§ 4-7, 4-8 Στροφορμή
Διατήρηση Στροφορμής

Όπως γνωρίζουμε **η ορμή** υλικού σώματος είναι έννοια/μέγεθος ιδιαίτερα χρήσιμο για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης των υλικών σωμάτων. Το αντίστοιχο μέγεθος της ορμής στερεού στη στροφική κίνηση των στερεών το ονομάζουμε **στροφορμή**.

Η έννοια/μέγεθος της στροφορμής χρησιμοποιείται γενικότερα για την περιγραφή κινήσεων στις οποίες η διεύθυνση της ταχύτητας μεταβάλλεται, όπως, π.χ, είναι η κυκλική κίνηση υλικού σώματος.

Η έννοια/μέγεθος στροφορμή αναφέρεται οπωσδήποτε σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή και σε κινούμενο υλικό σώμα ή σύστημα υλικών σωμάτων και ορίζεται μόνο σε σχέση με κάποιο σύστημα αναφοράς. Με άλλα λόγια ορίζεται ως προς το γεωμετρικό σημείο το οποίο, στη γλώσσα μας, αποδίδεται με τον όρο "<u>αρχή των αξόνων</u>" και συμβολίζεται διεθνώς με το **(O)**.

Στο σχολικό βιβλίο όμως, για την απλοποίηση της μελέτης ορισμένων φαινομένων, η στροφορμή, ως φυσικό μέγεθος, δεν ορίζεται γενικά αλλά κατά περίπτωση. Έτσι,

Α. Στροφορμή υλικού σημείου σε κυκλική κίνηση.

Ονομάζουμε στροφορμή υλικού σημείου που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r ως προς το κέντρο **O** της κυκλικής τροχιάς του το διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$ που έχει μέτρο $L = p\cdot r = mυr = mω^2r$, διεύθυνση τη διεύθυν ση του άξονα yy' που διέρχεται από το κέντρο (Ο) της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, δηλαδή έχει την ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα.

<u>Μονάδα στροφορμής</u>, όπως προκύπτει από τη σχέση ορισμού της, είναι το <u>$1 Kg.m^2/s$</u>.

B. <u>Στροφορμή στερεού σώματος που στρέφεται ως προς σταθερό άξονα</u>.

<u>Ονομάζουμε</u> στροφορμή στερεού σώματος που περιστρέφεται ως προς σταθερό άξονα yy' το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς τους, δηλαδή $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots$.

Όμως, τα υλικά σημεία ενός στερεού που (περι)στρέφεται ως προς (περί) σταθερό άξονα εκτελούν κυκλικές κινήσεις, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, τα κέντρα των οποίων είναι σημεία του άξονα περιστροφής. Επομένως, οι στροφορμές των υλικών σημείων του στερεού έχουν την ίδια κατεύθυνση – την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας. Για το λόγο αυτό το μέτρο της στροφορμής του στερεού σώματος ισούται με το άθροισμα των μέτρων των στροφορμών των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται, δηλαδή $L = L_1 + L_2 + \ldots \rightarrow$

$L = m_1 u_1 r_1 + m_2 u_2 r_2 + \ldots$, όπου $r_1, r_2 \ldots$ οι αποστάσεις των υλικών σημείων από τον άξονα περιστροφής.

Είναι $u_1 = \omega r_1$, $u_2 = \omega r_2$, ….. , οπότε

$L = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \ldots \longrightarrow$

$L = (m_1 r_1^2 + m_2 r^2 + \ldots)\,\omega \longrightarrow$ <u>$L = I \cdot \omega$</u>.

Επομένως, η στροφορμή ενός στερεού σώκατά τον άξονα περιστροφής του στερεού έχει μέτρο $L = I \cdot \omega$, διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού από τη φορά προς την οποία στρέφεται το στερεό, δηλαδή $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$.

Παρατήρηση

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση του σώματος περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του ονομάζεται σπιν – spin – για να τη διακρίνουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω άλλης κίνησης.

Για παράδειγμα, η Γη έχει στροφορμή spin λόγω της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της και στροφορμή λόγω της περιφοράς της γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή λόγω της τροχιακής της κίνησης.

Γ. Στροφορμή συστήματος σωμάτων.

Στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων ($\vec{L}_{ολ}$) ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων από τα οποία αποτελείται το σύστημα. Δηλαδή,

$\vec{L}_{ολ} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots$, όπου $\vec{L}_1, \vec{L}_2 \ldots$ είναι οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος.

Αν $\vec{L}_1 // \vec{L}_2 // \vec{L}_3 // \ldots$ μπορούμε να γράψουμε ότι $L_{ολ} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$, όπου $L_1, L_2, L_3, \ldots$ οι αλγεβρικές τιμές των στροφορμών των σωμάτων του συστήματος και $L_{ολ}$ η αλγεβρική τιμή της στροφορμής του συστήματος.

Αν $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \ldots = \vec{\omega}$ θα είναι

$$L_{ολ} = I_1 \cdot \omega + I_2 \cdot \omega + \ldots = (I_1 + I_2 + I_3 + \ldots)\,\omega \longrightarrow$$

$$L_{ολ} = I_Σ \cdot \omega .$$

Προσοχή

Για τη στροφορμή, είτε υλικού σημείου, είτε συστήματος υλικών σημείων, είτε στρεφόμενου στερεού δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι ό,τι ορίζεται σε σχέση με κάποιον άξονα.

Στην περίπτωση ενός στρεφόμενου στερεού περί σταθερό άξονα επειδή για τη στροφορμή του ειδικό ενδιαφέρον έχει η συνιστώσα της κατά τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη διατύπωση "στροφορμή ενός στρεφόμενου στερεού κατά τον άξονα περιστροφής" εννοώντας τη συνιστώσα της κατά τη διεύθυνση του άξονα και όχι τη διατύπωση "στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής.

Γενικότερη διατύπωση του Θ.Ν.Σ.Κ

Αρχικά ας θυμηθούμε πως προκύπτει η γενικότερη διατύπωση του Θ.Ν της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση.

Από τη σχέση $\vec{P}=m\vec{u}$ προκύπτει ότι αν σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα dt η ταχύτητα του υλικού σώματος μεταβληθεί κατά $d\vec{u}$ η ορμή του θα μεταβληθεί κατά $d\vec{P}=md\vec{u}$, οπότε $d\vec{P}/dt=md\vec{u}/dt=m\vec{a}_{cm}$.

Είναι $\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}_{cm}$, οπότε $\Sigma\vec{F}=d\vec{P}/dt$

Αντίστοιχα, από τη σχέση $\vec{L}=I\vec{\omega}$ προκύπτει ότι αν σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα dt η γωνιακή ταχύτητα ενός στρεφόμενου στερεού μεταβληθεί κατά $d\vec{\omega}$ η στροφορμή του θα μεταβληθεί κατά $d\vec{L}=Id\vec{\omega}$, οπότε

$d\vec{L}/dt=Id\vec{\omega}/dt=I\cdot\vec{a}_{\gamma}$

Είναι $\Sigma\vec{\tau}=I\cdot\vec{a}_{\gamma}$, οπότε $\Sigma\vec{\tau}=d\vec{L}/dt$.

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων είναι ίσος με τη συνισταμένη των ροπών που ενεργούν στο σώμα ή στο σύστημα.

Στην περίπτωση που οι ροπές και η στροφορμή έχουν την ίδια διεύθυνση μπορούμε να γράψουμε ότι $\Sigma\tau = dL/dt$. Δηλαδή,
το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ενεργούν σ' ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Παρατήρηση

1. Η διατύπωση του Θ.Ν.Σ.Κ με τη μορφή $\Sigma\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ είναι γενικότερη από τη διατύπωση με τη μορφή $\Sigma\vec{\tau} = I\cdot\vec{a}_\gamma$ γιατί ισχύει και σε περιπτώσεις σωμάτων μεταβλητής ροπής αδράνειας.

2. Ο Θ.Ν.Σ.Κ ισχύει και σε σύστημα σωμάτων.

Σ' ένα σύστημα σωμάτων η συνισταμένη όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται τόσο στις εξωτερικές δυνάμεις όσο και στις εσωτερικές, είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Όμως, η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική – οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται ως ζεύγη δυνάμεων που είναι αντίθετες και η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική –.

Έτσι, προκειμένου για σύστημα σωμάτων ισχύει ότι $\Sigma\vec{\tau}_{εξ} = d\vec{L}/dt$, όπου $\Sigma\vec{\tau}_{εξ}$ η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων και $\vec{L}$ η στροφορμή του συστήματος.

