§ 4-9, 4-10

- **Κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης**
- **Έργο και Ισχύς κατά τη στροφική κίνηση**

A. Η κινητική ενέργεια υλικού σημείου μάζας m λόγω μεταφορικής κίνησης με ταχύτητα $υ$ είναι $\boxed{K = mυ^2/2}$

B. Η κινητική ενέργεια στερεού σώματος είναι $K = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots$ όπου $K_1, K_2, K_3 \ldots$ οι κινητικές ενέργειες των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται, οπότε

$$K = m_1υ_1^2/2 + m_2υ_2^2/2 + \ldots .$$

Έτσι,

1. αν το στερεό εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $υ_{cm}$, επειδή $υ_1 = υ_2 = \ldots = υ_{cm}$ είναι $K = (m_1 + m_2 + \ldots)υ_{cm}^2/2 \longrightarrow$

$$\boxed{K = M \cdot υ_{cm}^2/2},$$

όπου M η μάζα του στερεού.

2. αν το στερεό εκτελεί στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $ω$, επειδή $υ_1 = ωr_1$, $υ_2 = ωr_2$, $υ_3 = ωr_3 \ldots\ldots$ είναι

$$K = (m_1r_1^2 + m_2r^2 + \ldots)ω^2/2 \longrightarrow$$

$$\boxed{K = I \cdot ω^2/2},$$

όπου I η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.

3. αν το στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση είναι

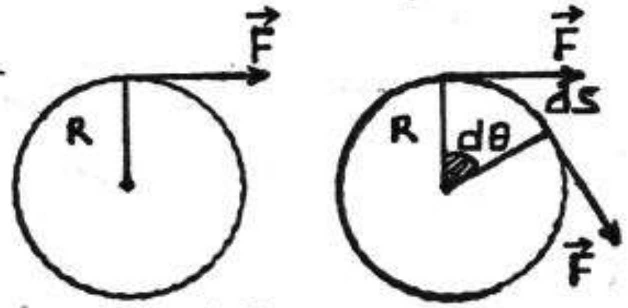
$$\boxed{K = Mυ_{cm}^2/2 + I_{cm} \cdot ω^2/2}$$

Γ. Έργο επιτρόχιας δύναμης σταθερού μέτρου, δηλαδή δύναμης σταθερού μέτρο που ασκείται σε στερεό σώμα που στρέφεται περί σταθερό άξονα και είναι διαρκώς εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά του σημείου εφαρμογής της.

Στην περίπτωση ενός δίσκου-τροχού που περιστρέφεται περί (ως προς) σταθερό άξονα τέτοια δύναμη είναι μία επιτρόχια δύναμη σταθερού μέτρου που ασκείται σ' ένα υλικό σημείο του περιμετρικού κύκλου – του πέλματος – του τροχού.

Έστω ότι δύναμη $\vec{F}$ ασκείται σ' ένα υλικό σημείο στον περιμετρικό κύκλο ενός τροχού ακτίνας R κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης.

Κατά μία απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία dθ η δύναμη παράγει έργο
$dW = F \cdot dS$



Αν η γωνία dθ μετριέται σε ακτίνια τότε $ds = R \cdot d\theta$, οπότε
$dW = F \cdot R \cdot d\theta$.

Το γινόμενο $F \cdot R = \tau$ είναι η ροπή της δύναμης. Επομένως, $dW = \tau \cdot d\theta$.

Αν η δύναμη είναι σταθερή κατά μέτρο, οπότε και η ροπή της θα είναι σταθερή, το έργο της δύναμης ή όπως συνήθως λέμε, το "έργο της ροπής", καθώς ο τροχός στρέφεται κατά γωνία Δθ είναι $\boxed{W_\tau = \tau \cdot \Delta\theta}$.

