§. 5-1, 5-2, 5-3, 5-4 Κρούσεις

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση των σωμάτων, καθώς και τα μεγέθη που ορίζονται με βάση τα μεγέθη αυτά, όπως η κινητική ενέργεια και η ορμή, ανήκουν στην κατηγορία των μεγεθών που η τιμή τους εξαρτάται από το πού βρίσκεται αυτός που τα μετράει - ο παρατηρητής -, δηλαδή, εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς που επιλέγουμε κάθε φορά προκειμένου να μελετήσουμε την κίνηση.

Γενικά, η ταχύτητα και η επιτάχυνση των σωμάτων εξαρτάται από τη σχετική κίνηση σώματος παρατηρητή - συστήματος αναφοράς και στο κεφάλαιο αυτό όταν αναφερόμαστε στα μεγέθη αυτά, χωρίς άλλη διευκρίνηση, θα εννοούμε ο υπολογισμός τους γίνεται ως προς σύστημα αναφοράς που βρίσκεται ακίνητο επάνω στη Γη, δηλαδή ότι ο παρατηρητής που τα μετράει είναι ακίνητος επάνω στη Γη.

Θα πρέπει να επισημάνουμε επίσης ότι, όχι μόνο η ταχύτητα των σωμάτων αλλά και η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων εξαρτάται από τη σχετική κίνηση πηγής - παρατηρητή. Αυτό σημαίνει ότι διαφορετικοί παρατηρητές - διαφορετικοί όσον αφορά την κινητική τους κατάσταση - αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο το ίδιο κύμα.

Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί το φαινόμενο Doppler το οποίο αξιοποιούν αστυνομικοί, στρατιωτικοί και παρατηρητές αγώνων ταχύτητας για τη μέτρηση της ταχύτητας των αυτοκινήτων ή των αεροπλάνων με το ραντάρ, οι αστρονόμοι για να παρακολουθήσουν τις κινήσεις πολύ μακρινών ουρανίων σωμάτων και οι γιατροί για να παρακολουθήτη ροή του αίματος στις αρτηρίες.

Προσοχή

Στο κεφάλαιο αυτό, σε όλες τις περιπτώσεις, τόσο στη θεωρία όσο και στις ασκήσεις, τα υλικά σώματα αντιμετωπίζονται ως υλικά σημεία.

Δεν λαμβάνεται δηλαδή υπόψιν η δυνατότητά τους να περιστρέφονται.

Κρούσεις

Στη μηχανική ως **κρούση** χαρακτηρίζεται γενικά κάθε φαινόμενο αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο σωμάτων που κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο και τα σώματα αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα.

Στο μακρόκοσμο τα "συγκρουόμενα" σώματα έρχονται σε επαφή _ χτυπούν το ένα με το άλλο _ στο μικρόκοσμο όμως η έννοια της κρούσης συμπεριλαμβάνει και φαινόμενα όπου τα "συγκρουόμενα" σωματίδια δεν έρχονται σε επαφή _ φαινόμενο σκέδασης _.

Σε κάθε περίπτωση όμως όταν δύο υλικά σώματα συγκρούονται η κινητική κατάσταση τουλάχιστον του ενός από αυτά μεταβάλλεται απότομα _ απότομη μεταβολή κάθε μεταβολή η γίνεται σε μικρό χρονικό διάστημα / ο ρυθμός μεταβολής είναι μεγάλος _.

Αυτές οι απότομες μεταβολές της κινητικής κατάστασης προκαλούνται από τις ισχυρές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα σώματα που συγκρούονται κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους

Οι δυνάμεις αυτές αλλάζουν απότομα την ορμή κάθε σώματος δε μεταβάλλουν, όμως, την ορμή του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων – πρόκειται για εσωτερικές δυνάμεις στο σύστημα –. Από την άλλη μεριά, επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο που διαρκεί πολύ λίγο χρόνο, οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων, αν υπάρχουν, είναι αμελητέες κατά τη διάρκεια της κρούσης – ώθηση μιας δύναμης $\vec{F}$ που ενεργεί σ' ένα σώμα επί χρόνο Δt λέγεται το γινόμενο $\vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{P}$ –.

