤΗΜΑ4 α) Έστω f,g συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $\Delta\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in\Delta$. Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε να αποδειχθεί ότι και η f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

β) Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=2x^2+x+3$, x∈ℝ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(0,3).

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης 1986

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ που ανήκουν στο Ε . Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

α) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα;

β) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα;

Β. Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε επίσης και τα διανύσματα

$$\vec{u}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$
$$\vec{v}=2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$$
$$\vec{w}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. i) Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού.

ii) Έστω οι μη μηδενικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Β. Έστω ότι $z=(2x-3)+(2y-1)i$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Να ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που είναι τέτοια ώστε $|2z-1+3i|=3$ είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου αυτού και την ακτίνα του.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και έστω $x_0\in\Delta$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0

ii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από δεξιά στο x_0

iii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από αριστερά στο x_0

Β. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}3\alpha e^{x+1}+x & \text{αν } x\le -1\\ 2x^2-\alpha x+3\beta & \text{αν } -1<x<0\\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1 & \text{αν } 0\le x\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β) και ότι στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x_0)=0$. Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο αν :

$\forall x\in(\alpha,x_0],\ f'(x)\ge 0$ και $\forall x\in[x_0,\beta),\ f'(x)\le 0$.

Β. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=(\alpha-\frac{2}{3})x^3-(\alpha+\frac{1}{2})x^2-10x+7,\forall x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\frac{3}{2}$.

Μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f.

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης 1986

ΖΗΤΗΜΑ1 Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} x+3 & 2x & 3x-1 \\ -3 & 2x-6 & -x-1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ΖΗΤΗΜΑ2 Να προσδιορισθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα :

$\begin{cases} (\lambda+3)x+(\lambda-1)y = 2\lambda+1 \\ (\lambda-2)x-(\lambda-1)y = 3\lambda+7 \end{cases}$ να είναι αδύνατο.

ΖΗΤΗΜΑ3 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 90$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Ι. Έστω S το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους V. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας τιμής $x \in S$;

ΙΙ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Πότε η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0;

Β. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Αν C είναι η γραφική παράσταση της f να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $(1, \frac{23}{6})$. Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιο σημείο η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα x΄x.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1987

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. i) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ του επιπέδου .Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

ii) Να αποδειχθεί ότι δυο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία Α(4,2) και Β(3,-5) . Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση 7x+y-23=0. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Αν $\{v_1, v_2, v_3, ... v_\rho\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V τότε να αποδειχθεί ότι κάθε διάνυσμα $v\in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V.

Β. Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ $V=\{(\alpha,\alpha-\beta,2\alpha+3\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Να αποδειχθεί ότι το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάστασή του.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Αν $\lim \alpha_\nu=+\infty$ η $-\infty$ και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ειναι $\alpha_\nu\neq 0$ να αποδειχθεί ότι $\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=0$.

Β. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_ν) με

$$\alpha_\nu=\left(\sqrt{7\nu^4+6\nu+5}-\sqrt{7\nu^4+3\nu+3}\right)\left(\sqrt{63\nu^2-5\nu+20}\right)$$

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Αν η f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0\in\Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε να αποδειχθεί ότι $f'(x_0)=0$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4-14x^2+24x$. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma\in C$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα Α,Β,Γ είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$. Να αποδειχθεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης 1987

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ και $A \neq \varnothing$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς

I) Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα

II) Πότε η f λέγεται γνησίως φθίνουσα

III)Πότε η f λέγεται αύξουσα

IV)Πότε η f λέγεται φθίνουσα

V) Πότε η f λέγεται « συνάρτηση επί»

Β. Ι. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(4,-3) και Β(-2,5)

ΙΙ. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από το

σημείο Γ(-3,2λ-1).

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Έστω $\overline{x}$ η μέση τιμή της μεταβλητής Χ ως προς τη οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή $\overline{y}$ της μεταβλητής $Y = \alpha X + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ είναι $\overline{y} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta$.

Β. Να αποδειχθεί ότι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 & 1 \\ \beta & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+\beta & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ΖΗΤΗΜΑ3 Να βρεθούν οι τιμές των λ και μ για τις οποίες τα συστήματα :

$\begin{cases} (2\lambda-1)x + 10\mu\psi = 3 \\ 2x + 4\psi = 5 \end{cases}$ και $\begin{cases} (\lambda-2)x - (\mu+1)\psi = 7 \\ 3x - 6\psi = 5 \end{cases}$ είναι

συγχρόνως αδύνατα.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Να αποδειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Β. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο Α(2,-10) να ανήκει στην C και η εφαπτομένη της C και η εφαπτομένη της C στο σημείο Α να έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό –3.

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης 1988

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x+y=\lambda+1 \\ x+(\lambda+1)y=1 \\ x+y=2\lambda+1 \end{cases}$

Β. Να δείξετε ότι το σύνολο $A=\left\{\dfrac{4\kappa+1}{5-4\lambda}:\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}\right\}$ εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στο $\mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω είναι συγκλίνουσα

Β. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με

$\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\sqrt{4\alpha_\nu+5}$ $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Θεωρούμε συνάρτηση g ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\Delta$ και $g(x_0)\neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\dfrac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=-\dfrac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης .

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=2,x=5.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. i) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

ii) Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$ και η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x+\kappa$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα διπλό κοινό σημείο αν και μόνο αν $p=2\lambda\kappa$.

Β. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση 3x+y+3=0.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο (-2,1).

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης 1988

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Θεωρούμε το σύστημα: $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y = \gamma_3 \end{cases}$. Να αποδειχθεί ότι αν

το σύστημα είναι συμβιβαστό τότε θα ισχύει: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$

Β. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Έστω S_X η τυπική απόκλιση της μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχθεί ότι η τυπική απόκλιση S_Ψ της μεταβλητής Ψ=αX+β, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ είναι $S_\Psi = |\alpha| S_X$.

Β. Έστω $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ και I,O ο μοναδιαίος και μηδενικός πίνακας 2x2 αντιστοίχως. Να προσδιορίσετε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $A^2 + 6A - 3I = O$.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με :

$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \le 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx$

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και ν>1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^\nu$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$ όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Εάν η f έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$ τότε να βρεθούν οι αριθμοί α,β.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1989

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+\lambda(y+z)=0 \\ -2y+z=\lambda x \\ \lambda x+y=-z \end{cases}$

ΖΗΤΗΜΑ2 Α Να αποδειχθεί ότι κάθε ν-οστή ρίζα της μονάδας είναι της μορφής $\zeta_\kappa = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\dfrac{2\kappa\pi}{\nu}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών
$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x)=0$ τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

Β. Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι :

i) είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ

ii) $f''=g''$ και

iii) $0 \in \Delta$ και $f(0)=g(0)$

Να δειχθεί ότι :

α) Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x)-g(x)=cx$ όπου $c \in \mathbb{R}$

β) Αν η f(x)=0 έχει δυο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η g(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0=\dfrac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη , τη γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες Οx,Οy.

Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης 1989

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Αν για τον τετραγωνικό νxν πίνακα Α υπάρχει αντίστροφος να αποδειχθεί ότι είναι μοναδικός.

Β. Έστω ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τον οποίο συμβολίζουμε με Α(x) $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι

1. $A(x_1) \cdot A(x_2) = A(x_1 + x_2)$,$(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

2. $A(x) \cdot A(-x) = I_3$,(I_3 ο μοναδιαίος 3x3).

ΖΗΤΗΜΑ2 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \dfrac{2\alpha}{x} + \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ η οποία μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$.

α) Να βρεθούν τα α,β

β) Να βρεθεί το είδος του ακροτάτου και η τιμή του.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Να αποδείξετε ότι : Αν οι συναρτήσεις f,g με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \le 2 \\ \dfrac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Να αποδειχθεί ότι :

α) η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα

β) για $\kappa \ge 1$: $\sqrt{\kappa} \le \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}\,dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}\,dx \le \sqrt{\kappa}$

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης 1990

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Αν Α και Β είναι πίνακες νxν και ισχύουν οι σχέσεις $A^2 = A$ και $AB + BA = O$ όπου O ο μηδενικός πίνακας νxν τότε να αποδείξετε ότι είναι $AB = BA = O$.

Β. Έστω Α,Β,Γ πίνακες νxν και I ο μοναδιαίος πίνακας νxν. Αν ισχύει ότι $AB = \Gamma A = I$ τότε να αποδείξετε ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος και ότι $A^{-1} = B = \Gamma$

Γ. Έστω Α,Β πίνακες νxν όπου ο Β είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι για κάθε κ θετικό ακέραιο ισχύει η σχέση : $\left(BAB^{-1}\right)^{\kappa} = BA^{\kappa}B^{-1}$.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάσημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)\, x + \delta$$

όπου α,β,γ,δ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{2} + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ καθώς και σημείο $A(x_1, y_1)$ αυτού του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη αυτού του κύκλου στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2.$$

Β. Δίνονται η ευθεία (ε) με εξίσωση 5x+3y+2=0 και ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ που τέμνονται στα σημεία Μ και Ν.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2) = 0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία Μ και Ν. Για ποια τιμή του λ ο κύκλος αυτός περνάει από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (α) ανήκουν σε ευθεία ε_1 της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΖΗΤΗΜΑ4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \dfrac{1}{2x^2}$

Α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f της ευθείας με εξίσωση y=3x και των ευθειών με εξισώσεις x=1 και x=α με α>1.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού Ε(α) του ανωτέρου χωρίου όταν το α τείνει στο άπειρο.

Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης 1990

ΖΗΤΗΜΑ1 A. Αν A είναι πίνακας νxν και υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β,γ με $\gamma \neq 0$ για τους οποίους ισχύει ότι: $\alpha A^3 - \beta A + \gamma I = O$ όπου I,O ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας νxν αντιστοίχως να αποδείξετε ότι A είναι αντιστρέψιμος .

B. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ και I,O ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας 2x2 αντιστοίχως να βρείτε όλες τις τριάδες (κ,λ,μ) πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει ότι : $\kappa A^2 + 3\lambda A - \mu I = O$.

ΖΗΤΗΜΑ2 A. Να αποδείξετε ότι : Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ τότε (fg) είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και είναι

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

B. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό και ισχύει g(-1)=7. Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(x) = 3(x-2)^2 \cdot g(2x-5)$ να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

ΖΗΤΗΜΑ3 Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + \left(\alpha^3 + 7\right)x - 5\alpha^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

ΖΗΤΗΜΑ4 A. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$ με α<β. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$.

B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 e^x$ του άξονα $x'x$ και των ευθειών με εξισώσεις x=1 και x=3.

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης (21/6/91)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και V_κ ένας υπόχωρός του ο οποίος παράγεται από κ διανύσματα του V. Από τα κ αυτά διανύσματα υπάρχουν ρ γραμμικώς ανεξάρτητα $1 \leq \rho \leq \kappa$ τα οποία μαζί με καθένα από τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε να αποδειχθεί ότι ο V_κ έχει διάσταση ρ.

Β. Αν $\omega = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq \alpha i$ τότε να αποδειχθεί ότι :

α) ο ω είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.

β) ισχύει $|\omega| = 1$ αν και μόνον αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Έστω (α_ν) ακολουθία συγκλίνουσα με $\lim \alpha_\nu \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $\alpha_{\nu+\kappa} \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) για το παραπάνω κ η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}$ είναι φραγμένη.

Β. Έστω β πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = \beta^{\frac{1}{\beta}}$ και $\alpha_{\nu+1} = \left(\beta^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha_\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Να αποδείξετε ότι :

α) η ακολουθία (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα

β) η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη άνω από το β.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx,\ \nu \in \mathbb{N}^*$ τότε

α) να αποδείξετε ότι για κάθε ν>2 ισχύει $I_\nu = \dfrac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$.

β) να υπολογίσετε το I_5.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}},\ x > 0$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=4.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω

έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία x-y+1=0.
B. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$ και στην παραβολή $y^2 = 3x$

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης (24/6/91)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Αν Α και Β είναι πίνακες 2x2 να αποδειχθεί ότι $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$

Β. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να ευρεθούν οι τιμές των x και y οι οποίες επαληθεύουν τη σχέση

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y \\ \lambda y \end{bmatrix} = (\lambda + 1) \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_0 \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{x+3} + x - 3,\ x \ge -3$ στο σημείο $x_0 = -3$.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

α) Είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β)

β) για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και $g(x) \neq 0$ και για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ είναι $g'(x) \neq 0$ και

γ) $f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0$

Να αποδείξετε ότι

1. Για την συνάρτηση F με $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[\alpha,\beta]$.
2. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Β. α) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)>0$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με $F(x) = [f(x)]^x,\ x \in \mathbb{R}$

β) Έστω $\alpha>0$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με $g(x) = \alpha^{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\eta\mu x + 2\sqrt{2}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=0 και x=e.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1992

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Δίνονται ο 2x1 πίνακας $u=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και ο 2x2 πίνακας

$A=\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}$ με $\theta \in (0,\pi)$. Να δειχθεί ότι οι πίνακες u και Au είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου Π_{2x1} των πινάκων 2x1.

Β. α) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^2-\sqrt{2}(1-i)z-2i=0$

β) Να δειχθεί ότι η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο διέρχεται από την εικόνα μιάς ρίζας της εξίσωσης $z^4+1=0$.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), \Gamma(x_3,y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

Β.α) Δίνονται οι ευθείες y=λx και y=-λx με λ>0 και x>0 και ευθεία (ε) η οποία τις τέμνει στα σημεία Α και Β . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να δειχθεί ότι το σημείο Μ γράφει τον ένα κλάδο υπερβολής όταν η ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε τα τρίγωνο ΟΑΒ να έχει σταθερό εμβαδόν κ^2.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x),\ x\in\Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)\cdot f''(x)\geq[f'(x)]^2,\ \forall x\in\Delta$.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln\left(x^2+2\right)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β. α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x-x,\ x\in\mathbb{R}$ και 0<α<1.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα $\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=\left(\lambda^2-4\right)-\left(\lambda-2\right)$ όπου 0<α<1.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(x+4\right)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x,y) με $-1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq f(x)$.