Από τη παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:
$dW_\tau/dt = \tau \cdot d\theta/dt$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου dW_τ/dt είναι η ισχύς της δύναμης που δημιουργεί τη ροπή ή όπως λέμε είναι η "ισχύς της ροπής" ενώ το πηλικό $d\theta/dt$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ω του στρεφόμενου τροχού, επομένως

$$\boxed{P_\tau = \tau \cdot \omega}$$

Δ. Το Θ.Μ.Κ.Ενέργειας στη στροφική κίνηση.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος λόγω στροφικής κίνησης περί/ως προς σταθερό άξονα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που δρούν στο σώμα - το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και δημιουργούν ροπές -. Δηλαδή,

$$\boxed{\Delta K_\sigma = \Sigma W_\tau} \longrightarrow$$

$$\boxed{I \cdot \omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}/2 - I \cdot \omega^2_{\alpha\rho\chi}/2 = \Sigma W_\tau}$$

Παρατηρήσεις

1. Όταν ένα σώμα του οποίου η μηχανική ενέργεια είναι δεδομένη εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση αποκτάει ταχύτητα μεταφοράς μικρότερη από αυτή που θα αποκτούσε το σώμα αν εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση.

Απόδειξη

Είναι $K + U = E \rightarrow K = E - U$ και εφόσον E: σταθερή η κινητική ενέργεια K του σώματος έχει την ίδια τιμή σε μία θέση κατά τη διάρκεια της κίνησής του, ανεξάρτητα αν εκτελεί μεταφορική ή σύνθετη κίνηση.

Σ' ένα σημείο της τροχιάς, αν το σώμα εκτελεί:

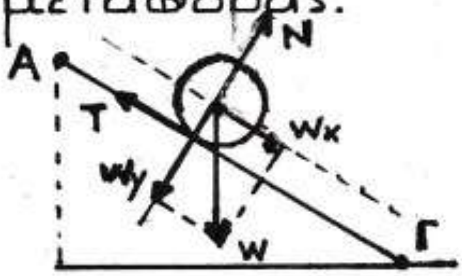
Μεταφορική κίνηση, $K_1 = m\upsilon^2_{\iota\omega}/2$,

Σύνθετη κίνηση, $K_2 = m\upsilon_{2cm}^2/2 + I\cdot\omega^2/2$,
οπότε εφόσον $K_1 = K_2 \rightarrow$

$$m\cdot\upsilon_{1cm}^2/2 = m\cdot\upsilon_{2cm}^2/2 + I\cdot\omega^2/2 \rightarrow$$
$$m\cdot\upsilon_{1cm}^2/2 - m\cdot\upsilon_{2cm}^2/2 = I\cdot\omega^2/2 > 0 \rightarrow$$
$$\upsilon_{1.cm}^2 > \upsilon_{2.cm}^2 \rightarrow \underline{\upsilon_{1.cm} > \upsilon_{2.cm}}.$$

2. Αν η μηχανική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί σύνθετη κίνηση είναι δεδομένη, η μεταφορική του ταχύτητα εξαρτάται από τη ροπή αδράνειας του σώματος.

Έτσι, π.χ, αν αφήσουμε να κυλήσουν από την κορυφή ενός πλάγιου επιπέδου δύο τροχοί της ίδιας μάζας και της ίδιας ακτίνας, αυτός που έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας θα φτάσει στη βάση με μικρότερη ταχύτητα μεταφοράς.



<u>Απόδειξη</u>

Σε κάθε περίπτωση

$$\Sigma\tau = I\cdot a_x \rightarrow TR = I\cdot a_x \rightarrow$$
$$TR^2 = I\cdot a_x R \rightarrow TR^2 = I a_{cm} \rightarrow$$
$$a_{cm} = TR^2/I \text{, οπότε}$$
$$a_{1.cm} = TR^2/I_1 \quad \text{και} \quad a_{2.cm} = TR^2/I_2$$

Αν $A\Gamma = X$ είναι

$$\upsilon_{1.cm(\Gamma)}^2 = 2Xa_{1.cm} \quad \text{και} \quad \upsilon_{2.cm(\Gamma)}^2 = 2Xa_{2.cm} \rightarrow$$
$$\upsilon_{1.cm(\Gamma)}^2/\upsilon_{2.cm(\Gamma)}^2 = 2Xa_{1.cm}/2Xa_{2.cm} = a_{1.cm}$$
$$= a_{1.cm}/a_{2.cm} = (TR^2/I_1)/(TR^2/I_2) =$$
$$= I_2/I_1,$$

οπότε <u>αν $I_2 > I_1$</u> $\rightarrow I_2/I_1 > 1 \rightarrow \upsilon_{1.cm(\Gamma)}^2/\upsilon_{2.cm(\Gamma)}^2 > 1$
$\rightarrow \underline{\upsilon_{1.cm(\Gamma)} > \upsilon_{2.cm(\Gamma)}}$.