Στην περίπτωση που οι ροπές και η στροφορμή έχουν την ίδια διεύθυνση είναι $\Sigma\tau = dL/dt$.

Η διατήρηση της στροφορμής.

* ενεργούν

Όταν σ' ένα σώμα ή σ' ένα σύστημα σωμάτων δεν * εξωτερικές ροπές ή η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι μηδέν τότε η στροφορμή του σώματος ή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ισχύει ότι $\Sigma\vec{\tau}_{εξ} = d\vec{L}/dt$, οπότε αν $\Sigma\vec{\tau}_{εξ} = 0$ θα είναι $d\vec{L}/dt = 0 \rightarrow d\vec{L} = 0 \rightarrow \vec{L} = σταθ \rightarrow$

$\underline{\vec{L}_{αρχ.} = \vec{L}_{τελ.}}$

Είναι $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$. Έτσι εφόσον $\Sigma\tau_{εξ} = 0$ θα είναι $\vec{L} = I\vec{\omega} = σταθ.$

Επομένως, αν, λόγω ανακατανομής της μάζας εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων, μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή του ταχύτητα.

Δηλαδή, εφόσον $\vec{L} = σταθ \rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow$
$I_1\vec{\omega}_1 = I_2 \cdot \vec{\omega}_2$, οπότε στην περίπτωση που $\vec{\omega}_1 // \vec{\omega}_2$ θα είναι $\underline{I_1\omega_1 = I_2 \cdot \omega_2}$.

Παραδείγματα φαινομένων στα οποία η στροφορμή διατηρείται <u>στη σελίδα 125</u> του σχολικού βιβλίου.

<u>Να τα μελετήσετε προσεκτικά</u>.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν για τη μεταβολή της γραμμικής – μεταφορικής – ορμής ενός σώματος απαιτείται συνισταμένη εξωτερική δύναμη, για τη μεταβολή της στροφορμής του σώματος απαιτείται συνισταμένη εξωτερική ροπή δύναμης.

Αν ξαναδιατυπώσουμε, λοιπόν, τον πρώτο πρώτο νόμο του Νεύτωνα για την αδράνεια των περιστρεφόμενων σωμάτων – συστημάτων χρησιμοποιώντας την έννοια της στροφορμής θα πρέπει να πούμε ότι:

<u>Ένα σώμα ή ένα σύστημα σωμάτων δια-</u>

τηρεί την κατάσταση της στροφορμής του εφόσον η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών που δρούν στο σώμα ή στο σύστημα είναι μηδενική.

2. Όσο μεγαλύτερη είναι η στροφορμή τόσο μεγαλύτερη ροπή δύναμης απαιτείται για να προκληθεί μια οποιαδήποτε μεταβολή της

Όλοι ξέρουμε πόσο δύσκολα ισορροπούμε πάνω σ' ένα ακίνητο ποδήλατο. Οι τροχοί του ποδηλάτου δέν έχουν στροφορμή. Αν το κέντρο βάρους μας και τα σημεία στήριξης του ποδηλάτου δέν βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο δημιουργείται μία μικρή ροπή και πέφτουμε.

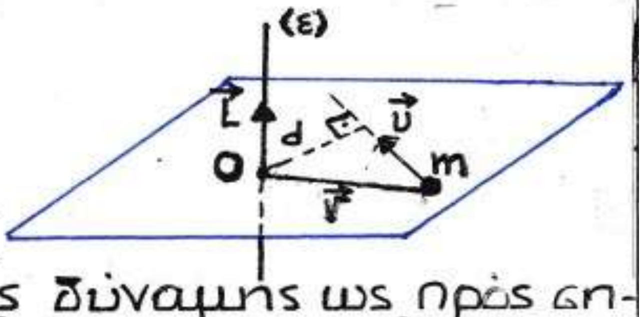
Όταν όμως το ποδήλατο κινείται, η στροφορμή των τροχών απαιτεί μεγαλύτερη ροπή για να προκληθεί οποιαδήποτε μεταβολή στο μέτρο ή στη διεύθυνση της στροφορμής. Αυτό καθιστά ευκολότερη την ισορροπία στο ποδήλατο που κινείται.

Βασικές παρατηρήσεις

για την επίλυση ασκήσεων.