Β. α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f'=f$ αν και μόνο αν $f(x)=ce^x$ όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+g(x)\cdot\eta\mu x=g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$.

Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης (1992)

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Δίνεται το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\alpha_1 x=\beta_1\\ \alpha_2 x=\beta_2\end{cases}$ με $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ πραγματικούς αριθμούς.

α) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό τότε $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0\ \ (\sigma)$

β) Να αποδειχθεί ότι η σχέση (σ) δεν είναι ικανή για να είναι το σύστημα (Σ) συμβιβαστό.

Β. Με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας 2x2 $A=\begin{bmatrix}\lambda^3 & -\lambda^2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός να λυθεί για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα $\begin{cases}2x-\lambda y=\lambda-1\\ (\lambda+1)x-y=0\end{cases}$.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Να αποδειχθεί ότι $\forall x\in(0,1)$ ισχύει η σχέση $1+x<e^x<1+e\cdot x$

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii) Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1),\ x>0$$

α) Να βρεθεί η παράγωγος f' της f για κάθε x>0

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $E(t)=\int_1^t (x-2)\cdot\ln x\,dx$ για κάθε t>1

β) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{E'(t)}{t\ln t}$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^3+\beta x+\gamma$, $x\in\mathbb{R}$ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

i) Η συνάρτηση f είναι περιττή

ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=1$

iii) $\int_0^2 f(x)dx=2$

Β. Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο [0,π] και $g(\pi)=e^{-\pi}$.

Αν $\int_0^\pi (g(x)+g'(x))\cdot e^x dx=2$ να βρεθεί το g(0).

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (24/6/93)

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

β) Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

Β. Για τον αντιστρέψιμο πίνακα Α τύπου νxν ορίζουμε τα πολυώνυμα $f(x)=\left|A-xI\right|$, $g(x)=\left|A^{-1}-xI\right|$ όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας νxν και x πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι αν $f(x_0)=0$ τότε α) $x_0\neq 0$

β) $g(\frac{1}{x_0})=0$

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{\left(z-1\right)\left(\bar{z}+1\right)}{z+\bar{z}}$, $z\in\mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι : $f(-\frac{1}{\bar{z}})=f(z)$

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M(x,y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί z=αx+βyi με $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$ και $\alpha\beta x\neq 0$ ικανοποιούν την σχέση $\mathrm{Re}\left[f(z)\right]=0$

Β. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$ και το σημείο Κ (0,2β) . Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ και τέμνει τις εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονά της στα σημεία Μ και Ν.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΝ ως συνάρτηση του λ.

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε

α) Υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$m\left(\beta-\alpha\right)\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq M\left(\beta-\alpha\right).$$

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=f(\xi)\left(\beta-\alpha\right).$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+4$ με $x>0$

α) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} f(t)dt$

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως . Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα v=2 m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s(t)=vt, $t\in[0,5]$ όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

α. Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m;

Β. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_{\alpha}^{x} e^{-t}f(t)dt = e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x),\ x,\alpha\in\mathbb{R}$

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης (1993)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ και ο αντιστρέψιμος $\Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε το α ώστε $\Gamma^{-1}A\Gamma=B$.

Β. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ ώστε $A^2=5I$ όπου I μοναδιαίος.

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε να υπολογίσετε τους $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A^6=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}250\\ -375\end{bmatrix}$.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3x+\mu$, $x,\mu\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (1,2)

Β. Αν η συνάρτηση $g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο [0,1] και ικανοποιεί την σχέση $\int_0^1 xg'(x)dx=1993-\int_0^1 g(x)dx$ να βρείτε το g (1).

ΖΗΤΗΜΑ3

Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από την συνάρτηση $K(x)=\frac{\alpha x^3}{4}$ όπου x>0 και $\alpha\in[\frac{2}{9},\frac{9}{2}]$. Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=x^2$,x>0 και το κέρδος από την συνάρτηση $f(x)=E(x)-K(x)$,x>0.

α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος που συμβολίζεται με M(α).

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in[\frac{2}{9},\frac{9}{2}]$ για την οποία το M(α) γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο κέρδος.

ΖΗΤΗΜΑ4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\nu x}$, $x\in\mathbb{R},\nu\in\mathbb{N}^*$

Α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f , να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της

Β. Να αποδείξετε ότι $2\le e^2\nu^2\cdot\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx\le e$.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (23/6/94)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=2\chi^2$,$\chi\in R$

α) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha,8\alpha^2)$ $\alpha>0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C, την ευθεία ε και τον άξονα $\psi'\psi$.

β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία ΜΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται ($\alpha>0$).

Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,e]$ με $0<f(\chi)<1$ και $f'(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[1,e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $\chi_0\in(1,e)$ τέτοιος ώστε

$f(\chi_0)+\chi_0\cdot\ln\chi_0=\chi_0$

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων

$\left(z^2+1\right)^2+z^3+z=0$ και $z^{16}+2z^{14}+1=0$.

Β. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z,w και w_1, τέτοιους ώστε $w=z-zi$ και $w_1=\frac{1}{\alpha}+\alpha i$, $\alpha\in R^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο R^* και ισχύει $w=\overline{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Έστω ρ πραγματικός αριθμός, $A(\chi)$,$B(\chi)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho)\neq 0$ και το $A(\chi)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε

$A(\chi)\cdot B(\chi)=(\chi-\rho)^2\cdot f(\chi)$, αν και μόνο αν $A(\rho)=A'(\rho)=0$.

Β. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ,λ για τις οποίες το πολυώνυμο

$Q(\chi)=\chi^\nu(\nu\chi^3+\kappa\chi^2+\lambda\chi+8)$ έχει παράγοντα το $(\chi-2)^2$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $E(p/2,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta{:}\chi=-\frac{p}{2}$ είναι $\psi^2=2p\chi$.

Β. Έστω ν θετικός ακέραιος και $\Omega=\{0,1,2,3,\dots,2\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος. Δίνονται οι πιθανότητες

$P(\kappa)=\frac{1}{2^\kappa}$ για $\kappa=1,2,3,\dots,2\nu$

Να υπολογίσετε :

α) Την πιθανότητα $P(0)$

β) Την πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου $A=\{2,4,6,\dots,2\nu\}$

Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης (27/6/94)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2-2\chi\ln\chi$ με $\chi\in(0,+\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(1,f(1)) και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο R η οποία έχει συνεχή f'' στο R, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\chi_o=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1). Αν ισχύει $\int_0^2[\chi\cdot f''(\chi)+3\cdot f'(\chi)]d\chi=-\frac{8}{3}$ να υπολογίσετε το f(2).

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Έστω Α,Β πίνακες νχν τέτοιοι ώστε Α+(Β-Ι)=ΑΒ-Ι, όπου Ι ο μοναδιαίος νχν πίνακας. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας (Α-Ι) αντιστρέφεται.