3. Η κύλιση χωρίς ολίσθηση ενός στερεού – κυλίνδρου, σφαίρας, δίσκου κ.τ.λ – που αφήνεται πάνω σε μία επιφάνεια εξασφαλίζεται εφόσον:

α. υπάρχει συνιστώσα δύναμης //λη προς την επιφάνεια, και

β. η τριβή Τ που αναπτύσσεται στο σώμα είναι στατική.

Στην περίπτωση αυτή είναι $T < T_{n} = \mu_{n} \cdot N$, όπου μ_{n} ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Αν η επιφάνεια είναι πλάγια στην πράξη αυτό εξασφαλίζεται εφόσον η επιφάνεια έχει μικρή κλίση, δεν είναι λεία και το στερεό δεν έχει λεία επιφάνεια.

Να σημειώσουμε εδώ ότι κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση επειδή η τριβή είναι στατική δεν έχουμε απώλειες ενέργειας λόγω τριβής – η στατική τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλιόμενου σώματος με συνέπεια να μην εκτελεί έργο –.

Επομένως, αν κατά την κύλιση εκτελούν έργο μόνο διατηρητικές δυνάμεις η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται.

Οι τυχόν απώλειες ενέργειας κατά την κύλιση οφείλονται στην παραμόρφωση του κυλιόμενου σώματος ή της επιφάνειας στην οποία γίνεται η κύλιση, παραμόρφωση που συνεπάγεται ροπή στο κυλιόμενο σώμα η οποία αντιτίθεται στην κύλισή του. Η εν λόγω ροπή χαρακτηρίζεται ως <u>τριβη κύλισης</u>.

Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων

1. <u>Σχέση στροφικής κινητικής ενέργειας με το μέτρο της στροφορμής.</u>

Είναι $K = I\omega^2/2$ και $L = I \cdot \omega \leftrightarrow \omega = L/I$, οπότε $K = I\,(L/I)^2/2 \leftrightarrow \boxed{K = L^2/2 \cdot I}$,

$K = I\omega \cdot \omega/2 \leftrightarrow \boxed{K = L \cdot \omega/2}$

2. <u>Η κινητική ενέργεια σε μία σύνθετη κίνηση.</u>

Είναι $K = m \cdot \upsilon_{cm}^2/2 + I_{cm} \cdot \omega^2/2$, οπότε στην περίπτωση της κύλισης ενός στερεού χωρις ολίσθηση (τροχού, δίσκου, κυλίνδρου, σφαίρας κ.τ.λ) επειδή $v_{cm} = \omega R \leftrightarrow \omega = v_{cm}/R \longrightarrow$

$$\boxed{K = m v_{cm}^2/2 + I_{cm} \cdot v_{cm}^2/2R^2}$$

ή

$$\boxed{K = m \omega^2 R^2/2 + I_{cm} \cdot \omega^2/2}$$

3. Το έργο των δυνάμεων κατά τη στροφική κίνηση.

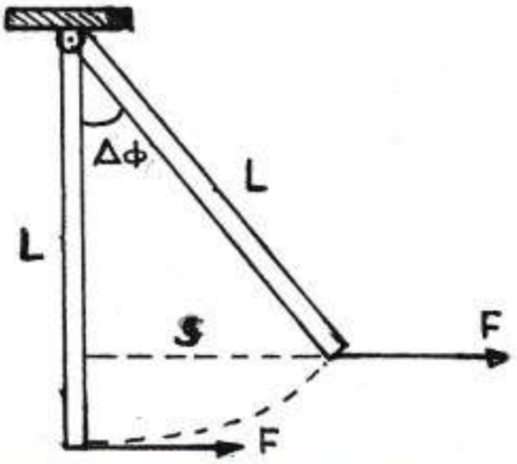
α. Έργο επιτρόχιας δύναμης σταθερού μέτρου.

Είναι $\boxed{W_F = \tau_F \cdot \Delta\theta}$

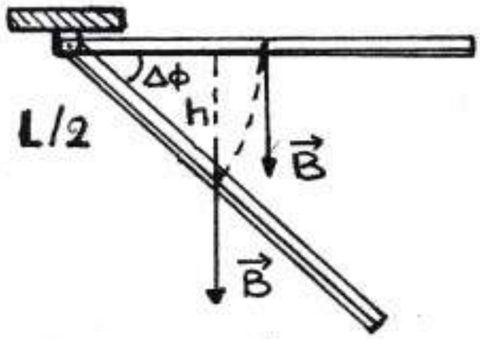
β. Έργο σταθερής δύναμης

Όταν σ' ένα στερεό ασκείται σταθερή δύναμη — δύναμη με σταθερό μέτρο και σταθερή διεύθυνση — το έργο της ισούται με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της.