Συνεπώς, σε κάθε κρούση το σύστημα των σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο για τη χρονική διάρκεια της κρούσης. Επομένως, η ορμή του συστήματος διατηρείται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Έτσι, κατά την κρούση δύο σωμάτων με μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα, ταχύτητες $\vec{υ}_1, \vec{υ}_2$ ακριβώς πριν την κρούση και $\vec{υ}_1', \vec{υ}_2'$ αμέσως μετά την κρούση, από την Α.Δ.Ο προκύπτει ότι:

$$\vec{P}_{(πριν)} = \vec{P}_{(μετά)} \longrightarrow$$

$$\vec{P}_{1(π)} + \vec{P}_{2(π)} = \vec{P}_{1(μ)} + \vec{P}_{2(μ)}, \text{ όπου}$$

$\vec{P}_{1(π)} = m_1\cdot\vec{υ}_1$, $\vec{P}_{2(π)} = m_2\cdot\vec{υ}_2$, $\vec{P}_{1(μ)} = m_1\cdot\vec{υ}_1'$, $\vec{P}_{2(μ)} = m_2\cdot\vec{υ}_2'$

Είδη κρούσεων

Α. Από ενεργειακή άποψη οι κρούσεις διακρίνονται σε:

1. Ελαστικές: και ελαστική χαρακτηρίζεται κάθε κρούση στην οποία η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων διατηρείται.

Έτσι, σε μια ελαστική κρούση δύο σωμάτων με μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα, με ταχύτητες $υ_1, υ_2$ ακριβώς πριν την κρούση και $υ_1', υ_2'$ αμέσως μετά την κρούση ισχύει ότι:

$$K_{πριν} = K_{μετά} \longrightarrow$$

$$K_{1(π)} + K_{2(π)} = K_{1(μ)} + K_{2(μ)} \longrightarrow$$

$$m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2 = m_1 u_1'^2/2 + m_2 \cdot u_2'^2/2 .$$

2. Ανελαστικές· και ανελαστική ονομάζεται κάθε κρούση στην οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα.

Αυτό έχει σαν συνέπεια η συνολική κινητική ενέργεια μετά την κρούση να είναι μικρότερη από τη συνολική κινητική ενέργεια πριν την κρούση.

Σε μία ανελαστική κρούση ισχύει

$$K_{(\pi\rho\acute{\iota}\nu)} = K_{(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} + Q$$

Μία ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων και στη δημιουργία συσσωματώματος. Αυτή η ανελαστική κρούση ονομάζεται **πλαστική**.

Σε μία πλαστική κρούση τα συγκρουόμενα σώματα αμέσως μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M = m_1 + m_2$ και ταχύτητας V.

B. Από κινηματική άποψη οι κρούσεις διακρίνονται σε:

1. Κεντρικές ή μετωπικές· και κεντρική ή μετωπική ονομάζεται κάθε κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται έχουν τον ίδιο φορέα.

Αν τα σώματα που συγκρούονται μετωπικά είναι σφαίρες οι ταχύτητές τους μετά την κρούση θα έχουν επίσης την ίδια με την αρχική διεύθυνση.

Σε μία μετωπική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο αλγεβρικά, αφού ορίσουμε αυθαίρετα μία θετική φορά.

2. Έκκεντρες: και έκεντρη ονομάζεται κάθε κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται έχουν παράλληλους φορείς.

3. Πλάγιες: και πλάγια ονομάζεται κάθε κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται έχουν τυχαίες διευθύνσεις.

Παρατήρηση

Στην ελαστική κρούση η μηχανική ενέργεια των συγκρουόμενων σωμάτων διατηρείται διότι εξ ορισμού η κινητική ενέργεια διατηρείται και επειδή κάθε κρούση είναι ένα φαινόμενο αμελητέας χρονικής διάρκειας, η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων, που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο, δε μεταβάλλεται. Επομένως, η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

Μελέτη κρούσεων

Α. Κεντρική και ελαστική κρούση δύο σφαιρών.

