ΑΝΑΛΥΣΗ 1

1. Να αποδείξετε ότι η μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $f(x+\psi)f(x-\psi)=f^2(x)-2f^2(\psi)$ για κάθε χ, ψ πραγματικό είναι η $f(\chi)=0$
2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ ώστε για κάθε χ πραγματικό να ισχύει: $f(1-x)-f(x)=x+2$
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+2\alpha x+\beta}{\chi^2+2\chi+3}$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η f να έχει σύνολο τιμών το $[-1,1)$
4. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού το $\Re$ ώστε $xf(\psi)+\psi f(x)=(x-\psi)f(x)f(\psi)$ για κάθε χ, ψ πραγματικό.
5. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $f(\chi)=2^X+9^X$ και $g(x)=11^x$.
6. Αν $f(x\psi)+f(\chi)+f(\psi)+3=x+\psi+\chi\psi$ για κάθε χ, ψ πραγματικό ι)Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f ιι) να βρεθεί το σύνολο τιμών της $g(x)=\frac{f(x)+2}{f^2(x)+3x}$
7. Να βρεθεί συνάρτηση f που για κάθε χ πραγματικό επαληθεύει τη σχέση: $f(x)+x\leq x^2\leq f(x+1)-x$
8. Να βρεθούν συναρτήσεις f που για κάθε χ, ψ πραγματικό επαληθεύουν τη σχέση: $f(x)f(\psi)+f(x)+f(\psi)+1=x\psi$
9. Αν f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\Re$ ώστε $g(0)=0$ και $2f(x)+f(1-\psi)+g(x)-g(\psi)=3(x+1)^2-6\psi$ να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.
10. Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$ με την ιδιότητα $(f_0f)(x)=\chi-2$ να αποδειχτεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\Re$
11. Αν f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\Re$ ώστε $g(x)=(f_0f)(x)$ για κάθε χ πραγματικό. Αν υπάρχει μοναδικό $\alpha\in\Re$ ώστε $g(\alpha)=\alpha$, να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=\alpha$
12. Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$ με την ιδιότητα$(f_0f_0\ldots{}_0f)(x)=3x-2$, να αποδείξετε ότι: $f(1)=1$
13. Αν f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\Re$ και οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, θ με $\alpha\neq0$, $(g_0f)(\theta)=\theta$ και $\alpha(f_0g)(x)=x^2+\beta\chi+\gamma$ να αποδείξετε ότι: $(\beta-\alpha)^2\geq 4\gamma$
14. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\frac{\alpha\chi+\beta}{\chi^2+1}$ να έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 4
15. Αν f γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$ και $0<f(\chi)<1$ να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{1+f^2(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα.
16. Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$ με την ιδιότητα $|f(x)-f(\psi)|\leq\alpha|\chi-\psi|$ για κάθε χ, ψ πραγματικό και α θετικό πραγματικό να αποδειχτεί ότι ι) η $g(x)=f(x)-\alpha\chi$ είναι φθίνουσα ιι)αν $\alpha\in(0,1)$, η εξίσωση $f(\chi)=\chi$ έχει το πολύ μια ρίζα.
17. Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$ είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε χ πραγματικό υπάρχει $\nu\in N^*$ ώστε $(f_0f_0\ldots{}_0f)(x)=\chi$ (ν φορές η f) να αποδειχτεί ότι $f(\chi)=\chi$
18. Να βρεθούν όλες οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις με την ιδιότητα $f[x+f(\psi)]=f(x+\psi)+1$ για κάθε χ, ψ πραγματικό
19. Αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$ με την ιδιότητα$f[f(x)+\psi]=x+f(\psi)$ για κάθε χ, ψ πραγματικό να αποδειχτεί: ι) η f είναι 1 προς 1 και ότι ιι)$f(\chi+\psi)=f(\chi)+f(\psi)$

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$, σύνολο τιμών της f το $\Re$ και $[f^{-1}{}_o g](x)=[g_o f^{-1}](x)$. Να αποδειχτεί ότι $g_o f=f_o g$.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$, σύνολο τιμών της g το $\Re$. Αν η g είναι αντιστρέψιμη και για κάθε χ πραγματικό ισχύει ότι $[f_0 g^{-1}{}_o f](x)=\chi$, να αποδειχτεί ότι: ι)η f είναι ‘1-1’ και ότι έχει σύνολο τιμών το $\Re$ ιι) $f_o f=g$ iii)$f_o g=g_o f$

22. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$, σύνολο τιμών της f το $\Re$. Αν $(f_o f)(x)+(g_o f)(x)=x$ για κάθε χ πραγματικό, να αποδειχτεί ότι ι) η f αντιστρέφεται ιι) ισχύει ότι: $f^{-1}(x)=f(x)+g(x)$

23. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $f[f(x)]+x^3=0$ για κάθε χ πραγματικό να αποδειχτεί ότι: ι) η f αντιστρέφεται ιι)η f δεν είναι γνησίως μονότονη ιιι)f(0)=0

24. Αν η συνάρτηση f είναι ‘1-1’ στο $\Re$ να αποδειχτεί ότι και η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+f^3(x)+f(x)+1$ είναι ‘1-1’

25. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $(f_0 f)(x)=f(x)+\alpha x$ για κάθε χ πραγματικό και α σταθερό πραγματικό διάφορο του μηδενός να αποδειχτεί ότι η f είναι ΄1-1’ και ότι f(0)=0

26. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$, σύνολο τιμών της f το $\Re$. Αν η $g_o f$ είναι ‘1-1’ να αποδειχτεί ότι η g είναι ‘1-1’.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$ και f(x)<g(x). Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα να αποδειχτεί ότι: $(f_o g)(x)<(g_o f)(x)$ για κάθε χ πραγματικό

28. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $(x+2)f(x)+xf(x+4)=(x^2+2x)f(x+3)$ για κάθε $\chi\in\Re$, να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

29. Αν $f(x)=\alpha^X-\chi$ να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα αν 0<α<1 και μετά να αποδείξετε: $\alpha^{\chi^2}-\alpha^{\chi+2}>\chi^2-(\chi+2)$

30. Αν f(x)=x+ln(x-3)-4 να εξετάσετε τη μονοτονία της και να λύσετε την f(χ)=0

31. Αν f(χ) είναι γνησίως φθίνουσα να λύσετε την $f(x^2+x)>f(3-x)$