Παραδείγματα.



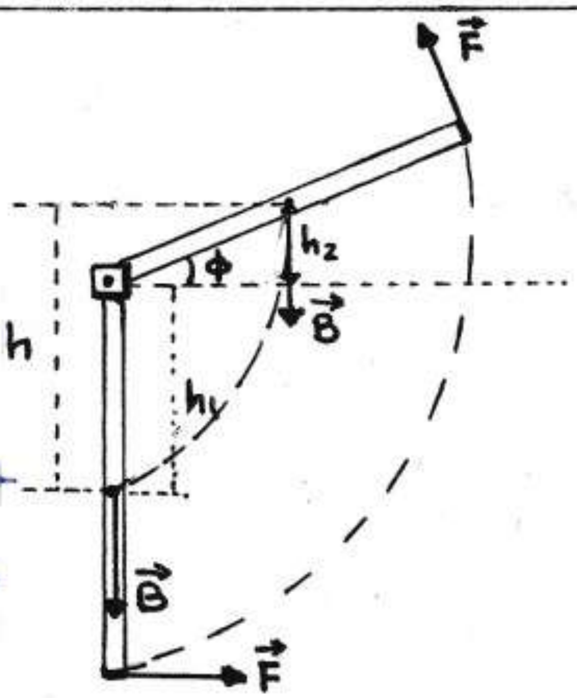
$W_F = F \cdot S = F \cdot L\eta\mu\Delta\phi$.



$W_B = m \cdot g \cdot h =$
$= m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \eta\mu\Delta\phi$

Άσκηση

Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος L, μάζα m και αρχικά είναι κατακόρυφη. Αν ασκήσουμε μία επιτρόχια δύναμη F σταθερού μέτρου στο κατώτερο άκρο της έτσι, να αρχίσει να περιστρέφεται χύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το άκρο της, ποιό θα είναι το έρχο της F και ποιό το έρχο του βάρους όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά 120° από την αρχική της κατακόρυφη διεύθυνση.



Απάντηση

α. το έρχο της F

Είναι $W_F = \tau_F \cdot \Delta\theta = F \cdot L \cdot \Delta\theta$,
όπου $\Delta\theta = 2\pi/3$ rad.

β. το έρχο του βάρους B=mg

Είναι $W_B = -mgh = -mg(h_1+h_2)$ (1).
Είναι $h_1 = L/2$ και
$h_2 = L\eta\mu\phi/2 = L\eta\mu 30°/2 = L/4$,
οπότε $h_1+h_2 = 3L/4$ (2).
Από τις (1) και (2) $\longrightarrow W_B = -3mgL/4$

γ. Έρχο δυνάμεων σε σώμα που εκτελεί σύνθετη κίνηση.

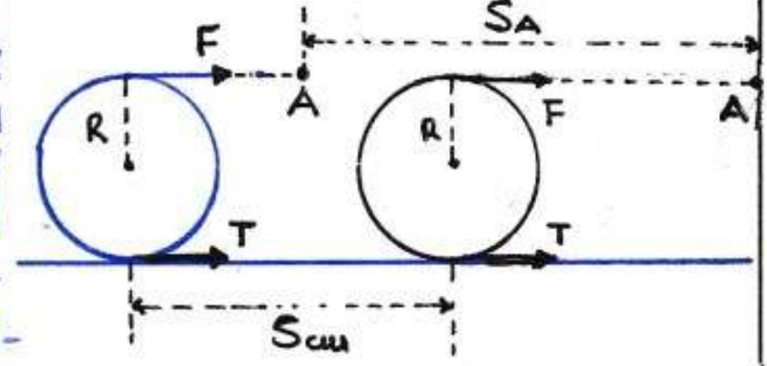
Όταν ένα σώμα εκτελεί στροφική κίνηση ως πρός σταθερό άξονα το έρχο της δύναμης ταυτίζεται με το "έρχο της ροπής της".

Όταν, όμως, το σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση το έρχο της δύναμης και το "έρχο της ροπής της" δεν ταυτίζονται.