Αν δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1, m_2 που κινούνται με ταχύτητες $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, όπου $\vec{u}_1 \upuparrows \vec{u}_2$, $u_2 < u_1$ και η Σ_2 προηγείται της Σ_1, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση έχουν ταχύτητες $\vec{u}_1', \vec{u}_2'$ τότε, αν $\vec{u}_1' \upuparrows \vec{u}_2' \upuparrows \vec{u}_1$ ισχύει:

Από την Α.Δ.Ο

$$\vec{P}_{(\pi\rho\acute{\iota}\nu)} = \vec{P}_{(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \longrightarrow$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \longrightarrow$$

$m_1\cdot\vec{u}_1 + m_2\cdot\vec{u}_2 = m_1\cdot\vec{u}_1' + m_2\cdot\vec{u}_2'$, οπότε αν επιλέξουμε ως θετική τη φορά της $\vec{u}_1$ θα είναι

$m_1\cdot u_1 + m_2\cdot u_2 = m_1\cdot u_1' + m_2\cdot u_2' \rightarrow$

$\underline{m_1(u_1-u_1') = m_2(u_2'-u_2)}$ (1).

Από την Α.Δ.Ε

$K_{(πριν)} = K_{(μετά)} \longrightarrow$

$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \longrightarrow$

$m_1\cdot u_1^2/2 + m_2\cdot u_2^2/2 = m_1\cdot u_1'^2/2 + m_2\cdot u_2'^2/2 \rightarrow$

$m_1(u_1^2 - u_1'^2) = m_2(u_2'^2 - u_2^2) \longrightarrow$

$\underline{m_1\cdot(u_1+u_1')(u_1-u_1') = m_2(u_2'+u_2)(u_2'-u_2)}$ (2).

Από τις (1) και (2) $\longrightarrow$

$\underline{u_1+u_1' = u_2+u_2'}$ (3).

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (3) ως προς u_2':

$(1) \longrightarrow m_1u_1 - m_1u_1' = m_2u_2' - m_2u_2$

$(3) \xrightarrow{\cdot m_1} m_1u_1 + m_1u_1' = m_1u_2 + m_1u_2'$ | +

$2m_1\cdot u_1 = (m_1+m_2)u_2' - (m_2-m_1)u_2 \longrightarrow$

$(m_1+m_2)u_2' = 2m_1u_1 + (m_2-m_1)u_2 \longrightarrow$

$$\boxed{u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}u_2} \quad (4).$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (3) ως προς u_1':

$(1) \longrightarrow m_1u_1 - m_1u_1' = m_2u_2' - m_2u_2$

$(3) \xrightarrow{\cdot(-m_2)} -m_2u_1 - m_2u_1' = -m_2u_2 - m_2u_2'$ | +

$(m_1-m_2)u_1 - (m_1+m_2)u_1' = -2m_2u_2 \rightarrow$

$(m_1+m_2)\upsilon_1' = 2m_2\upsilon_2 + (m_1-m_2)\upsilon_1 \longrightarrow$

$$\boxed{\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1} \qquad (5).$$

Σημείωση

Κατά τον υπολογισμό των ταχυτήτων των σφαιρών υποθέσαμε ότι οι σφαίρες μετά την κρούση συνεχίζουν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση _ $\vec{\upsilon}_1' \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2' \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}_2$ _.

Αν μετά τις πράξεις προκύψει αρνητική τιμή για την $\vec{\upsilon}_1'$ θα συμπεράνουμε ότι η σφαίρα Σ_1 άλλαξε φορά κίνησης μετά την κρούση.

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι:

1. στην περίπτωση όπου $m_1=m_2$ είναι

$$\boxed{\upsilon_1' = \upsilon_2} \quad \text{και} \quad \boxed{\upsilon_2' = \upsilon_1}$$

Δηλαδή, σε μία ελαστική και κεντρική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες, οι σφαίρες ανταλλάσουν ταχύτητες.

2. στην περίπτωση όπου η Σ_2 είναι ακίνητη πριν από την κρούση _ $\upsilon_2 = 0$ _ είναι

$$\boxed{\upsilon_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1} \quad \text{και} \quad \boxed{\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1}$$

I. Διερεύνηση των παραπάνω σχέσεων.

Υπενθυμίζουμε ότι στις παραπάνω σχέσεις είναι $\upsilon_1 > 0$ και $\upsilon_2 = 0$, οπότε

α. αν $m_1 > m_2 \longrightarrow \boxed{\upsilon_1' > 0 \text{ και } \upsilon_2' > 0}$.

β. αν $m_1 = m_2 \longrightarrow \boxed{\upsilon_1' = 0 \text{ και } \upsilon_2' = \upsilon_1}$.

γ. αν $m_1 \ll m_2 \longrightarrow$ $\boxed{\upsilon_1' < 0 \text{ και } \upsilon_2' > 0}$.

δ. αν $m_1 \gg m_2 \longrightarrow$

$$\upsilon_1' = \left[\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right) / \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right]\cdot \upsilon_1 \xrightarrow{(m_2/m_1)\to 0}$$

$\boxed{\upsilon_1' \longrightarrow \upsilon_1}$ και

$$\upsilon_2' = \left[2 / \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right]\cdot \upsilon_1 \xrightarrow{(m_2/m_1)\to 0}$$

$\boxed{\upsilon_2' \longrightarrow 2\upsilon_1}$.

ε. αν $m_1 \lll m_2 \longrightarrow$

$\boxed{\upsilon_1' \longrightarrow -\upsilon_1}$ και $\boxed{\upsilon_2' \longrightarrow 0}$

II. Ελαστική κρούση σφαίρας σε ακλόνητη επιφάνεια.

Να αποδείξετε ότι, όταν μια σφαίρα μικρής μάζας προσκρούει:

α. ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου ή στο δάπεδο, ανακλάται με ταχύτητα ιδίου μέτρου και αντίθετης φοράς.

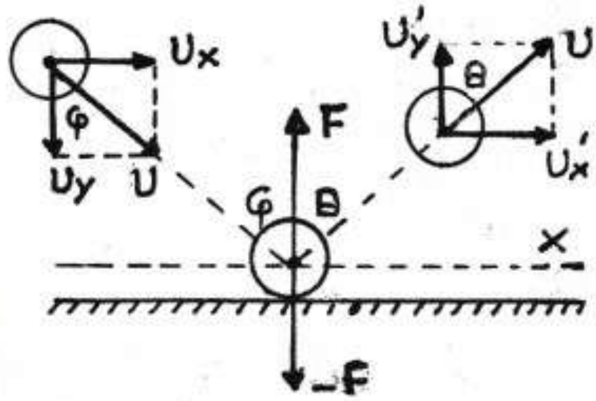
β. ελαστικά και πλάγια στην επιφάνεια ενός τοίχου ή στο δάπεδο, ανακλάται με ταχύτητα ιδίου μέτρου ενώ η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Απόδειξη

α. Εφόσον η σφαίρα μικρής μάζας, έστω m_1, προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου για τη μάζα και την ταχύτητα, έστω m_2, υ_2, του οποίου ισχύει ότι $m_2 \gg m_1$ και $\upsilon_2 = 0$, η κρούση της σφαίρας με τον τοίχο ισοδυναμεί με την κεντρική και ελαστική κρούση σφαίρας μικρής μάζας με ακίνητη σφαίρα πολύ μεγάλης μάζας.

Επομένως, αν υ_1, υ_1' είναι αντίστοιχα η ταχύτητα της σφαίρας μικρής μάζας πριν και μετά την πρόσκρουση στον τοίχο θα είναι $\upsilon_1' = -\upsilon_1$. Δηλαδή, η σφαίρα μικρής μάζας αναπηδά με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν την κρούση.

Β. Έστω ότι η σφαίρα μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε έναν τοίχο / στο δάπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.



Αναλύουμε την $\vec{\upsilon}$ σε δύο συνιστώσες, τη μία ($\vec{\upsilon}_x$) παράλληλη στο δάπεδο και την άλλη ($\vec{\upsilon}_y$) κάθετη με αυτό.

Η δύναμη F που ασκείται στη σφαίρα κατά την κρούση είναι κάθετη στο δάπεδο — βάρος και αντίδραση του δαπέδου σ' αυτό αμελητέες —.

Επομένως, από την Α.Δ.Ο κατά τον άξονα x, κατά τη διεύθυνση του οποίου δεν ασκείται δύναμη στη σφαίρα, είναι:

$$m \cdot \upsilon_x = m \cdot \upsilon_x' \longleftrightarrow \underline{\upsilon_x' = \upsilon_x}.$$

Η κρούση είναι ελαστική, οπότε είναι

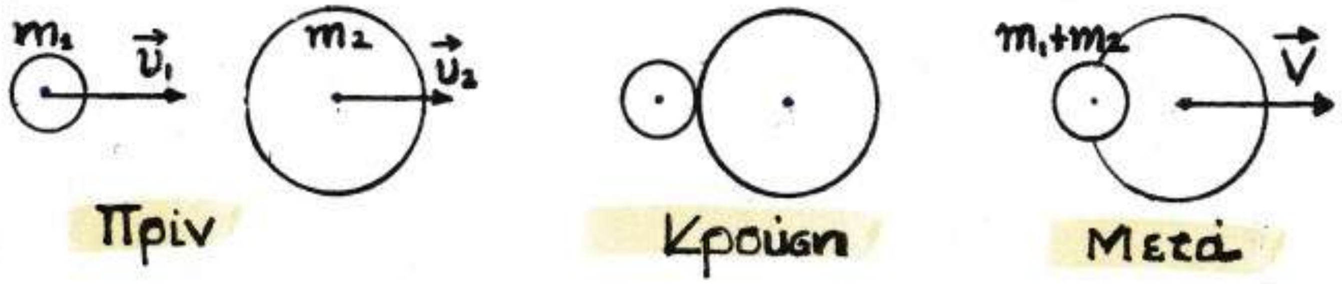
$$K = K' \longrightarrow m\upsilon^2/2 = m\upsilon'^2/2 \longleftrightarrow \underline{\upsilon' = \upsilon}.$$

Αν φ είναι η γωνία πρόσπτωσης είναι

$\eta\mu\varphi = \upsilon_x/\upsilon$, και αν θ είναι η γωνία ανάκλασης είναι $\eta\mu\theta = \upsilon_x'/\upsilon' \longrightarrow$

$$\eta\mu\varphi = \eta\mu\theta \longleftrightarrow \underline{\varphi = \theta}.$$

Β. Μετωπική/κεντρική πλαστική κρούση.



Για τις δύο σφαίρες του σχήματος ισχύει ότι: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1+m_2) \cdot V \longrightarrow$

$$V = (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)/(m_1+m_2).$$

Γ. Πλάγια πλαστική-ελαστική κρούση.

Στην περίπτωση πλάγιας κρούσης δύο σωμάτων η σχέση $\vec{P}_{(\pi\rho\acute{\iota}\nu)} = \vec{P}_{(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}$ που προκύπτει από την Α.Δ.Ο. είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις

$$P_{x(\pi\rho\acute{\iota}\nu)} = P_{x(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \quad \text{και}$$
$$P_{y(\pi\rho\acute{\iota}\nu)} = P_{y(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}, \quad \text{διότι,}$$

όπως αποδεικνύεται, όταν δύο διανύσματα είναι ίσα, ίσες είναι και οι συνιστώσες τους ως προς δύο άξονες x και y.

Έτσι, στην περίπτωση πλάγιας κρούσης δύο σωμάτων θα πρέπει να αναλύσουμε τις ταχύτητες πριν και μετά την κρούση σε δύο συνιστώσες ως προς δύο καθέτους άξονες x και y και να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο για κάθε άξονα ξεχωριστά.

1. Πλάγια πλαστική κρούση.

Από την Α.Δ.Ο,

κατά τον άξονα x $\longrightarrow$ $P_{x(\pi\rho\acute{\iota}\nu)} = P_{x(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \longrightarrow$

$$m_1 v_{1(x)} + m_2 v_{2(x)} = (m_1+m_2) V_x,$$

κατά τον άξονα y $\longrightarrow$ $P_y(\text{πριν}) = P_y(\text{μετά}) \longrightarrow$

$$m_1 \cdot u_1(y) + m_2 u_2(y) = (m_1+m_2) V_y.$$

Για το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος ισχύει ότι

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ για την οποία ισχύει ότι

$$\varepsilon\varphi\theta = V_x / V_y.$$

2. Πλάγια ελαστική κρούση.

Από την Α.Δ.Ο,

κατά τον άξονα x $\longrightarrow$ $P_x(\text{πριν}) = P_x(\text{μετά}) \longrightarrow$

$$m_1 \cdot u_1(x) + m_2 \cdot u_2(x) = m_1 \cdot u_1'(x) + m_2 \cdot u_2'(x),$$

κατά τον άξονα y $\longrightarrow$ $P_y(\text{πριν}) = P_y(\text{μετά}) \longrightarrow$

$$m_1 \cdot u_1(y) + m_2 \cdot u_2(y) = m_1 \cdot u_1'(y) + m_2 \cdot u_2'(y).$$

Από τη Α.Δ.Ε $\longrightarrow$ $K(\text{πριν}) = K(\text{μετά}) \longrightarrow$

$$m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2 = m_1 u_1'^2/2 + m_2 \cdot u_2'^2/2.$$

Α. Ζιαγκής

Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων.

1. Μεταφορά ενέργειας σε μία ελαστική κρούση.

Σε μία ελαστική κρούση η μηχανική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων διατηρείται, ενώ κινητική ενέργεια μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο.

Έτσι, αν K_1, K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση, και K_1', K_2' οι κινητικές τους ενέργειες αμέσως μετά την κρούση, όπου $K_1' < K_1$ και $K_2' > K_2$, η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε από το ένα σώμα στο άλλο είναι

$$\Delta K = K_1 - K_1' = K_2 - K_2'.$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος ακριβώς πριν από τη κρούση _ K_1+K_2 _ πού μεταφέρθηκε από το ένα σώμα στο άλλο είναι

$$A\% = [\Delta K \cdot 100/(K_1+K_2)]\%.$$

2. Απώλεια μηχανικής ενέργειας στις ανελαστικές κρούσεις.

Μία κρούση αρχίζει και τελειώνει σ' ένα σημείο του χώρου και σε ελάχιστο χρόνο. Επομένως, η δυναμική ενέργεια των σωμάτων _ που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο _ δε μεταβάλλεται λόγω της κρούσης. Συνεπώς, η απώλεια μηχανικής ενέργειας σε μία ανελαστική κρούση ισούται με τη μείωση της κινητικής ενέργειας, δηλαδή

$$\Delta E_M = \Delta K = K(\text{πρίν}) - K(\text{μετά}) = Q,$$

όπου Q είναι η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση.

Έτσι, το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που χάθηκε είναι

$$A\% = [Q/E_M(\text{πρίν})] \cdot 100\%,$$

ενώ το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που χάθηκε είναι

$$A\% = [Q/K(\text{πρίν})] \cdot 100\%.$$

Παράδειγμα

Ένα σώμα συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα τριπλάσιας μάζας. Ποιό είναι το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων που χάνεται – μετατρέπεται σε θερμότητα – κατά την κρούση;

Απάντηση

Είναι $A\% = [\Delta K_{ολ} / K_{ολ(πριν)}] \cdot 100\%$ (1),
$K_{ολ(πριν)} = mu^2/2$, $K_{ολ(μετά)} = 4mV^2/2 \rightarrow$
$\Delta K_{ολ} = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)} \longrightarrow$
$\Delta K_{ολ} = mu^2/2 - 2mV^2$ (2).
Από την Α.Δ.Ο $\longrightarrow$
$mu = 4mV \leftrightarrow u = 4V$, οπότε
$K_{ολ(πριν)} = m(4V)^2/2 = 8mV^2 \xrightarrow{(2)}$
$\Delta K_{ολ} = 8mV^2 - 2mV^2 = 6mV^2 \xrightarrow{(1)}$
$A\% = [6mV^2/8mV^2] \cdot 100\% \longrightarrow$
$A\% = (300/4)\% = 75\%$.

3. Εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε στις κρούσεις.

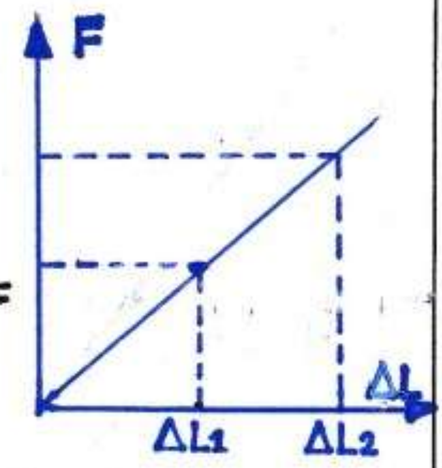
Τα προβλήματα κρούσεων συνδυάζονται συνήθως με κάποιες κινήσεις που πραγματοποιούνται πριν ή μετά την κρούση. Η μελέτη αυτών των κινήσεων γίνεται συνήθως με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε – $\Delta K = \Sigma W_F$ –.

Κατά την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε πρέπει να προσέχουμε τον υπολογισμό του έργου διαφόρων δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα που μας ενδιαφέρει.

Προσοχή στο "Έργο δύναμης ελατηρίου".

Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο στο σώμα με το οποίο είναι δεμένο προκύπτει από τη σχέση $F = K \cdot \Delta L$, όπου K η σταθερά του ελατηρίου και ΔL η παραμόρφωσή του από το φυσικό του μήκος.

Αν το ελατήριο έχει παραμόρφωση ΔL_1, όταν το σώμα βρίσκεται σε μία θέση **1**, και παραμόρφωση ΔL_2, όταν βρίσκεται σε μία θέση **2**, το έργο της δύναμης του ελατηρίου κατά τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση 1 στη θέση 2 είναι



$$W_{F(1\to2)} = -E =$$
$$= -\frac{K\Delta L_2 + K\Delta L_1}{2} \cdot (\Delta L_2 - \Delta L_1) =$$
$$= -K(\Delta L_2^2 - \Delta L_1^2)/2 =$$
$$= -K\Delta L_2^2/2 + K\Delta L_1^2/2 =$$
$$= U_1 - U_2$$

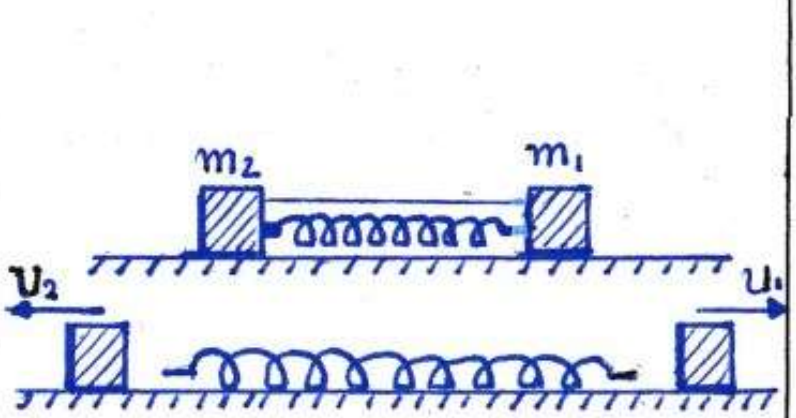
Σημείωση

Η σχέση $W_{F\varepsilon\lambda(1\to2)} = U_1 - U_2$ ισούται με το έργο της δύναμης του ελατηρίου όταν το ένα άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο στο σώμα και το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο.

Αν τα άκρα του ελατηρίου συνδέονται με δύο σώματα που μπορούν να κινούνται, τότε η διαφορά $U_1 - U_2$ ισούται με το έργο των δυνάμεων του ελατηρίου και στα δύο σώματα, και δεν είναι καταρχήν εύκολος ο προσδιορισμός του έργου πάνω σε κάθε σώμα.

Έτσι, σε μια τέτοια περίπτωση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε ή την Α.Δ.Ε στο σύστημα των δύο σωμάτων και όχι το Θ.Μ.Κ.Ε για κάθε σώμα.

Παράδειγμα



Ελατήριο σταθεράς **K** είναι συσπειρωμένο κατά ΔL ανάμεσα σε δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 που ακουμπούν στα άκρα του και βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα δύο σώματα είναι δεμένα όπως στο σχήμα. Αν κόψουμε το νήμα τι ταχύτητα θα αποκτήσει το κάθε σώμα;

Απάντηση.

Στο σύστημα των σωμάτων η μόνη "εργαζόμενη" δύναμη είναι η δύναμη που ασκεί στα σώματα το ελατήριο, που είναι δύναμη διατηρητική. Επομένως, από την Α.Δ.Μ.Ε στο σύστημα προκύπτει ότι:

$$U_{πριν} + K_{πριν} = U_{μετά} + K_{μετά} \longrightarrow$$

$$κΔL^2/2 + 0 = 0 + m_1 υ_1^2/2 + m_2 υ_2^2/2 \longrightarrow$$

$$\underline{κΔL^2 = m_1 \cdot υ_1^2 + m_2 \cdot υ_2^2 \quad (1).}$$

Το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο, οπότε από την Α.Δ.Ο προκύπτει ότι:

$P_{πριν} = P_{μετά}$, επομένως

αν θεωρήσουμε θετική τη φορά της $υ_1$ θα είναι

$$0 = m_1 υ_1 - m_2 υ_2 \longrightarrow$$

$$\underline{m_2 υ_2 = m_1 υ_1 \quad (2).}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει τόσο η $υ_1$ όσο και η $υ_2$.