Β. Έστω Α ένας νχν πίνακας για τον οποίο υποθέτουμε ότι $I-A^2+A^4=O$, όπου Ι ο μοναδιαίος νχν πίνακας και Ο ο μηδενικός νχν πίνακας.

α) Να αποδείξετε ότι $A^6+I=O$, ότι ο Α έχει αντίστροφο και ότι $A^{-1}=-A^5$.

β) Να αποδείξετε ότι $-A^{308}+(A^{-1})^{105}=A^2+A^3$.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(\chi)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Β. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και Α,Β είναι υποσύνολα του Ω. Έστω $P(A')\le 0,28$ και $P(B')\le 0,71$ Να αποδείξετε ότι α) $P(A\cap B)\ge 1,01-P(A\cup B)$ β) το ενδεχόμενο $A\cap B$ δεν είναι το $\varnothing$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Έστω ότι η ευθεία ψ=2χ+5 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}[f(\chi)-2\chi]$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\mu\cdot f(\chi)+4\chi}{\chi\cdot f(\chi)-2\chi^2+3\chi}=1$$

Β. Να αποδείξετε ότι α) $e^\chi-\chi+1>0\ \forall\chi\in R$

β) Η εξίσωση $2\cdot e^\chi+2\chi=\chi^2+2$ έχει ακριβώς μια λύση την χ=0.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (21/6/95)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Έστω ν ένας θετικός ακέραιος και Ι,Ο είναι αντιστοίχως ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας νxν . Έστω Α,Β είναι πίνακες νxν τέτοιοι ώστε $A=B^2+I$ και $B^4=O$.

α) Να αποδείξετε ότι i) $A^\kappa=I+\kappa B^2$, για κάθε $\kappa\in N^*$ και ii) ο πίνακας $I+A^6-A^8$ είναι αντιστρέψιμος.

β) Αν ο ν είναι περιττός να αποδείξετε ότι $|2A-3I|\le 0$.

Β. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει

$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)=0$.

β) Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο [α,β] και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$, $w=f(\beta)+i\beta^2$ με $\alpha\beta\neq 0$.

Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(χ)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [α,β].

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Δίνονται οι ελλείψεις

$c_1: \dfrac{\chi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και $c_2: \alpha^2x^2+\beta^2\psi^2=1$ με $0<\alpha<\beta$.

Η ημιευθεία $\psi=(\varepsilon\varphi\theta)\chi$, $\chi>0$, $0<\theta<\pi/2$ τέμνει την C_1 στο σημείο $\Gamma_1(\chi_1,\psi_1)$ και την C_2 στο σημείο $\Gamma_2(\chi_2,\psi_2)$.

α) Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_2 στο σημείο Γ_2 να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\lambda_1\lambda_2$ είναι ίσον με $(\varepsilon\varphi\theta)^{-2}$.

β) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$f:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ με $f(\theta)=\lambda_1\lambda_2$.

Β. Δίνεται θετικός ακέραιος αριθμός ν τέτοιος ώστε $(1+i)^\nu=16$. Έστω $\Omega=\{1,2,\cdots,\nu\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε τυχαίως ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda\in\Omega$.Αν $f(\chi)=2\chi^2-4\chi+\lambda$ με $\chi\in\mathbb{R}$ να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση f(χ)=0 να μην έχει πραγματικές ρίζες.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ με κ<λ και η συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-\kappa)^5(\chi-\lambda)^3$ με $\chi\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{f'(\chi)}{f(\chi)}=\dfrac{5}{\chi-\kappa}+\dfrac{3}{\chi-\lambda}$ για κάθε $\chi\neq\kappa$ και $\chi\neq\lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(\chi)=\ln|f(\chi)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ,λ).

Β. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα [α,β] ισχύει : Αν $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β].

β) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$F(\chi)=\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi-t)dt,\ \chi\in\mathbb{R}$ με α,β πραγματικούς αριθμούς είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $\chi_0\in R$ με $F'(\chi_0)=0$ τότε $F(\chi)=0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α . Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α,β με 0<α<β τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=0$ και τη συνάρτηση $g(\chi)=2+\frac{1}{\chi}\cdot\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt,\ \chi\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(\chi_0,g(\chi_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

β) $g(\chi_0)=2+f(\chi_0)$

Β. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0)=1995$, $f'(0)=1$ και $1+\int_{0}^{\chi} f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt=\sigma\upsilon\nu^2\chi+\int_{0}^{\chi} f'(t)\eta\mu t\,dt$.

Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης (24/6/95)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Αν για τους νxν πίνακες Α,Β ισχύει $A^2+2B=2AB$ και ο Β αντιστρέφεται να αποδείξετε ότι :

α) Ο πίνακας Α αντιστρέφεται

β) $2(A^{-1})^2+B^{-1}=2A^{-1}$

Β. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα 3x3 με πραγματικούς συντελεστές και με αγνώστους $\chi,\psi,\omega\in\mathbb{R}$. Έστω D η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος και D_χ,D_ψ,D_ω οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν αντικαταστήσουμε την 1η ,2η και 3η στήλη αντίστοιχα με την στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Υποθέτουμε ότι $\kappa\lambda D=\kappa D_\chi+2\lambda D_\psi+(\kappa+2\lambda)D_\omega$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}^*$ Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το σύστημα έχει την μοναδική λύση (χ_0,ψ_0,ω_0) τότε $\kappa(\chi_0+\omega_0)+2\lambda(\psi_0+\omega_0)=\kappa\lambda$

β) Αν το σύστημα είναι ομογενές τότε έχει και μη μηδενικές λύσεις.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Δίνεται ο αντιστρέψιμος 2x2 πίνακας Α και ο $B=\begin{bmatrix}\alpha-\beta+\gamma & 0\\ \alpha-3-\gamma & \beta+\gamma\end{bmatrix}$ Αν ΑΒ=0 να βρεθούν τα α,β,γ.

Β. Έστω Ω το σύνολο των ριζών της εξίσωσης

$$\left(\chi^2+4\chi-5\right)\left(\chi-7\right)=0$$

Υποθέτουμε ότι Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα .

Θεωρούμε το σύστημα
$$\begin{aligned}&\left(\alpha-1995\right)\alpha\chi+\psi=0\\&\left(\alpha-1995\right)\left(2\alpha-7\right)\chi+\left(\alpha-6\right)\psi=0\end{aligned}$$

όπου $\alpha\in\Omega$. Έστω $A\subseteq\Omega$ είναι το ενδεχόμενο το παραπάνω σύστημα να έχει και μη μηδενικές λύσεις . Να βρεθεί η πιθανότητα P(A).

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(\chi_0)=\eta$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4-2\chi^2+\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}$

i) Αν $A(\chi_1,f(\chi_1))$, $B(\chi_2,f(\chi_2))$, $\Gamma(\chi_3,f(\chi_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $\chi_1<\chi_2<\chi_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

ii) Αν $0<\alpha<1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (-1,0).