Παράδειχμα

Στον τροχό του σχήματος ασκείται στο

ανώτερο σημείο του περιμετρικού του κύκλου σταθερή δύναμη F, μέσω του νήματος πυ τραβάμε με το χέρι. Η F εφάπτεται στον τροχό. Ο τροχός κυλά χωρίς να ολισθαίνει και



στα σημεία που κάθε στιγμή ακουμπούν στο δάπεδο ασκείται στον τροχό και η στατική τριβή, πυ έχει φορά όπως στο σχήμα.

<u>Το ερώτημα είναι</u>: ποιό είναι το έργο της δύναμης F και ποιό το έργο της στατικής τριβής T, όταν ο τροχός μετατοπιστεί κατά $S_{κυλ}$;

<u>Η απάντηση.</u>

Η F ασκείται στον τροχό μέσω του νήματος το οποίο καθώς ο τροχός μετατοπίζεται αυτό ξετυλίγεται σε μήκος ίσο με τη μετατόπιση του τροχού. Επομένως, η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης είναι $S_A = 2 \cdot S_{κυλ}$.

Είναι $W_F = F \cdot S_A \longrightarrow \underline{W_F = 2F \cdot S_{κυλ}}$ (1).

<u>Το έργο αυτό εκφράζει – ισούται με – τη μηχανική ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω του έργου της δύναμης, δηλαδή $W_F = \Delta E$.</u>

Από τη σχέση (1) προκύπτει επίσης ότι η δύναμη F παράγει διπλάσιο έργο από αυτό που θα παρήγαγε, αν ενεργούσε στο κέντρο μάζας.

Όσον αφορά τη στατική τριβή T επειδή κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του περιμετρικού κύκλου του τροχού δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της και επομένως δεν παράγει έργο.

<u>Η στατική τριβή από ακλόνητο – σταθερό επίπεδο κύλισης δεν παράγει έργο.</u>

Τη στιγμή που ο τροχός έχει μετατοπιστεί κατά $S_{κυλ}$ έχει εκτελέσει $N = S_{κυλ}/2\pi R$ και επομένως έχει γωνιακή μετατόπιση

$$\Delta\phi = 2\pi \cdot N = 2\pi S_{cm}/2\pi R \rightarrow \Delta\phi = S_{cm}/R.$$

Το έργο της ροπής της δύναμης F είναι

$$W_{\tau(F)} = \tau_{(F)} \cdot \Delta\phi = F \cdot R \cdot \Delta\phi \rightarrow W_{\tau(F)} = F \cdot S_{cm}.$$

Το έργο της ροπής της F αφορά το κομμάτι του έργου της F που σχετίζεται μόνο με τη στροφική κίνηση / μόνο με τη γωνιακή μετατόπιση του στερεού και εκφράζει το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται στον τροχό μέσω του έργου της δύναμης F και ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του τροχού λόγω της στροφικής του κίνησης ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζα του, δηλαδή $\Delta K_{\sigma} = W_{\tau(F)}$.

Απόδειξη.

Είναι $\Delta K_{o\lambda} = \Delta K_{\sigma} + \Delta K_{\mu}$

$\Delta K_{o\lambda} = W_F$ (Θ.Μ.Κ.Ε), οπότε

$\Delta K_{\sigma} + \Delta K_{\mu} = W_F \leftrightarrow$

$\Delta K_{\sigma} = W_F - \Delta K_{\mu}$ (1).

Όταν σ' ένα ελεύθερο στερεό όπως ο τροχός, ασκηθεί δύναμη F για το είδος της μεταφορικής κίνησης που θα εκτελέσει το στερεό δεν έχει καμία σημασία ποιο θα είναι το σημείο εφαρμογής της F. Εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το μέτρο και την κατεύθυνση της F.

Έτσι, είτε ο φορέας της F διέρχεται από το κ.μάζας του τροχού, οπότε ο τροχός εκτελεί μεταφορική κίνηση, είτε δε διέρχεται οπότε ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση, ο τροχός κινείται μεταφορικά με τον ίδιο τρόπο, με την ίδια επιτάχυνση. Επομένως μετά από ορισμένο χρόνο θα έχει μετατοπιστεί το ίδιο και θα έχει αποκτήσει την ίδια μεταφορική ταχύτητα.