Γενικά, σε κάθε περίπτωση συστήματος σωμάτων στα οποία δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή εφόσον ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν _ $ΣF_{εξ} = 0$ _ και τα σώματα κινούνται με την επίδραση των μεταξύ τους διατηρητικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε και την Α.Δ.Ο.

4. Κρούση υλικού σημείου και στερεού που στρέφεται ή μπορεί να περιστραφεί γύρω από σταθερό άξονα.

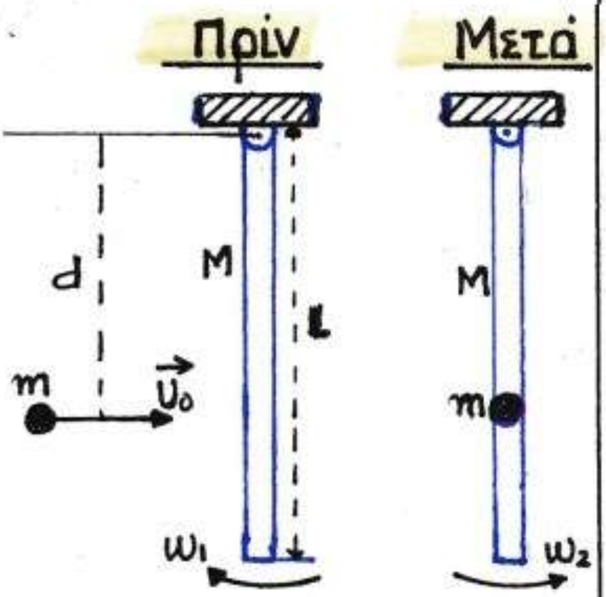
Καταρχήν να θυμηθούμε ότι ως <u>υλικό ση</u>-

μείο Θεωρούμε κάθε σώμα που έχει όλες τις όλες τις ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις αλλά και κάθε σώμα του οποίου οι διαστάσεις είναι αμελητέες συγκριτικά με τις διαστάσεις άλλων σωμάτων, με τα οποία αλληλεπιδρά, ή συγκριτικά με τις διαστάσεις της τροχιάς της κίνησης που εκτελεί.

Σε μία τέτοια περίπτωση κρούσης εφαρμόζουμε την Α.Δ.Στροφορμής κατά τον σταθερό άξονα περιστροφής για το χρονικό διάστημα ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση.

Παραδείγματα

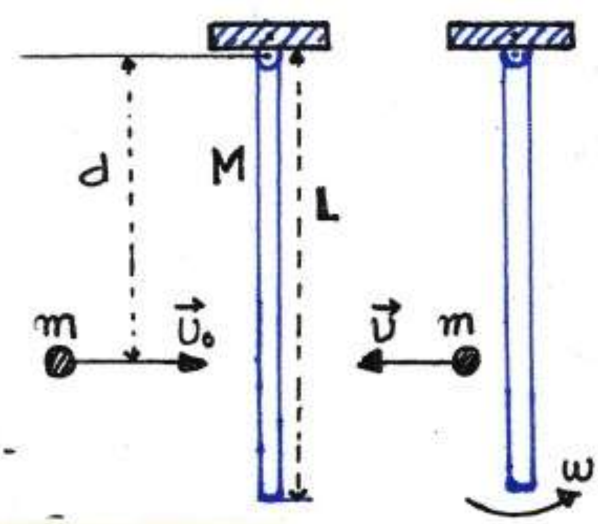
α. Στην περίπτωση του διπλανού σχήματος έχουμε μία πλαστική κρούση ενός σφαιριδίου μάζας m με ράβδο μάζας M.



Ισχύει ότι:

$$m\upsilon_0 d - \frac{1}{3}ML^2\cdot\omega_1 = \left(\frac{1}{3}ML^2 + md^2\right)\cdot\omega_2 .$$

β. Στην περίπτωση του διπλανού σχήματος έχουμε μια ελαστική κρούση ενός σφαιριδίου μάζας m με ράβδο μάζας M.



Ισχύει ότι:

$$m\upsilon_0 d = \frac{1}{3}ML^2\omega - m\upsilon d ,$$

και αφού η κρούση είναι ελαστική ισχύει επίσης

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}(ML^2/3)\,\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 .$$

Α. Ζιάτπάς