Β. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f'(\chi)\neq0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(\chi)f'(\chi)=2f(\chi)$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(\chi_0,f(\chi_0))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(\chi_0, g(\chi_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi - 2\chi + 5 = 0$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση

$f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}, \quad t \geq 0$ όπου Α ένας θετικός αριθμός.

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}, \quad t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι K(0)=0.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

Β. Αν $G(\chi) = \int_1^{\chi} f(t)dt$ όπου $f(t) = \int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$ και $\chi > 0$, $t > 0$ να βρείτε :

α) την $G''(1)$

β) το $\lim\limits_{\chi \to 0^+} \frac{\sqrt{\chi} \cdot G''(\chi) - \sqrt{3}}{\sqrt{\chi+1} - 1}$

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης (26/6/96)

ΖΗΤΗΜΑ1ο

Α. Δίνονται οι νχν Πίνακες Α,Β,Γ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις Α+Β+1996ΑΒ=Ο ,Β+Γ+1996ΒΓ=Ο ,Γ+Α+1996ΓΑ=Ο ,όπου Ο ο μηδενικός πίνακας. α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες Ι+1996Α ,Ι+1996Β και Ι+1996Γ είναι αντιστρέψιμοι και ότι ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ, όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας.
β) Να αποδείξετε ότι Α=Β=Γ.
Β. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $z = 3 + i\sqrt{3}$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6 = 64$.

ΖΗΤΗΜΑ2ο

Α. α) Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi\in\Delta$ είναι $f'(\chi)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.
β) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο R. Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f'=g$, $g'=-f$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς.
Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις $f''+f=g''+g=0$ και ότι η συνάρτηση $h=f^2+g^2$ είναι σταθερή.
Β Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g. Να αποδείξετε ότι αν χ_1 και χ_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(\chi_1,\chi_2)$ τότε η g έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (χ_1,χ_2).

ΖΗΤΗΜΑ3ο Α. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$. α) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημορίου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.
β) Έστω Α το σημείο του πρώτου τεταρτημορίου στο οποίο η ευθεία $\psi=\lambda\chi$, $\lambda>0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη. Αν μ είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Α τότε να εκφράσετε το γινόμενο λμ ως συνάρτηση των ημιαξόνων α ,β.
Β. Να αποδείξετε τις ανισότητες: α) $\eta\mu\chi<2\chi,\ \chi>0$ β) $\eta\mu\chi>\chi-\frac{\chi^3}{3},\chi>0$.

ΖΗΤΗΜΑ4ο Α. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx = f(x)+e^x ,\ \forall x\in R$.
Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύει ότι $f(\chi)+f(\alpha+\beta-\chi)=c$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi = (\beta-\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta)).$$

Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης (25/6/96)

ΖΗΤΗΜΑ1ο Α. Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in R$ με $\alpha<\beta<\gamma$ και $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \beta & \beta^2\\ 1 & \gamma & \gamma^2\end{bmatrix}$. Θεωρούμε

το 3χ3 γραμμικό σύστημα ΑΧ=Β όπου $X=\begin{bmatrix}\chi\\ \psi\\ \omega\end{bmatrix}$ με αγνώστους $\chi,\psi,\omega\in R$.

Έστω D η ορίζουσα του πίνακα Α και D_χ, D_ψ, D_ω οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν αντικαταστήσουμε την 1^η, 2^η και 3^η στήλη αντίστοιχα με τη στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Έστω ότι $D_\chi^{\,2}+D_\psi^{\,2}+D_\omega^{\,2}+2D^2=2D(D_\chi-D_\psi)$ Να λυθεί το σύστημα ΑΧ=Β.

Β. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ και το πολυώνυμο $f(\chi)=-\chi^2+3\chi+1$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ έτσι ώστε: $|A-\lambda I|=0$ όπου **Ι** ο μοναδιαίος πίνακας.

β) Αν Β συμβολίζει τον πίνακα $\left(f(3)-1\right)\left(A-I\right)^2+A-f(1)I$ να αποδείξετε

ότι υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $X=\begin{bmatrix}\chi\\ \psi\\ \omega\end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε ΒΧ=Ο όπου Ο ο

μηδενικός πίνακας.

ΖΗΤΗΜΑ2ο Α. α) Έστω μια πραγματική συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(\chi)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

β) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $f'(\chi)=g'(\chi)+\eta\mu^2\chi+e^{x}$ για $\chi\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(0)+g(\chi)<g(0)+f(\chi)$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.

Β. α) Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=e^{\alpha\chi}$ όπου $\alpha\in R$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο τιμές της παραμέτρου α έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $f''(\chi)+2f'(\chi)=3f(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$

β) Έστω $\lambda,\mu,\beta_1,\beta_2\in R$ με $\beta_1\neq\beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=\lambda e^{\beta_1\chi}+\mu e^{\beta_2\chi}$ με $\chi\in R$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός χ_o τέτοιος ώστε $g(\chi_0)=g'(\chi_0)=0$ Να αποδειχθεί ότι $\lambda=\mu=0$.

ΖΗΤΗΜΑ3ο Α. α) Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο R και $f(\chi)=\int_0^\chi(\chi-t)g(t)dt$ Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη

και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα όταν $g(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in R$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(\chi)=\sqrt{\chi}$ και $f(\chi)=2\chi-1$ και την ευθεία χ=0.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{1+\chi^2}+\lambda\chi$,$\lambda\in R$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=1$

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\dfrac{x}{f^2(x)}dx$.

ΖΗΤΗΜΑ4ο Α. α) Δίνεται ο πίνακας $X=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ όπου α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με α+β=1 . Να αποδειχθεί ότι $X^2=\begin{bmatrix}\gamma & \delta\\ \delta & \gamma\end{bmatrix}$ όπου γ,δ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γ+δ=1.

β) Έστω ότι Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Α,Β ενδεχόμενα του Ω

Θεωρούμε του πίνακες $Y=\begin{bmatrix}P(A) & P(A')\\ P(A') & P(A)\end{bmatrix}$ και $Y^2=\begin{bmatrix}P(B) & P(B')\\ P(B') & P(B)\end{bmatrix}$ όπου A' είναι το συμπληρωματικό σύνολο του Α και B' το συμπληρωματικό σύνολο του Β. Αν $P(B')=\dfrac{4}{9}$ και $P(A)<P(A')$ τότε να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α και A'.

Β. Έστω ότι f(t) είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου t≥0 και $f:[0,+\infty)\to R$ είναι πραγματική συνάρτηση με $f(\sqrt{t})=1-2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το 1/16 του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή t_o=0.

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης (30/6/97)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. Να αποδειχθεί ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφός του είναι μοναδικός.

Β. Έστω ότι Α,Β είναι νxν πίνακες και έστω ότι οι πίνακες Α,Β και
2ΑΒ-3Ι είναι αντιστρέψιμοι. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες $\Gamma=2A-3B^{-1}$ και

$\Delta=(2A-3B^{-1})^{-1}-\frac{1}{2}A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το R, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in R$.

Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και

$B=\frac{f'(\alpha)-Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $R\setminus\{\alpha\}$, τέτοια ώστε

$\frac{f(\chi)}{(\chi-\alpha)^2 g(\chi)}=\frac{A}{(\chi-\alpha)^2}+\frac{B}{\chi-\alpha}+\frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)}$ για κάθε $\chi\in R\setminus\{\alpha\}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim_{\chi\to\alpha}\varphi(\chi)$.

Β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο R, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε

$(\chi-2)f''(\chi)+(\alpha\eta\mu\chi-\beta\chi^2)f'(\chi)=e^{\chi-2}-1$ για κάθε $\chi\in R$.

Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho\neq 2$ ώστε $f'(\rho)=0$. Να εξετάσετε αν το f(ρ) είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Α. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε

$g(\chi)>0$ και $g''(\chi)g(\chi)-[g'(\chi)]^2>0$ για κάθε $\chi\in R$.

Να αποδείξετε ότι

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g(\frac{\chi_1}{2}+\frac{\chi_2}{2})\leq\sqrt{g(\chi_1)g(\chi_2)}$ για κάθε $\chi_1,\chi_2\in R$.

Β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει

$g(\chi+\psi)=e^{\psi}g(\chi)+e^{\chi}g(\psi)+\chi\psi+\alpha$ για κάθε $\chi,\psi\in R$. Να αποδείξετε ότι

i) $g(0)=-\alpha$

ii) $g'(\chi)=g(\chi)+g'(0)e^{\chi}+\chi$ για κάθε $\chi\in R$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω C είναι η γραμμή του επιπέδου με εξίσωση $\psi=\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta$ όπου α,β,γ,δ είναι πραγματικοί αριθμοί

και $α\neq 0$.
Έστω $Α(χ_1,ψ_1),Β(χ_2,ψ_2),Γ(χ_3,ψ_3),Δ(χ_4,ψ_4)$ είναι σημεία της C. Υποθέτουμε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ συμπίπτει με το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ και επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο αυτό δεν ανήκει στη ευθεία που έχει εξίσωση $β+3αχ=0$.

Α. Να αποδειχθεί ότι $χ_1χ_2=χ_3χ_4$

Β. Να αποδειχθεί ότι το σημείο Α συμπίπτει με το σημείο Γ ή με το σημείο Δ.

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης (3/7/97)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο Α. Έστω Χ,Β είναι νxμ πίνακες και Α είναι ένας νxν αντιστρέψιμος πίνακας. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

Β. Αν $\lambda \in R \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί χ και ψ, ώστε να ισχύει η σχέση : $\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο Α. Στην τελευταία Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, που έγινε στη Βομβάη, πέντε Έλληνες μαθητές βραβεύτηκαν με μετάλλια. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία αποφάσισε να δωρίσει σε καθένα από τους πέντε μαθητές από δυο βιβλία, που επιλέγονται από μια συλλογή δέκα διαφορετικών βιβλίων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους τα δέκα αυτά βιβλία μπορούν να διανεμηθούν στους πέντε βραβευθέντες μαθητές;

Β. Θεωρούμε το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών χ τέτοιων ώστε $1000 \le \chi \le 9999$. Ως γνωστόν αυτοί είναι τετραψήφιοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς γράφονται με τέσσερα διαφορετικά ψηφία;

ΖΗΤΗΜΑ 3ο Α. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και ικανοποιούν τις σχέσεις :

$f''(\chi) - g''(\chi) = 4$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

$f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(\chi)=f(\chi)-g(\chi)$,$\chi \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

Β. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Έστω $\alpha, \beta \in R$ και $\alpha < \beta$ Να αποδειχθεί ότι :

i) $f(\chi) - f(\alpha) \le f'(\beta)(\chi - \alpha)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$

ii) $2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\chi) \ge 2$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 1 - \int_0^{\chi^2 - 5\chi} f(t)dt, \ \chi \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι $g(-3) \cdot g(0) < 0$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(\chi)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (-3,0).

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (24/6/98)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. α) Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$ με $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu$ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha_\nu\neq 0$, να αποδείξετε ότι και ο συζυγής του $\bar{z}_0$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

β) Αν η πολυωνυμική εξίσωση $\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί έχει ως ρίζα το μιγαδικό 2-3i να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2+\beta\chi+\gamma$ στο σημείο Α(1,f(1)) όταν το χ μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R.

Β. Η συνάρτηση $f:R\to R$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(\chi))+f^3(\chi)=2\chi+3,\ \chi\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα»

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2\chi^3+\chi)=f(4-\chi),\ \chi\in R$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0 με $\mathrm{Im}z_0<999$ και το σύνολο Α των μιγαδικών αριθμών z με $z\neq z_0$ και $z\neq\bar{z}_0$ που ικανοποιούν τη σχέση $\dfrac{1}{|z-z_0|}+\dfrac{1}{|z-\bar{z}_0|}=\dfrac{1998}{|z-z_0||z-\bar{z}_0|}$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου Α. Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί; Να εξετάσετε την περίπτωση $z_0=\bar{z}_0$.

Β. Ένας γεωργός προσθέτει χ μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει g(χ) μονάδες του παραγόμενου προϊόντος.

Αν $g(\chi)=M_0+M(1-e^{-\mu\chi}),\ \chi\geq 0$ όπου M_0, Μ και μ είναι θετικές σταθερές να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της g(χ). Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0;

ΖΗΤΗΜΑ 3

α) Δίνεται ο νxν πίνακας Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς για τον οποίο ισχύει: $A^2-2(\lambda-2)^2A+I=0$ όπου I είναι ο μοναδιαίος νxν πίνακας και λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο πίνακας Α+Ι είναι αντιστρέψιμος για κάθε λ.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\chi+1)|A+\chi I|+(\chi-1)|A-\chi I|=1-\chi^2$ όπου Α είναι ο πίνακας του ερωτήματος α) και χ πραγματικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (-1,1).

Με $|A+\chi I|$ και $|A-\chi I|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Α+χΙ και Α-χΙ αντίστοιχα.

γ) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που ικανοποιούν τις σχέσεις:2P(1)=2P(3)=2P(5)=2P(7)=3P(2)=3P(4)=3P(6)=3P(8) και το ενδεχόμενο

$B=\left\{\lambda\in\Omega\left(\begin{array}{l}\text{τοσύστημα}AX=X\text{έχει}\\ \text{τουλάχιστονδυολύσεις}\end{array}\right.\right\}$ όπου X ένας νx1 άγνωστος πίνακας και A ο πίνακας του ερωτήματος α). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B.

δ) Δίνεται το τριώνυμο $f(\chi)=\chi^2+\gamma\chi+4$ όπου ο συντελεστής γ επιλέγεται τυχαία από το δειγματικό χώρο Ω του ερωτήματος γ) .

Αν $\Gamma=\left\{\gamma\in\Omega\left(\begin{array}{l}\text{η εξίσωση } f(\chi)=0\\ \text{έχει πραγματικές ρίζες}\end{array}\right.\right\}$

Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα B (του ερωτήματος γ) και Γ είναι ασυμβίβαστα .