Άρα όταν ο τροχός μετατοπιστεί κατά S_{cm} για το κομμάτι του έργου της F που αφορά

τη μεταφορική κίνηση του τροχού ισχύει ότι $W_{\mu(F)} = F \cdot S_{cm}$. Είναι $\underline{\Delta K_\mu = W_{\mu(F)}} \rightarrow$
$\Delta K_\mu = F \cdot S_{cm}$ (2).
Απο τις (1) και (2) $\rightarrow$
$\Delta K_\sigma = 2F \cdot S_{cm} - F \cdot S_{cm} \rightarrow$
$\Delta K_\sigma = F \cdot S_{cm} \rightarrow \underline{\Delta K_\sigma = W_{\tau(F)}}$.

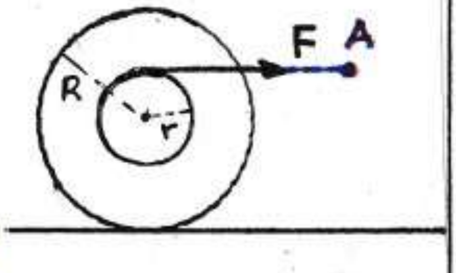
Είναι $\Delta K_{o\lambda} = \Delta K_\mu + \Delta K_\sigma = W_{\mu(F)} + W_{\tau(F)}$
$\Delta K_{o\lambda} = W_F$ (Θ.Μ.Κ.Ε), οπότε

$$\boxed{W_F = W_{\mu(F)} + W_{\tau(F)}}$$

Μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης που ασκείται σ' ένα στερεό που εκτελεί σύνθετη κίνηση προσθέτοντας το έργο της δύναμης που οφείλεται στη μεταφορική του κίνηση – θεωρώντας ότι η δύναμη ασκείται στο κέντρο μάζας του στερεού – και το έργο της ροπής της δύναμης ως προς το κέντρο μάζας του στερεού.

Παράδειγμα.

Ο διπλός δίσκος ακτίνας R με αυλάκι ακτίνας r κυλάει χωρίς ολίσθηση υπο την επίδραση της οριζόντιας δύναμης F που ασκείται μέσω νήματος το οποίο ξετυλίγεται καθώς το τραβάμε με το χέρι.



Ποιό είναι το έργο της δύναμης πανω στο δίσκο όταν αυτός έχει μετατοπιστεί κατά S_{cm};

Απάντηση

Είναι $W_F = W_{\mu(F)} + W_{\tau(F)}$ (1).
$W_{\mu(F)} = F \cdot S_{cm}$,
$W_{\tau(F)} = F \cdot r \cdot \Delta\phi$, όπου $\Delta\phi = S_{cm}/R$
η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου.
Άρα $W_{\tau(F)} = F \cdot r \cdot S_{cm}/R \xrightarrow{(1)}$

$W_F = F \cdot S_{cm} + F \cdot r \cdot S_{cm}/R \longrightarrow$

$W_F = F \cdot S_{cm} (1 + r/R)$.

4. Το Θ.Μ.Κ. Ενέργειας στη σύνθετη κίνηση.

$$\Delta K_\Sigma = \Sigma W_F \longrightarrow$$

$$\boxed{\Delta K_\mu + \Delta K_\sigma = \Sigma W_F}$$

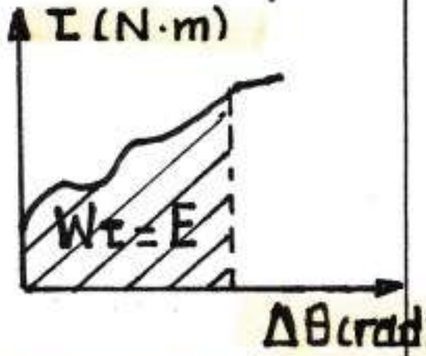
Επομένως, για το διπλό δίσκο του παραπάνω παραδείγματος, εφόσον είναι αρχικά ακίνητος, ισχύει:

$$m \cdot U_{cm}^2/2 + I_{cm} \cdot \omega^2/2 = F \cdot S_{cm} (1 + r/R).$$

5. Το έργο της ροπής δύναμης η οποία προκαλεί ροπή μεταβλητού μέτρου.

Όταν μία δύναμη προκαλεί σταθερή ροπή, το έργο της ροπής της δύναμης είναι $W = \tau \cdot \Delta\theta$.