1. Υπολογισμός της στροφορμής υλικού σημείου.

Γενικά, η στροφορμή υλικού σημείου που έχει μάζα m και ταχύτητα $\vec{υ}$ ως προς σημείο (Ο) είναι διάνυσμα που έχει χαρακτηριστικά ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της ροπής δύναμης ως προς σημείο (Ο). Δηλαδή, είναι διάνυσμα με διεύθυνση



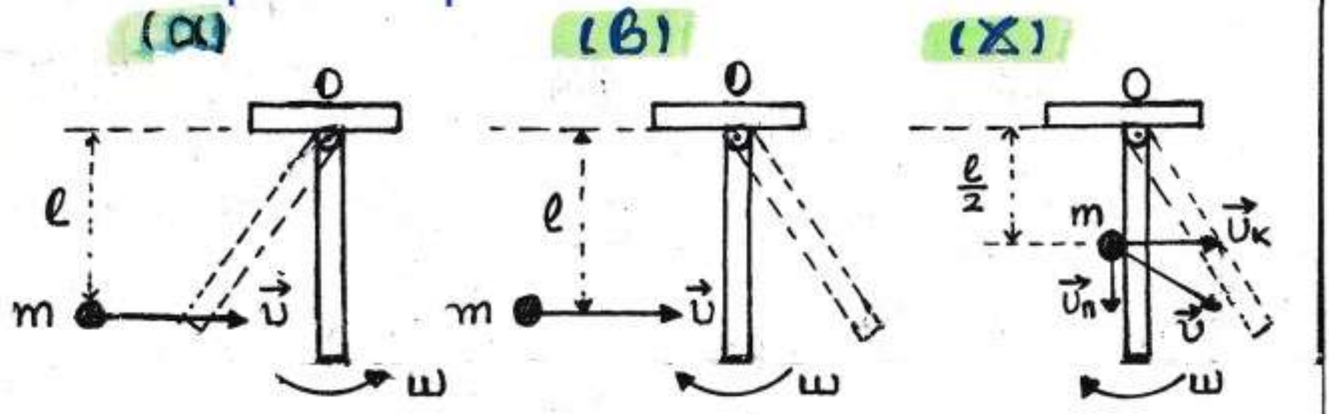
τη διεύθυνση ενός άξονα που διέρχεται από το σημείο (Ο) και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από το σημείο (Ο) και το φορέα της $\vec{υ}$.

Η φορά του διανύσματος καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού και έχει μέτρο $L = p \cdot d = mυ \cdot d$ όπου d η απόσταση του φορέα της $\vec{υ}$ από το (Ο).

2. Υπολογισμός της στροφορμής συστήματος σωμάτων.

Η στροφορμή $(\vec{L})$ ενός συστήματος σωμάτων ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων του συστήματος, δηλαδή $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots$. Στην περίπτωση όμως που οι στροφορμές έχουν την ίδια διεύθυνση μπορούμε να γράψουμε ότι $L = L_1 + L_2 + \dots$. όπου L η αλγεβρική τιμή της στροφορμής του συστήματος και $L_1, L_2, \dots$ οι αλγεβρικές τιμές των σωμάτων του συστήματος, αφού πρώτα θεωρήσουμε μία θετική φορά.

Παράδειγμα.

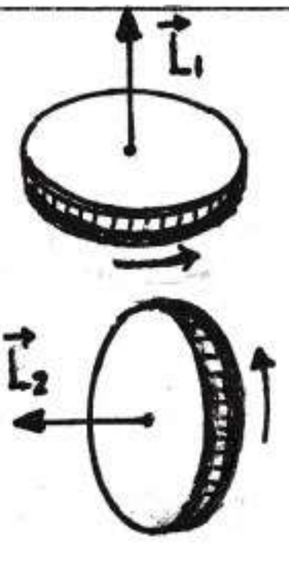


α. $L = mυℓ + I_{(o)} \cdot ω$

β. $L = mυℓ - I_{(o)} \cdot ω$

γ. $L = mυ_κ ℓ/2 - I_{(o)} \cdot ω$.

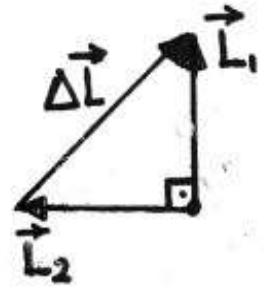
3. Υπολογισμός της μεταβολής της στροφορμής, $ΔL$, ενός στερεού.