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(\chi)>0,\chi>0$, $f'(\chi)+2\chi f(\chi)=0,\ \chi>0$ και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,1)

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\chi-1}{2\chi^2}f(\chi)<\int_1^x\frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{\chi-1}{2},\chi>1$

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt,\ \chi>1$

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$ για κάθε χ μεγαλύτερο του ένα.

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης (27/6/98)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο Α. Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f σ' ένα διάστημα Δ τότε υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(\chi) = F(\chi) + c,\ c \in R$ και μόνο αυτές.

Με R συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου $C: \chi^2 + \psi^2 + 1 = 2\chi + 6\psi$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2\chi + \psi + 5 = 0$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t) = 2t + \mu,\ t \in R$ όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Μια επιχείρηση έχει έσοδα E(t) που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές από τον τύπο

$E(t) = (t-1)\varphi(t),\ t \geq 0$ όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη.

Το κόστος λειτουργίας K(t) της επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια δραχμές σύμφωνα με τον τύπο

$K(t) = \varphi(t+4),\ t \geq 0$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους P(t) για $t \geq 0$ όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές.

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

δ) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \frac{111}{2}\int_0^6 P(t)dt.$$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο Δίνεται η συνάρτηση $h(\chi) = 2^{12}(e^{-4\chi} - e^{-\alpha\chi}),\ \chi \geq 0$ όπου α πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4

α) Να δείξετε ότι $\lim_{\chi \to +\infty} h(\chi) = h(0) = 0$

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(\chi)$

γ) Αν χ_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και χ_2 είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της $h(\chi)$ να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα χ_1, χ_2

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$M = \frac{334}{75}\int_0^{\ln 2} h(x)dx \quad \text{όταν } \alpha=8$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$ και οι πολυωνυμικές συναρτήσεις

$f(\chi) = 4(\chi-1)(\chi^2 - 5\chi + 6),\ \chi \in R$

και

$g(\chi) = \chi^2 + (\kappa^2 - 5\kappa)\chi + 13,\ \chi \in R$

όπου κ και λ πραγματικοί αριθμοί.

α) Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ με

$\omega_1=\chi_1$, $\omega_2=\chi_2$, $\omega_3=\chi_3$

$\omega_4=4\chi_1$, $\omega_5=4\chi_2$, $\omega_6=4\chi_3$

όπου χ_1,χ_2,χ_3 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(\chi)=0$

Οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τις σχέσεις

$$P(\omega_6)=P(\omega_5)=P(\omega_4)=$$

$$=3P(\omega_3)=3P(\omega_2)=3P(\omega_1)$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$B=\left\{\lambda\in\Omega\left(\begin{array}{l}\text{το σύστημα } AX=2X \text{ έχει}\\ \text{και μη μηδενικές λύσεις}\end{array}\right\}\right.$$

όπου X ένας 3x1 άγνωστος πίνακας και Ω ο δειγματικός χώρος του α) ερωτήματος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(B).

γ) Να δείξετε ότι για το ενδεχόμενο Γ του Ω όπου

$$\Gamma=\left\{\kappa\in\Omega\left(\begin{array}{l}\eta\, g(\chi) \text{ παρουσιάζει ακρότατο}\\ \text{στο σημείο } \chi_0=3\end{array}\right\}\right.$$

και Ω ο δειγματικός χώρος του α) ερωτήματος ισχύει :P(Γ)=P(B).

δ) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $B\cap\Gamma$ και $B\cup\Gamma$.

Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης (6/7/99)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0)=0$.

Β. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4\left(f'(x)-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x,y) που είναι τέτοια ώστε $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

β) Έστω O η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ε_1, ε_2 είναι οι δυο εφαπτόμενες που άγονται από το O προς τον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δυο σημείων επαφής M_1, M_2.

Β. Έστω Ω={1,2,3,4,5,6} δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και έστω C κύκλος με κέντρο (2,1) και ακτίνα 1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

Ε={ω∈Ω/ το σημείο M(ω,1) είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C}

Ζ={ω∈Ω/ το σημείο N(2,ω) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C}.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Ε,Ζ και $E\cup Z$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$

β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$

Β. Έστω Α,Β νxν πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι ισχύει $A^2+AB+I=B^2+BA+I=O$ όπου I είναι ο νxν μοναδιαίος πίνακας και O είναι ο μηδενικός νxν πίνακας.

Να αποδείξετε ότι
α) i) Ο πίνακας Α+Β έχει αντίστροφο
ii) Α=Β
β) ο ν είναι άρτιος.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(t)dt$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^4 f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt,\ x>0$

i) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Β. Έστω $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $h(x)=1999(x-1)+\int_1^x \dfrac{h(t)}{t}dt$ για κάθε $x\ge 1$

Να αποδείξετε ότι
α) $h(x)=1999x\ln x,\ x\ge 1$
β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Θέματα Μαθηματικών $4^{ης}$ Δέσμης (9/7/99)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Β α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$$

για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1,3),Β(-1,0),Γ(3,-1)

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ

β) Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα (ΑΒ).

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας ΒΓ με τον παραπάνω κύκλο

Β. Έστω $\Omega = \{0,1,2\}$ ένας δειγματικός χώρος με

$P(0) = 2P(2) = \frac{1}{3}$

α) Να βρείτε το P(1)

β) Έστω η συνάρτηση

$f(x) = e^x - \frac{\lambda}{2}x^2 + 118,\ x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \Omega$

Θεωρούμε το ενδεχόμενο Ε={ $\lambda \in \Omega$/ η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το (0,f(0))}. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ^2(αx)$, $x \in \mathbb{R}$ και $α \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει

$f''(x) + 4α^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι f(x)>0 για κάθε $x \in [1,3]$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=3.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Α. Έστω Α ένας νxν πίνακας για τον οποίο ισχύει

$(A - I)^{-1} = A + 2I$ όπου Ι ο νxν μοναδιαίος πίνακας

α) Να αποδείξετε ότι $A^2 = 3I - A$

β) Έστω Χ νxν πίνακας για τον οποίο ισχύει

$AX - A = 4I - X$. Να αποδείξετε ότι Χ=Α+Ι

Β. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και το σύστημα $\begin{cases} f(1)x+y+\omega = 0 \\ f(2)x+2y+2\omega = 0 \\ 2x+f(2)y+2f(1)\omega = 0 \end{cases}$ με αγνώστους x,y,ω.

Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις Να αποδείξετε ότι α) $\frac{f(2)}{2}=\frac{f(1)}{1}$ β) Η εξίσωση $x f'(x)-f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000
ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \varrho_1 (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2=\varrho_2 (\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 τότε να αποδείξετε ότι

$$z_1z_2=\varrho_1\varrho_2 [\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)].$$

Β. Έστω $\Omega=\{1,2,\ldots,10\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν $\lambda\in\Omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R\to R$, με

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+\lambda^2, \quad x\in R.$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Χ,Υ όπου :

Χ : Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,5]$, είναι μεγαλύτερη ή ίση του 68/3.