Όταν όμως η δύναμη προκαλεί ροπή μεταβλητού μέτρου το έργο της ροπής της δύναμης ισούται με το εμβαδό της επιφάνειας, στο διάγραμμα της συνάρτησης $\tau = f(\Delta\theta)$, ανάμεσα στη γραμμή του διαγράμματος και στον άξονα της γωνιακής μετατόπισης.



6. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός στερεού.

α. Αν το στερεό εκτελεί στροφική κίνηση ως προς σταθερό άξονα είναι:

$$dK/dt = \Sigma W_\tau/dt = \Sigma\tau \cdot d\phi/dt = \Sigma\tau \cdot \omega =$$
$$= I \cdot a_\gamma \cdot \omega.$$

β. Αν το στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση, τότε:

1. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης είναι:

$$\underline{dK/dt} = \Sigma W_{\mu(F)}/dt = \Sigma F \cdot dx/dt = \Sigma F \cdot u_{cm} = \underline{m \cdot a_{cm} \cdot u_{cm}}.$$

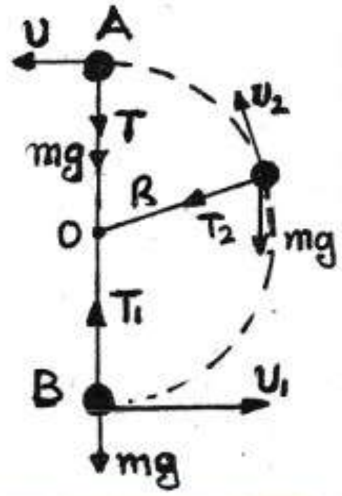
2. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης είναι:

$$\underline{dK/dt} = \Sigma W_{\tau(F)}/dt = \Sigma \tau \cdot d\phi/dt = \underline{I_{cm} \cdot a_x \cdot \omega}.$$

7. Το πρόβλημα της ανακύκλωσης.

A. Ανακύκλωση υλικού σημείου που είναι δεμένο σε λεπτό νήμα.

Για να εκτελέσει ανακύκλωση ένα υλικό σημείο που είναι δεμένο σε λεπτό νήμα πρέπει να φτάσει στην ανώτερη θέση της κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς του έχοντας μία ελάχιστη ταχύτητα, που λέγεται **ταχύτητα ανακύκλωσης**, την οποία υπολογίζουμε με τον ακόλουθο συλλογισμό.



Εφόσον το υλικό σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση της ακτίνας της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του να είναι σε κάθε σημείο της τροχιάς ίση με την κεντρομόλο δύναμη – να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως, για τη συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται όταν βρίσκεται στο ανώτερο σημείο A της τροχιάς του να είναι $\Sigma F_A = m a_k \rightarrow T + mg = m u^2/R$ (1).

Για την τάση T του νήματος στο σημείο A θα πρέπει να είναι $T \geq 0$.

Είναι $T=0$ όταν το νήμα είναι έτοιμο να χαλαρώσει.

Από την (1) $\rightarrow$ $T = mu^2/R - mg$. Επομένως

$mu^2/R - mg \geq 0 \rightarrow$

$u^2 \geq gR \rightarrow$

$u_{min} = \sqrt{gR}$ (ταχύτητα ανακύκλωσης).

Αν u_1 είναι η ταχύτητα την οποία πρέπει να έχει το υλικό σημείο στο κατώτερο σημείο Β της τροχιάς του ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση από το Θ.Μ.Κ.Ε $\rightarrow$

$$\Delta K_{(B-A)} = \Sigma W_F \rightarrow$$

$$K_A - K_B = -mg \cdot 2R \rightarrow$$

$$mu_{αν}^2/2 - mu_1^2/2 = -2mgR \rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{u_{αν}^2 + 4gR} \xrightarrow{u_{αν}^2 = gR}$$

$$u_1 = \sqrt{5gR}$$

Β. Ανακύκλωση υλικού σημείου που είναι δεμένο σε αβαρή ράβδο.

Προκειμένου το υλικό σημείο να κάνει ανακύκλωση θα πρέπει για την ταχύτητά του u_A στο ανώτερο σημείο Α της κυκλικής τροχιάς του να ισχύει ότι $u_A \geq 0$ (η ράβδος δε χαλαρώνει).