Αν $\vec{L}_1$ είναι η αρχική και $\vec{L}_2$ η τελική στροφορμή ενός στερεού τότε

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 .$$

Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε το διανυσματικό διάγραμμα στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής στρέφεται κατά 90°.



Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής είναι

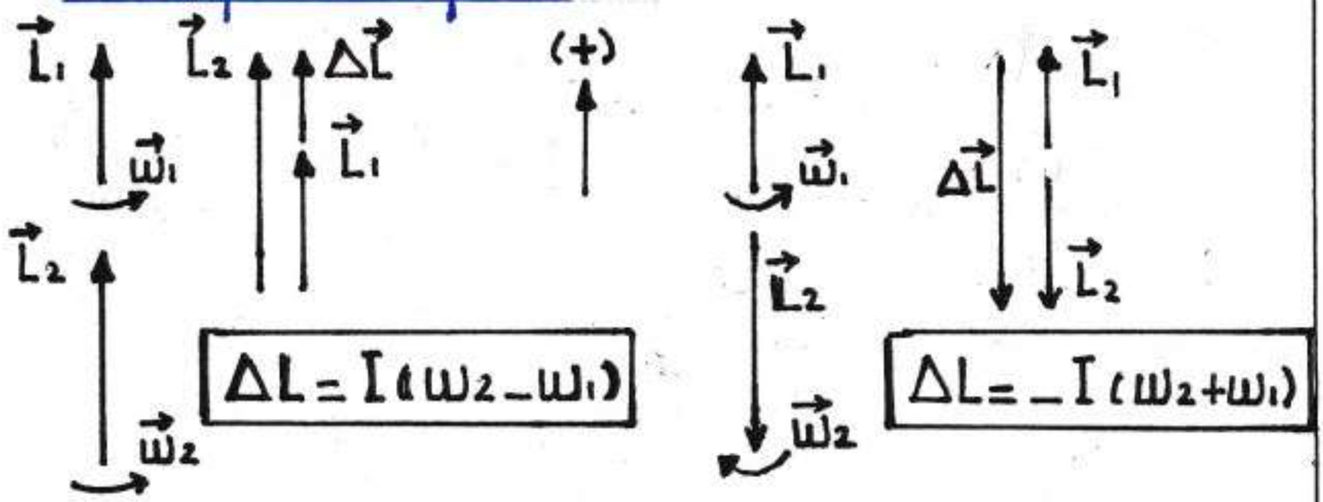
$$\Delta L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} .$$

Η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής είναι

$$\Delta L = L_2 - L_1 .$$

Αν ο άξονας περιστροφής είναι σταθερός, η αρχική και η τελική στροφορμή έχουν την ίδια διεύθυνση και κατά συνέπεια ο υπολογισμός της μεταβολής της στροφορμής γίνεται αλγεβρικά αφού θεωρήσουμε μία θετική φορά.

Παράδειγμα



$$\boxed{\Delta L = I(\omega_2 - \omega_1)}$$

$$\boxed{\Delta L = -I(\omega_2 + \omega_1)}$$

4. Ερώτηση. Αν η συνισταμένη των ροπών που δρούν σ'ένα σώμα είναι μηδενική αλλάζει η γωνιακή του ταχύτητα;

Απάντηση. Με βάση τη σχέση $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma$, αν $\Sigma\vec{\tau} = 0$, τότε θα είναι και $\vec{\alpha}_\gamma = 0$, οπότε η γωνιακή ταχύτητα μένει σταθερή.

Η απάντηση είναι σωστή μόνο αν γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας I του σώματος δε μεταβάλλεται _ δηλαδή αν έχουμε μηχανικό στερεό σώμα _. ~~Αν όχι~~

Αν όμως η ροπή αδράνειας μπορεί να αλλάξει, τότε μπορεί να αλλάξει και η γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης είναι ο άνθρωπος που κάθεται σε περιστρεφόμενο κάθισμα και καθώς περιστρέφεται μαζεύει ή τεντώνει τα χέρια του αλλάζοντας με τον τρόπο αυτό τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής. Παρόλο που δεν ενεργούν πάνω του εξωτερικές ροπές η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται και σε κάθε τέτοια περίπτωση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.

5. Εφαρμογές της αρχής διατήρησης της στροφορμής.

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής ισχύει σε κάθε:

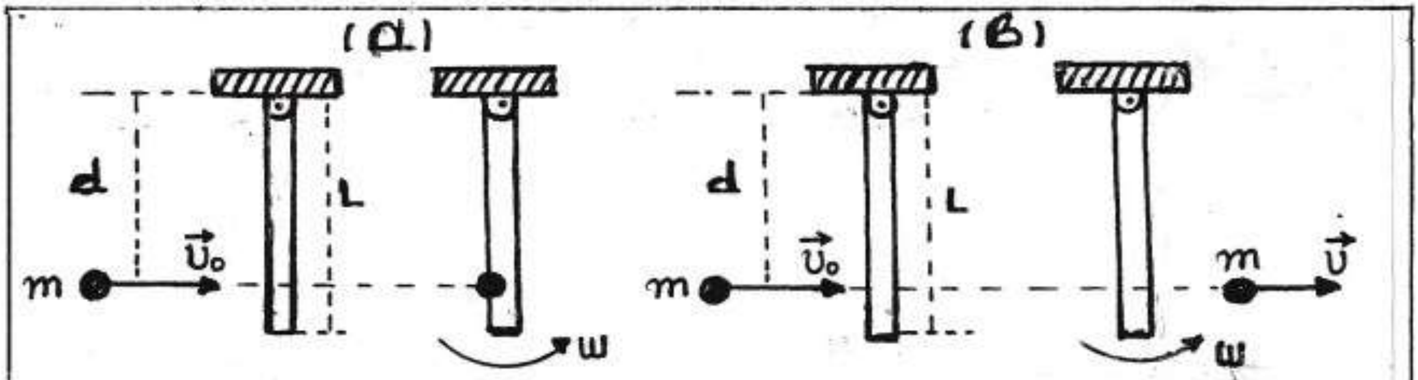
α. περίπτωση στην οποία η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών κατά τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν.

β. απότομη ανακατανομή της μάζας ενός συστήματος ακόμα και αν ενεργούν στο σύστημα εξωτερικές ροπές.

γ. περίπτωση σύγκρουσης στερεού σώματος με υλικό σημείο ή με άλλο στερεό σώμα.

Παράδειγμα

1. Σύγκρουση σφαίρας μάζας m με περιστρεφόμενη ράβδο μάζας M.



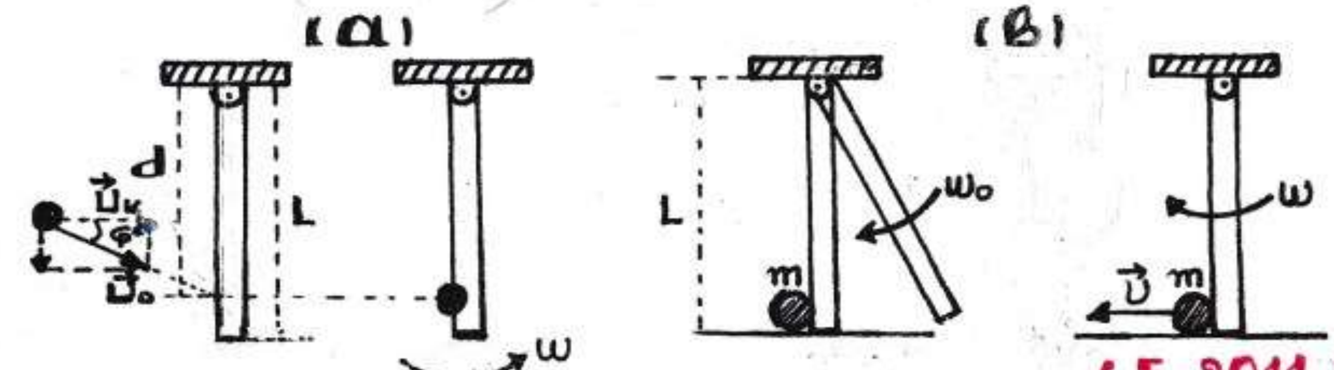
η Α.Δ της στροφορμής όταν:

α. η σφαίρα συσσωματώνεται

$$m\upsilon_o d = (I_p + md^2)\cdot\omega$$

β. η σφαίρα διαπερνά τη ράβδο.

$$m\upsilon_o d = I_p\cdot\omega + m\upsilon d$$



(Ε. 2011)

η Α.Δ της στροφορμής όταν:

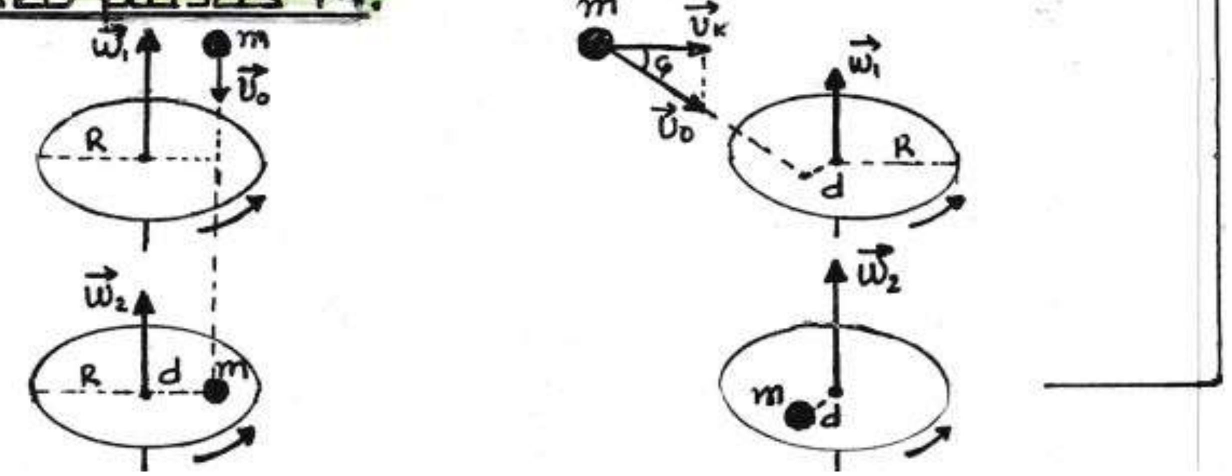
α. η σφαίρα πέφτει πλάγια στη ράβδο

$$m\upsilon_\kappa\cdot d = (I_p + md^2)\cdot\omega$$

β. η σφαίρα είναι αρχικά ακίνητη

$$I_p\cdot\omega_o = I_p\cdot\omega + m\upsilon L = I_p\cdot\omega + m\omega L^2.$$

2. Σύγκρουση σφαίρας m με περιστρεφόμενο δίσκο μάζας M.



η σφαίρα πέφτει κάθετα στο δίσκο	η σφαίρα πέφτει πλάγια στο δίσκο
$I_\Sigma \cdot \omega_1 = (I_\Sigma + md^2)\cdot\omega_2$	$I_\Sigma \omega_1 + m u_\kappa \cdot d = (I_\Sigma + md^2)\cdot\omega_2$

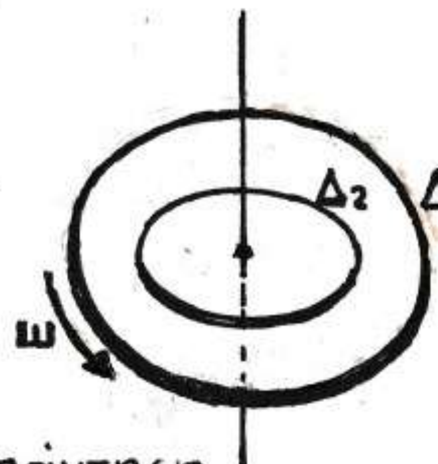
Δ. Ζιάμπας

Άσκηση (Ε.2013)

Ένας δίσκος Δ_1 με ροπή αδράνειας I_1 στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

Ένας δεύτερος δίσκος Δ_2 με ροπή αδράνειας $I_2 = I_1/4$, που αρχικά είναι ακίνητος, τοποθετείται πάνω στο δίσκο Δ_1, ενώ αυτός περιστρέφεται, έτσι ώστε να έχουν κοινό άξονα περιστροφής, που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δίσκων, όπως δείχνει το σχήμα. Μετά από λίγο οι δύο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω.

Αν L_1 είναι το μέτρο της αρχικής στροφορμής του δίσκου Δ_1, τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του δίσκου Δ_1 είναι:



α. 0 β. $L_1/5$ γ. $2L_1/5$

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.