Υ : Η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,5]$, είναι μικρότερη ή ίση του 4.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Χ,Υ, $X\cap Y$ και $X\cup Y$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Έστω ότι Α,Β είναι νxν πίνακες, με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τέτοιοι, ώστε $4A^2-B^2=I$ και $AB=BA$, όπου Ι είναι ο νxν μοναδιαίος πίνακας.

α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες $2A+B$ και $2A-B$ είναι αντιστρέψιμοι.

β) Έστω Χ,Υ είναι νxν πίνακες τέτοιοι, ώστε

$$2AX+BY=2A+I \text{ και } BX+2AY=B.$$

i) Να αποδείξετε ότι $X=2A+I$ και $Y=-B$.

ii) Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα Y^2+2X είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Β. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου Μ(4συνφ, 5ημφ), με $\varphi \in [0, 2\pi)$.

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο Μ(4συνφ, 5ημφ), με $\varphi \in (0, 2\pi)$.

β) Έστω Ε(φ), με $\varphi \in (0, \pi/2)$, είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο Μ(4συνφ, 5ημφ) με τους άξονες x΄x και y΄y.

Να αποδείξετε ότι $E(\varphi) \geq 20$.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Έστω $f : R \to R$ συνάρτηση συνεχής στο R.

Έστω $I : R \to R$ η συνάρτηση με

$$I(x)=\int_0^1 \left[(f(t))^2 - 2xt^2 f(t) + x^2 t^4 \right] dt, \text{ για } x \in R.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Ι παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o = 5\int_0^1 t^2 f(t)\, dt$

Β. Έστω η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to R$, με

$$f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$$

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y=c και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα Α και Β.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, στα Α και Β, είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Έστω f,g : $R \to R$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες, ώστε να ισχύει

$$f(x)-g(x)=x-4, \text{ για } x \in R.$$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x \to +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια : i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{x\,f(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $x \to +\infty$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. ΄Εστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Β. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ώστε:

$$2xf(x)+(x^2+1)\, f'(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in R, \text{ με } f(0)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\beta & -1\\ \beta & -2\end{bmatrix}$, όπου $\beta\in R$.

Αν $\lambda\in R$, θεωρούμε το 2x2 γραμμικό σύστημα $AX=\lambda X$ όπου $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας-στήλη των αγνώστων.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\beta\in R$ υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του $\lambda\in R$, για τις οποίες το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

Β. ΄Εστω Α ένας 2x2 πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$A=\begin{bmatrix}2+|A| & 4|A|+1\\ 1 & 2|A|\end{bmatrix} \text{ και } |A|>0$$

όπου $|A|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα Α.

α) Να αποδείξετε ότι A= $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας B=5I-A, όπου I ο 2x2 μοναδιαίος πίνακας, είναι αντίστροφος του A και να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει :

$$BX=A$$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$$

β) ΄Εστω ότι

$$4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2004$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)= 334$.

Β. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:R \to R$ που ικανοποιεί την ισότητα : $\int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t)dt$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+1}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α (0, f(0)).

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=x^2-4x+3$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)+f(y)=0 \text{ με } x,y \in R$$

παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x.

Β. Έστω Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και X,Y ενδεχόμενά του τέτοια, ώστε $X \subseteq Y$.

Έστω P(X), P(Y) είναι οι πιθανότητες των X,Y αντιστοίχως.

Έστω ότι οι πραγματικοί αριθμοί P(X), P(Y) είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f, με

$$f(x)=4x^3-5x^2+2x+2000,\ x \in R.$$

Να υπολογίσετε

α) τις πιθανότητες P(X), P(Y)

β) τις πιθανότητες $P(X \cap Y)$, $P(X \cup Y)$ και $P(Y \cap X')$ όπου X΄ το αντίθετο ενδεχόμενο του X.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2001
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Έστω δειγματικός χώρος Ω και Α ένα ενδεχόμενό του. Αν Α΄ είναι το αντίθετο ενδεχόμενο του Α, να αποδείξετε ότι

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Β. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y + 3\omega - \varphi = \kappa \\ 3x + y + 2\omega + 4\varphi = \lambda \\ 5x + 4y + \omega + 9\varphi = \mu \end{cases}$$

όπου $\kappa, \lambda, \mu \in R$.

α. Αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, να αποδείξετε ότι

$$\mu+\kappa-2\lambda=0$$

β. Αν $(x, y, \omega, \varphi) = (1, 2, 1, 1)$ είναι μία λύση του συστήματος, να βρείτε όλες τις λύσεις του.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_\alpha: \alpha x - y = 0 \text{ και } \zeta_\alpha: x+\alpha y=2,\ \alpha\in R.$$

α. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο Β, τα οποία και να προσδιορίσετε.

β. Αν Μ(x, y) είναι το σημείο τομής των ε_α και ζ_α, να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$ το Μ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

Β. Δίνονται τα πολυώνυμα

$P(z) = z^2 - 2z + 2$ και $Q(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 2$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

α. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 του P(z) και να αποδείξετε ότι $z_1^{12} + z_2^{12} = -2^7$.

β. Αν μια ρίζα του πολυωνύμου P(z) είναι και ρίζα του πολυωνύμου Q (z), να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x>0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f.

Β. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)\, f'(\xi_2) = 4.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Έστω η συνάρτηση

$f(x) = x^3 - 3x^2 συν2α + 2xσυν^2 2α + ημ^2 2α$, $x \in R$ και $α \in R$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

Β. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2001
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0\in(\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=\xi$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1-\eta\mu 2x$, $x\in R$, είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η εξίσωση $x^3+2x-1=\eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} 5x+5y=\lambda\omega \\ 2x+y=2\omega \\ x+3y=3\omega \end{cases} \qquad ,\lambda\in R$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σύστημα έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικές λύσεις.

β. Αν (x_1, y_1, ω_1) και (x_2, y_2, ω_2) είναι δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος, να αποδείξετε ότι

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \omega_1\omega_2$$

Β. Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τη γραμμή με εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

α. Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο (0,0) και Α(-6, 8) είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Η συνάρτηση $f : R \to R$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = 0,$$

όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(\alpha) = f(\beta)$

β. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

Β. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \frac{4}{x}, \quad x>0$$

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=λ, x=λ+1, όπου λ>0, είναι

$$E(\lambda) = 2\lambda+1+ 4\ell n\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$$

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν Ε(λ) γίνεται ελάχιστο.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x x\,\text{συν}t\,dt \quad ,\ x \in R$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = 2\text{συν}x - x\text{ημ}x \ ,\ x \in R.$$

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Β. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}\ , \quad x\in R-\{2\}$$

όπου α, β $\in$R.

α. Αν η ευθεία ε : y= 2x - 1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞, ποιες είναι οι τιμές των α, β;

β. Έστω Ω = $\left\{\frac{\alpha}{2}, \alpha, \beta, 2\beta\right\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, όπου οι α, β έχουν τις τιμές που προκύπτουν στο προηγούμενο ερώτημα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}(\lambda - 1)x^3 + 2x^2 + 2001, x \in R, \lambda \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

$$E = \{\lambda \in \Omega / \text{ η συνάρτηση } g \text{ είναι κυρτή στο } R\}$$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε.