§ 4-5, 4-6 · η έννοια **Ροπή αδράνειας**

· ο **Θεμελιώδης νόμος της Στροφικής κίνησης**

1. Στην περίπτωση της μεταφορικής κίνησης ενός υλικού σώματος, είτε πρόκειται για υλικό σημείο είτε για στερεό σώμα, η έννοια/μέγεθο "**μεταφορική ταχύτητα ή ταχύτητα του κέντρου μάζας $υ_{cm}$**" περιγράφει τη μεταφορική κινητική κατάσταση του υλικού σώματος την κάθε χρονική στιγμή, ενώ η έννοια/μέγεθος "**δύναμη**" εισάγεται ως αιτία μεταβολής της μεταφορικής κινητικής του κατάστασης.

Προκειμένου για υλικό σώμα κάθε μεταβολή της μεταφορικής κινητικής του κατάστασης περιγράφεται με την έννοια "**επιτάχυνση**" $α_{cm}$ και η σχέση ανάμεσα στην "**αιτία / δύναμη**" και το "**αποτέλεσμα/επιτάχυνση**" εκφράζεται με το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής μέσα από τη σχέση $ΣF = ma$.

Στο θεμελιώδη αυτό νόμο έναν ιδιαίτερο ρόλο παίζει - η συμβολιζόμενη με m - μάζα/μάζα αδράνειας. Αποτελεί μέτρο της αδράνειας - "δυσφορίας", "αντίστασης" - την οποία εκδηλώνει το σώμα κατά τη μεταβολή της μεταφορικής κινητικής του κατάστασης.

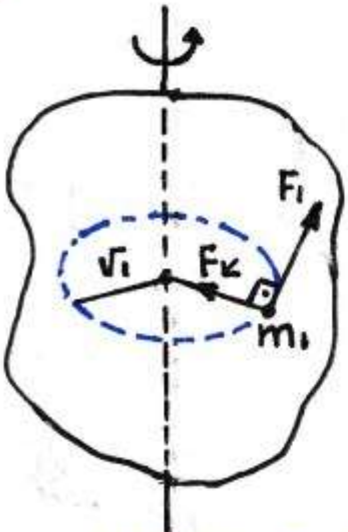
Μετά από όλα όσα αναφέρθηκαν το ερώτημα που τίθεται είναι·

Τι ισχύει αντίστοιχα για ένα στερεό σώμα σε στροφική κίνηση;

Στην περίπτωση ενός στρεφόμενου στερεού η αντίστοιχη με την ταχύτητα $υ_{cm}$ έννοια με την οποία περιγράφεται η στροφική κινητική του κατάσταση είναι **η γωνιακή ταχύτητα ω** και η αντίστοιχη προς την επιτάχυνση $α_{cm}$ έννοια είναι **η γωνιακή επιτάχυνση $α_γ$**. Όσο για την "αιτία" κάθε μεταβολής της πρέπει να θεωρήσουμε τη συνισταμένη/ολική **ροπή**.

Ποιά έννοια όμως θα εκφράσει την αδράνεια "δυσφορία", "αντίσταση" του στρεφόμενου στερεού στις μεταβολές της στροφικής του κίνησης;

Αν θεωρήσουμε το στρεφόμενο στερεό ως "σύνολο υλικών σημείων" τα οποία κινούνται κυκλικά, η συνολική δύναμη **F** που ασκείται στο καθένα από αυτά αναλύεται σε δύο συνιστώσες·



α. σε συνιστώσα $F_1 = F_{επ}$ εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, η οποία ευθύνεται για τις μεταβολές/αυξομειώσεις του μέτρου της επιτρόχιας ταχύτητας $υ_1 = υ_{επ}$, αντιστοιχεί στην επιτρόχια επιτάχυνση $α_1 = α_{επ}$ και η ροπή της κατά τον άξονα περιστροφής είναι $τ_1 = F_1 \cdot r_1$ και

β. σε συνιστώσα $F_2 = F_κ$ με κατεύθυνση πρός το κέντρο της κυκλικής τροχιάς η οποία ευθύνεται για τη διαρκή αλλαγή στην κατεύθυνση της επιτρόχιας ταχύτητας, αντιστοιχεί στην κεντρομόλο επιτάχυνση $α_2 = α_κ$ και η ροπή της κατά τον άξονα περιστροφής είναι μηδενική.

Αν εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής σε ένα από τα υλικά σημεία, μάζας m_1, του στερεού θα έχουμε ότι:

$F_1 = m_1 \cdot α_1$, οπότε $F_1 \cdot r_1 = m_1 \cdot α_1 \cdot r_1$ και

επειδή $α_1 = α_{επ} = α_γ \cdot r_1$ θα είναι

$$\underline{F_1 \cdot r_1 = m_1 \cdot α_γ \cdot r_1^2}$$

Η ποσότητα $F_1 \cdot r_1$ είναι η ροπή της ασκούμενης στο υλικό σημείο συνισταμένης δύναμης **F** και $α_γ$ η κοινή για όλα τα υλικά σημεία τού στερεού γωνιακή επιτάχυνση.

Αν κάνουμε το ίδιο για όλα τα υλικά σημεία του στερεού και προσθέσουμε κατά μέλη θα έχουμε ότι $\Sigma F_i \cdot r_i = \Sigma m_i \cdot a_\gamma \cdot r_i^2$

Η ποσότητα $\Sigma F_i \cdot r_i$ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών $\Sigma\tau$ που δέχονται τα τα υλικά σημεία του στερεού.

Επομένως $\Sigma\tau = \Sigma m_i \cdot a_\gamma \cdot r_i^2$.

Η τιμή της a_γ είναι ο κοινός παράγων σε όλους τους όρους του αθροίσματος, οπότε

$$\Sigma\tau = a_\gamma \cdot \Sigma m_i r_i^2$$

Έτσι, καταλήγουμε σε μία σχέση αναλογίας ανάμεσα στην αιτία που είναι η συνολική ροπή και στο αποτέλεσμα που είναι η γωνιακή επιτάχυνση.

Η σχέση αυτή είναι η αντίστοιχη της σχέσης $\Sigma F = m \cdot a$ που ισχύει στη μεταφορική κίνηση του στερεού. Στη θέση της μάζας "διακρίνουμε" την ποσότητα $I = \Sigma m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots$

Η ποσότητα αυτή αποτελεί έννοια/μέγεθος η οποία στη μηχανική του στρεφόμενου στερεού **"παίζει το ρόλο που παίζει η μάζα αδράνειας στη μηχανική του υλικού σημείου"!**

Λέγεται ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής και συμβολίζεται με το κεφαλαίο γράμμα (**I**), αρχικό της λατινικής λέξης Inertia που σημαίνει μαλθακότητα, απραξία (αδράνεια).

Επομένως, ροπή αδράνειας **I** ενός στερεού ως προς έναν άξονα περιστροφής ονομάζεται το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το στερεό επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής.

Η εξίσωση που προκύπτει $\Sigma\tau = I \cdot a_\gamma$, που στη διανυσματική της μορφή γράφεται $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{a}_\gamma$ είναι η μαθηματική έκφραση ενός νόμου ο οποίος λέγεται θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης και αποτελεί μία εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για το φαινόμενο στροφική κίνηση.

Σύμφωνα με το νόμο αυτό,

Αν ένα στερεό σώμα, που στρέφεται ή είναι ακίνητο και μπορεί να περιστραφεί, ως προς σταθερό άξονα, δέχεται ροπές κατά τον άξονα περιστροφής με συνισταμένη διάφορη του μηδενός το στερεό στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση η οποία έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης ροπής είναι ανάλογη της συνισταμένης ροπής και αντιστρόφως ανάλογη πρός τη ροπή αδράνειας του στερεού (υπολογισμένης ως προς τον άξονα περιστροφής).

Δηλαδή, ισχύει ότι,

$$\boxed{\vec{a}_x = \Sigma\vec{\tau}/I \longleftrightarrow \Sigma\vec{\tau} = I\cdot\vec{a}_x}$$

και εφόσον οι ροπές έχουν την ίδια διεύθυνση – τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής – θα είναι

$$\boxed{\Sigma\tau = I\cdot a_x},$$

όπου $\Sigma\tau$ το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δέχεται το στερεό και a_x η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης με την οποία στρέφεται.

2. Σε τι αναφέρεται η ροπή αδράνειας, ποια είναι η μονάδα μέτρησης της, από τι εξαρτάται η τιμή της και τι εκφράζει;

Η έννοια/μέγεθος ροπή αδράνειας αναφέρεται σε συγκεκριμένο σώμα και σε συγκεκριμένο άξονα.

Μονάδα μέτρησής της, όπως προκύπτει από τη σχέση ορισμού της, είναι το $1\,Kg\cdot m^2$.

Η τιμή της εξαρτάται από το "πώς κατανέμεται" η μάζα του στερεού σε σχέση με τον άξονα περιστροφής.

Εκφράζει την αδράνεια – "δυσφορία", "αντίσταση" – του στερεού κατά τη μεταβολή της στροφικής κινητικής του κατάστασης περί το συγκεκριμένο άξονα.

Όσο μεγαλύτερη ροπή αδράνειας παρουσιάσει το στερεό τόσο μικρότερη θα είναι η γωνιακή επιτάχυνση την οποία θα "αποδεχθεί" υπό την επίδραση ορισμένης ροπής.

3. Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο στερεό το οποίο μπορεί να περιστραφεί ως προς δύο ή περισσότερους άξονες που είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Ως προς τον καθένα από αυτούς το στερεό έχει μια ορισμένη τιμή ροπής αδράνειας.

Είναι δυνατόν κάποιες από τις τιμές αυτές να συμπίπτουν; Ποια από τις τιμές αυτές είναι η μικρότερη;

Στην απάντηση οδηγεί το Θεώρημα Steiner. Σύμφωνα με αυτό,

Αν I_{cm} είναι η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και I η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς οποιονδήποτε άξονα παράλληλο προς αυτόν, ισχύει ότι

$$I = I_{cm} + Md^2$$, όπου

M η μάζα του στερεού και d η απόσταση των δύο αξόνων.

Επομένως, οι τιμές για τις ροπές αδράνειας συμπίπτουν εφόσον οι άξονες ισαπέχουν από το κέντρο μάζας. Η μικρότερη από όλες είναι η I_{cm}.

Παρατηρήσεις

α. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού έχει τόσες τιμές όσοι και οι άξονες περί τους οποίους μπορεί να περιστραφεί.

β. Αν στερεό που δε στρέφεται $-\vec{\omega}_0 = 0-$ αλλά μπορεί να περιστραφεί περί σταθερό άξονα δεχθεί συνισταμένη ροπή $\Sigma\vec{\tau} \neq 0$ θα στραφεί με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma \uparrow\uparrow \Sigma\vec{\tau}$ (1) (Θ.Ν.Σ.Κ). Αν δε $\Sigma\vec{\tau}$: σταθερή, επειδή $\vec{a}_\gamma = \Sigma\vec{\tau}/I$ θα είναι και $\vec{a}_\gamma$: σταθερή, οπότε $\vec{a}_\gamma = \Delta\vec{\omega}/\Delta t = (\vec{\omega}-\vec{\omega}_0)/\Delta t$

$\longleftrightarrow \vec{\alpha}_x = \vec{\omega}/\Delta t \longrightarrow \vec{\alpha}_x \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ (2).

Από τις (1) και (2) $\longrightarrow \vec{\omega} \uparrow\uparrow \Sigma\vec{\tau}$, δηλαδή το στερεό θα στραφεί προς την κατεύθυνση που τείνει να περιστρέψει το στερεό η συνισταμένη ροπή, ενώ η στροφική του κίνηση θα είναι Ομαλά Επιταχυνόμενη Στροφική Κίνηση _ α_x: σταθ_ με $\omega_0 = 0$ _.

γ. Ο Θ.Ν.Σ.Κ ισχύει και σε συστήματα σωμάτων. Στην περίπτωση αυτή για τη συνισταμένη όλων των ροπών που δέχεται το σύστημα, δηλαδή των ροπών που οφείλονται τόσο στις εξωτερικές δυνάμεις όσο και στις εσωτερικές, ισχύει ότι $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_x$.

Είναι $\Sigma\vec{\tau} = \Sigma\vec{\tau}_{εσ} + \Sigma\vec{\tau}_{εξ}$.

_Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, καθόσον οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται ως ζεύγη δυνάμεων που είναι αντίθετες και η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους, ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική $\tau = F \cdot d \xrightarrow{d=0} \tau = 0$). Επομένως $\Sigma\vec{\tau}_{εξ} = I\vec{\alpha}_x$

δ. Ο Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει τόσο σε στροφικές κινήσεις ως προς σταθερό άξονα όσο και σε περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται (ελεύθερος άξονας).

Αυτό συμβαίνει στις σύνθετες κινήσεις στις οποίες το στερεό εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως π.χ συμβαίνει στην περίπτωση ενός τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

<u>Για να ισχύει όμως ο Θ.Ν.Σ.Κ σε σύνθετες κινήσεις, θα πρέπει ο άξονας περιστροφής του στερεού:</u>

1. να διέρχεται από το κέντρο μάζας του,
2. να είναι άξονας συμμετρίας, και
3. να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης (π.Χ η κίνηση του γιο_γιό).

ε. Μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα τον άξονα περιστροφής για τον οποίο θα εφαρμόσουμε το Θ.Ν.Σ.Κ. Οι σχέσεις που δίνουν τη συνισταμένη ροπή **Στ** και τη ροπή αδράνειας **I** θα είναι διαφορετικές για τον κάθε άξονα, το τελικό συμπέρασμα όμως θα είναι το ίδιο οποιον άξονα και αν επιλέξουμε.

στ. Ο Νόμος της αδράνειας είναι γενικός και ισχύει και στην περίπτωση της στροφικής κίνησης. Δηλαδή,
αν η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που δρούν σ' ένα στερεό είναι μηδέν αν το στερεό δε στρέφεται θα συνεχίσει να μη στρέφεται, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

ζ. Αδράνεια ενός στερεού, στην περίπτωση της στροφικής κίνησης, ονομάζεται η ιδιότητα του στερεού που εκδηλώνεται με την τάση του στερεού να διατηρεί τη στροφική κινητική του κατάσταση και να αντιστέκεται σε κάθε προσπάθεια μεταβολής της.

Μέτρο της αποτελεί η ροπή αδράνειας.

Η ροπή αδράνειας όμως, όπως προκύπτει από τη σχέση ορισμού της, δεν εξαρτάται μόνο από τη μάζα του στερεού, όπως συμβαίνει με την αδράνεια στη μεταφορική – γραμμική – κίνηση. Εξαρτάται και από την κατανομή της μάζας του στερεού σε σχέση με τον άξονα περιστροφής, πράγμα που δε συμβαίνει στη μεταφορική κίνηση!

Ετσι, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση του μεγάλου τμήματος της μάζας του στερεού από τον άξονα περιστροφής, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ροπή αδράνειας και όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας, τόσο πιο δύσκολα μεταβάλλεται η στροφική κινητική του κατάσταση.

Αν περιστρέφεται δύσκολα σταματά· αν είναι ακίνητο, δύσκολα τίθεται σε περιστροφική κίνηση.

Το στοιχείο αυτό το εκμεταλεύεται, π.χ ο σχοινοβάτης του τσίρκου, που κρατάει ένα μακρύ κοντάρι που τον βοηθά να ισορροπεί.

Το κοντάρι έχει αξιόλογη ροπή αδράνειας καθόσον το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του είναι μακριά από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή από τη μέση του σχοινοβάτη.

Αν ο σχοινοβάτης αρχίσει να ανατρέπεται, ένα σφιχτό πιάσιμο του κονταριού το κάνει να τείνει να περιστραφεί. Η ροπή αδράνειας όμως του κονταριού αντιστέκεται στην περιστροφή, δίνοντας έτσι στο σχοινοβάτη αρκετό χρόνο για να ξαναβρεί την ισορροπία του. Όσο πιο μακρύ είναι το κοντάρι τόσο καλύτερα.

Εξαιτίας της ροπής αδράνειας ένας συμπαγής κύλινδρος που ξεκινά από την ηρεμία θα κυλήσει σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο γρηγορότερα απο έναν κοίλο κύλινδρο της ίδιας μάζας.

Ο κοίλος κύλινδρος έχει συγκεντρωμένη τη μάζα του πιο μακριά από τον άξονα περιστροφής με συνέπεια να έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, και γι' αυτό αρχίζει να κυλά πιο δύσκολα. Κάθε συμπαγής κύλινδρος θα "νικήσει" οποιονδήποτε κοίλο κύλινδρο που βρίσκεται στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο.

Αυτό δε φαίνεται εύλογο με την πρώτη ματιά. Ας θυμηθούμε όμως ότι δύο αντικείμενα, ανεξάρτητα από τη μάζα τους, πέφτουν μαζί, όταν τα αφήσουμε να πέσουν από το ίδιο ύψος. Θα ολισθαίνουν επίσης μαζί, όταν τα αφήσουμε πάνω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο. Όταν όμως συνεκτιμήσουμε την περιστροφή, τότε το αντικείμενο με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, συγκριτικά με το ίδιο του το βάρος, παρουσιάζει μεγαλύτερη αντίσταση στη μεταβολή της κινητικής του κατάστασης.

Επομένως, ένας δίσκος θα κυλήσει πιο γρήγορα από ένα δακτύλιο της ίδιας μάζας στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο.

Α. Ζαχαρής

Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων

1. Υπολογισμός της ροπής αδράνειας σε διάφορα συστήματα.

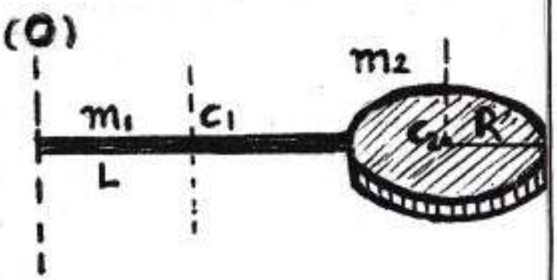
α. Σύστημα υλικών σημείων.

Η ροπή αδράνειας δύο ή περισσοτέρων υλικών σημείων, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, ως προς έναν άξονα δίνεται από τη σχέση $I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$, όπου $m_1, m_2, \ldots$ οι μάζες των υλικών σημείων και $r_1, r_2, \ldots$ οι αποστάσεις τους αντίστοιχα από τον άξονα.

β. Σύστημα στερεών σωμάτων.

Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας δύο ή περισσοτέρων στερεών σωμάτων ως προς κάποιον άξονα περιστροφής, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Steiner για κάθε σώμα ως προς τον άξονα αυτόν και στη συνέχεια προσθέτουμε τις ροπές αδράνειας που υπολογίσαμε.

Παράδειγμα



Στο διπλανό σχήμα, για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας I του συστήματος ράβδος–δίσκος ως προς τον άξονα περιστροφής (O) γράφουμε ότι $I = I_{\rho(O)} + I_{\delta(O)}$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner είναι

$$I_{\rho(O)} = I_{cm} + m_1 (L/2)^2 = m_1 L^2/12 + m_1 L^2/4 \text{ και}$$

$$I_{\delta(O)} = I_{cm} + m_2 (L+R)^2 = m_2 R^2/2 + m_2 (L+R)^2.$$

Επομένως, θα είναι

$$I = m_1 \cdot L^2/3 + m_2 \cdot R^2/2 + m_2(L+R)^2.$$

γ. Σύστημα στερεού και υλικών σημείων

Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας, ενός στερεού στο οποίο έχουν προσδεθεί μικρά σωματίδια, ως προς κάποιον άξονα, υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του στερεού και στη συνέχεια προσθέτουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα για κάθε σωματίδιο.

δ. Στερεό μετά από αφαίρεση ενός τμήματος

Αν από ένα στερεό που έχει ροπή αδράνειας **I** αφαιρέσουμε ένα τμήμα του που από μόνο του έχει ροπή αδράνειας I_1, τότε το τμήμα του στερεού που θα μείνει θα έχει ροπή αδράνειας, ως πρός τον ίδιο άξονα, $I_2 = I - I_1$

2. Εφαρμογή του Θ.Ν.Σ.Κ ως πρός σταθερό άξονα.

Σειρά εργασίας.

α. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις πού ενεργούν στο στερεό σώμα.

β. Αν οι δυνάμεις δεν είναι παράλληλες ή κάθετες μεταξύ τους τις αναλύουμε σε συνιστώσες ως πρός ορθογώνιους άξονες (x) και (y) και υπολογίζουμε τις συνιστώσες.

γ. Υπολογίζουμε τη συνισταμένη ροπή $\Sigma\tau$ των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως πρός τον άξονα περιστροφής.

δ. Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.

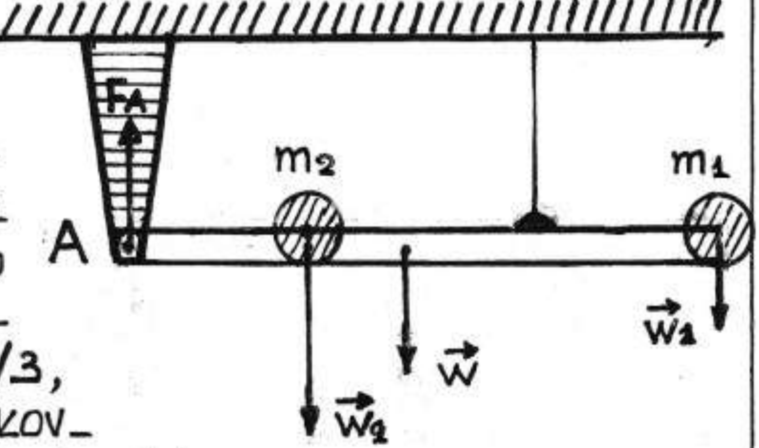
ε. Εφαρμόζουμε τη σχέση $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_\gamma$.

Παρατήρηση

Κατά την εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου

μπορούμε να θεωρούμε ως θετική φορά για τις ροπές τη φορά περιστροφής του στερεού.

Παράδειγμα



Στο σύστημα του σχήματος η ομογενής οριζόντια ράβδος έχει μάζα m και μήκος L, ενώ τα δύο σημειακά σφαιρίδια έχουν μάζες $m_1 = m/3$, $m_2 = 3m/2$ και βρίσκονται σε απόσταση $l_1 = L$, $l_2 = L/3$ αντίστοιχα από την άρθρωση A. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος μόλις κόψουμε το νήμα που το συγκρατεί στην αρχική τo θέση. Δίνεται: $I_{p(cm)} = mL^2/12$.

Απάντηση

Στο σύστημα, μόλις κόψουμε το νήμα, ασκούνται η δύναμη από την άρθρωση F_A και τα βάρη της ράβδου w και των δύο σφαιριδίων w_1 και w_2. Είναι:

$$\Sigma\tau_{(A)} = mgL/2 + mgL/3 + 3mgL/6 = $$
$$= 4mgL/3.$$

$$I_{(A)} = mL^2/12 + m(L/2)^2 + mL^2/3 + (3m/2)(L/3)^2 =$$
$$= 5mL^2/6.$$

Ισχύει ότι $\Sigma\tau_{(A)} = I_{(A)} \cdot a_\gamma$ (Θ.Ν.Σ.Κ) $\rightarrow$

$$4mgL/3 = (5mL^2/6) \cdot a_\gamma \leftrightarrow a_\gamma = 8g/5L$$

Προσοχή

Η γωνιακή επιτάχυνση που υπολογίσαμε αφορά τη χρονική στιγμή που η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση. Αμέσως μετά, μόλις η ράβδος στραφεί κατά γωνία φ, η συνισταμένη ροπή αλλάζει – μειώνεται – άρα και η γωνιακή επιτάχυνση αλλάζει – μειώνεται –. Επομένως η στροφική κίνηση δεν είναι ομαλά επιτα- και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις γνωστές σχέσεις της ομαλά επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση συστήματος δύο ή περισσοτέρων στερεών σωμάτων, αφού σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε όλα τα κινούμενα στερεά, εφαρμόζουμε για το καθένα χωριστά το θεμελιώδη νόμο.

Συγκεκριμένα, για τα στερεά που εκτελούν μεταφορική κίνηση εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση, ενώ για τα στερεά που εκτελούν στροφική κίνηση το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση.

3. Εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου στις σύνθετες κινήσεις.

Όταν σε ένα στερεό ασκούνται διάφορες δυνάμεις και δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής, το στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση.

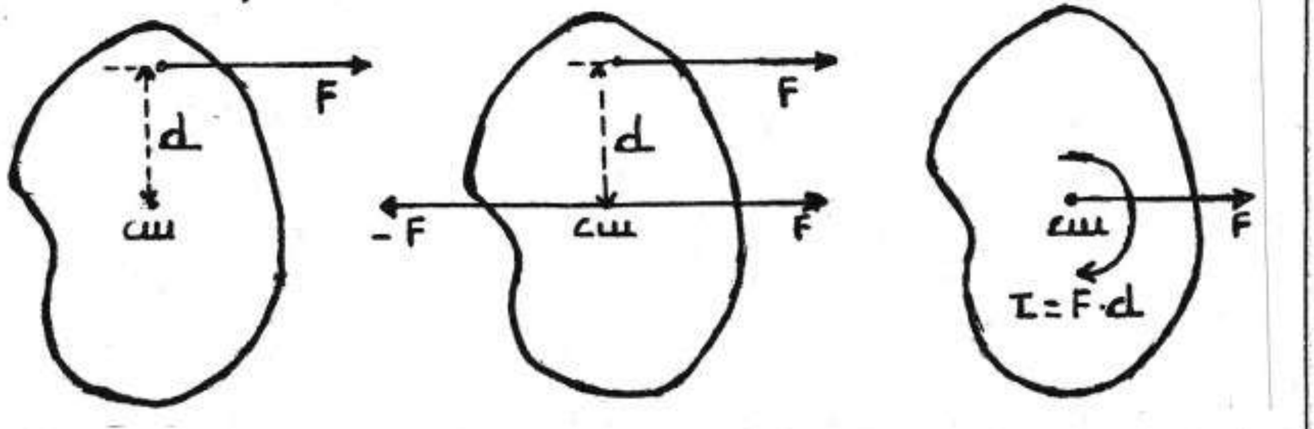
Όσον αφορά το κέντρο μάζας του στερεού ο ορισμός του μας λέει ότι η κίνησή του προσδιορίζεται, αν υποθέσουμε ότι όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό έχουν σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας.

Επομένως σε κάθε τέτοια περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας a_{cm}, εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση, θεωρώντας ότι όλες οι δυνάμεις που ενεργούν στο στερεό έχουν σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας.

Πώς όμως μπορούμε να αλλάξουμε το

σημείο εφαρμογής μιας δύναμης;

Ας παρατηρήσουμε με προσοχή τα παρακάτω σχήματα.



Στην πρώτη εικόνα βλέπουμε το στερεό πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη F.

Στη δεύτερη εικόνα βλέπουμε το ίδιο στερεό, όπου έχουμε υποθέσει ότι στο κέντρο μάζας ασκείται μία ίδια δύναμη F και η αντίθετή της −F. Το σύστημα των τριών δυνάμεων είναι ισοδύναμο με το αρχικό αφού οι δύο δυνάμεις πού προσθέσαμε έχουν μηδενική συνισταμένη.

Όμως η αρχική δύναμη F και η −F αποτελούν ζεύγος δυνάμεων που δεν έχει καμία επίδραση στη μεταφορική κινητική κατάσταση του στερεού παρά μόνο στη στροφική.

Επομένως οδηγούμαστε στο ισοδύναμο σύστημα της τρίτης εικόνας, όπου στο στερεό ασκείται μία δύναμη F στο κέντρο μάζας, η οποία θα καθορίσει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού και μία ροπή του ζεύγους $\tau = F \cdot d$, που θα καθορίσει τη στροφική κίνηση του στερεού ως πρός έναν υποθετικό άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας

Επομένως για τη σύνθετη κίνηση του στερεού γράφουμε:

$\Sigma F = m \cdot a_{cm}$, Θ.Ν.Μ.Κ για το κέντρο μάζας.

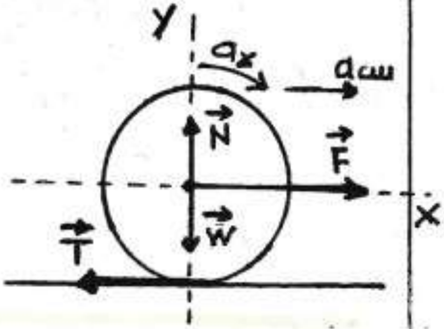
$\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot a_{\gamma}$, Θ.Ν.Σ.Κ ως πρός το κέντρο

Συμπέρασμα.

Το κέντρο μάζας ενός αρχικά ακίνητου στερεού σώματος στο οποίο ασκούνται σταθερές δυνάμεις εκτελεί Ε.Ο. Επιτ. μεταφορική κίνηση, προς την κατεύθυνση της ΣF, ανεξάρτητα από το πού βρίσκεται στο σώμα το σπ- το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων αυτών.

Παραδείγματα

α. Στον τροχό του σχήματος, που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ασκείται οριζόντια δύναμη F. Ισχύει ότι:



Από το Θ.Ν για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας.

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow N - w = 0 \longleftrightarrow N = w = mg$$

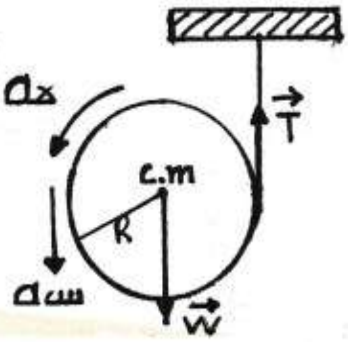
$$\Sigma F_x = m a_{cm} \longrightarrow F - T = m a_{cm} \quad (1).$$

Από το Θ.Ν για τη στροφική κίνηση του στερεού ως προς το κέντρο μάζας.

$$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_\gamma \longrightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot a_\gamma \quad (2).$$

Επίσης ισχύει ότι: $a_{cm} = a_\gamma \cdot R$. (3).

β. Ο δίσκος του σχήματος έχει έχει τυλιγμένο στον περιμετρικό του κύκλο νήμα του οποίου το άλλο άκρο είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Ισχύει ότι:



Από το Θ.Ν για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας.

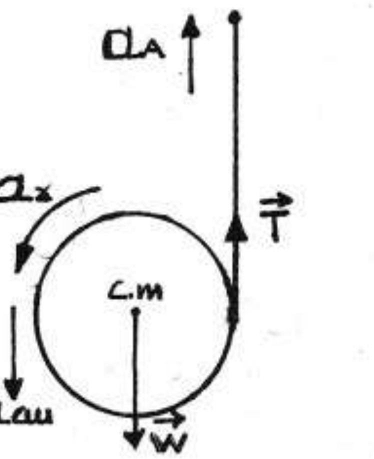
$$\Sigma F = m \cdot a_{cm} \longrightarrow w - T = m a_{cm} \quad (1).$$

Από το Θ.Ν για τη στροφική κίνηση του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας.

$$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_\gamma \longrightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot a_\gamma \quad (2).$$

Αν το νήμα δε γλιστρά στον περιμετρικό κύκλο του δίσκου, το υλικό σημείο του περιμετρικού κύκλου του δίσκου που εφάπτεται στο νήμα κάθε στιγμή θα έχει μηδενική επιτάχυνση, οπότε λόγω της αρχής της επαλληλίας θα είναι $a_{cm} - a_{επ} = 0 \rightarrow a_{cm} = a_{επ} = a_γ \cdot R$ (3).

γ. Ο δίσκος του σχήματος έχει τυλιγμένο στον περιμετρικό τὃ κύκλο νήμα του οποίου το ελεύθερο άκρο ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση a_A. Ισχύει ότι:



Από το Θ.Ν για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας.

$\Sigma F = m a_{cm} \rightarrow w - T = m a_{cm}$ (1).

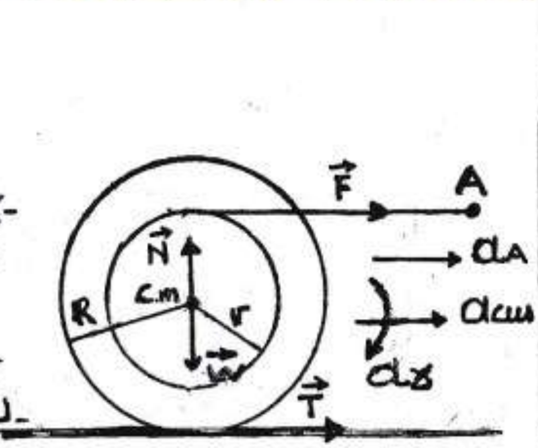
Από το Θ.Ν για τη στροφική κίνηση ως προς το κέντρο μάζας.

$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_γ \rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot a_γ$ (2).

Αν το νήμα δε γλιστρά στον περιμετρικό κύκλο του δίσκου, το υλικό σημείο του περιμετρικὃ κύκλου του δίσκου που εφάπτεται στο νήμα θα έχει κάθε στιγμή κατακόρυφη επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του άκρου του νήματος a_A, οπότε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας θα είναι $a_{επ} - a_{cm} = a_A \leftrightarrow a_{επ} = a_A + a_{cm} \rightarrow$

$a_γ \cdot R = a_A + a_{cm}$ (3).

δ. Ο δίσκος του σχήματος έχει ακτίνα R και έχει τυλιγμένο νήμα σε εσωτερικό αυλάκι ακτίνας r. Το νήμα το τραβάμε με οριζόντια δύναμη F με αποτέλεσμα το ελεύθερο άκρο A να κινείται με επιτάχυνση a_A. Ισχύει ότι:



Από το Θ.Ν για τη μεταφορική κίνηση τȣ κέντρου μάζας.

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w = 0 \leftrightarrow N = w = mg$

$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F + T = m \cdot a_{cm}$ (1).

Από το Θ.Ν για τη στροφική κίνηση ως πρός το κέντρο μάζας.

$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_x \rightarrow F \cdot r - T \cdot R = I_{cm} \cdot a_x$ (2).

Αν ο τροχός κυλάει χωρίς ολίσθηση

$a_{cm} = a_x \cdot R$ (3).

Αν το νήμα δε γλιστρά στο εσωτερικό αυλάκι, το υλικό σημείο του περιμετρικού κύκλου απο το εσωτερικό αυλάκι που εφάπτεται στο νήμα έχει κάθε στιγμή οριζόντια επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του άκρου του νήματος a_A, οπότε λόγω της αρχής της επαλληλίας είναι

$a_A = a_{cm} + a_{επ(r)} = a_{cm} + a_x \cdot r$

Είναι $a_{cm} = a_{επ(R)} = a_x \cdot R \rightarrow a_x = a_{cm}/R$,

οπότε $a_A = a_{cm} + a_{cm} r/R \longrightarrow$

$a_A = a_{cm}(1 + r/R)$ (4).

Παρατήρηση.

Αν θεωρήσουμε ότι τριβή έχει αντίθετη κατεύθυνση τότε η (2) γράφεται

$F \cdot r + T \cdot R = I_{cm} \cdot a_x$, οπότε προκύπτει ότι $T < 0$, δηλαδη ότι η T έχει αντίθετη φορά από αυτή που θεωρήσαμε.

Γενικά μπορούμε, σε ανάλογες περιπτώσεις, να θεωρήσουμε ότι η T έχει τη μία ή την άλλη κατεύθυνση. Η όποια θεώρηση δεν επηρεάζει τη λύση.

Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει η τριβή T να είναι στατική και να είναι $T < \mu \cdot N$.