Επομένως, αν u_1 είναι η ελάχιστη ταχύτητα την οποία πρέπει να έχει το υλικό σημείο στο κατώτερο σημείο Β της κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς του προκειμένου να κάνει ανακύκλωση, από το

Θ.Μ.Κ.Ε $\rightarrow$ $\Delta K_{(B-A)} = \Sigma W_F \rightarrow$

$$K_A - K_B = -mg \cdot 2R \rightarrow$$

$$mu_A^2/2 - mu_B^2/2 = -2mgR$$

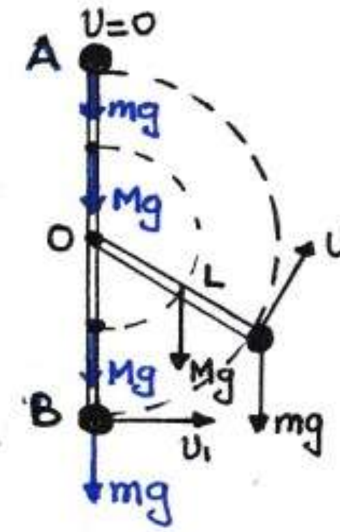
Αν $u_B = u_1 \rightarrow u_A = 0$, οπότε

$$-mu_1^2/2 = -2mgR \rightarrow \quad u_1 = \sqrt{4gR}.$$

Γ. Ανακύκλωση υλικού σημείου μάζας m που είναι δεμένο σε ράβδο μάζας Μ.

Προκειμένου το υλικό σημείο να κάνει ανακύκλωση θα πρέπει για την ταχύτητά του $υ_Α$ στο ανώτερο σημείο Α της κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς του να ισχύει ότι $υ_Α \geq 0$ (η ράβδος δε χαλαρώνει).

Το σύστημα ράβδος - υλικό σημείο εκτελεί στροφική κίνηση.



Επομένως αν $υ_1$ είναι η ελάχιστη ταχύτητα την οποία πρέπει να έχει το υλικό σημείο στο κατώτερο σημείο Β της τροχιάς του προκειμένου να κάνει ανακύκλωση από το Θ.Μ.Κ.Ε →

$$\Delta K_{σ(B\to A)} = \Sigma W_F \longrightarrow$$

$$K_{σ(A)} - K_{σ(B)} = -mg\cdot 2L - MgL \longrightarrow$$

$$I\cdot ω_A^2/2 - I\cdot ω_B^2/2 = -2mgL - MgL$$

Αν $υ_B = υ_1 = ω_1 L \longrightarrow υ_A = ω_A\cdot L = 0$, οπότε

$$0 - I\cdot ω_1^2/2 = -2mgL - MgL \longrightarrow$$

$$I\cdot ω_1^2/2 = 2mgL + MgL$$, όπου

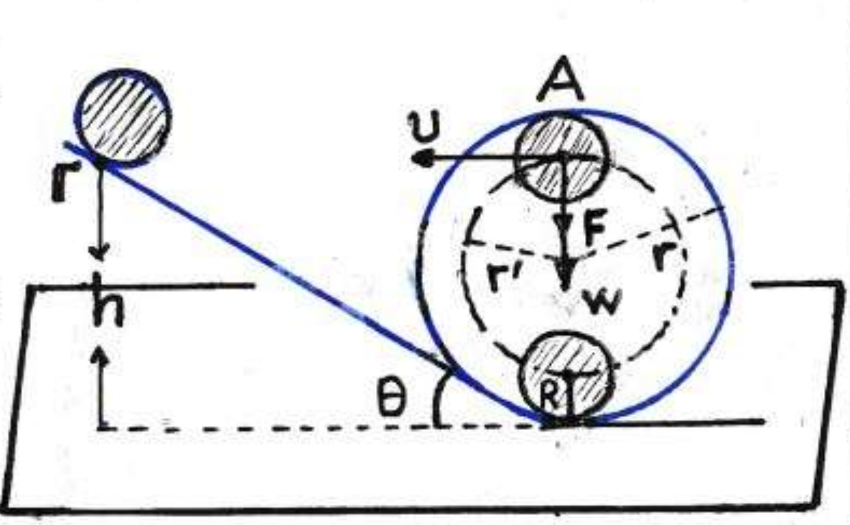
$$I = I_{cm(ρ)} + M(L/2)^2 + mL^2 =$$

$$= ML^2/12 + ML^2/4 + mL^2 =$$

$$= ML^2/3 + mL^2.$$

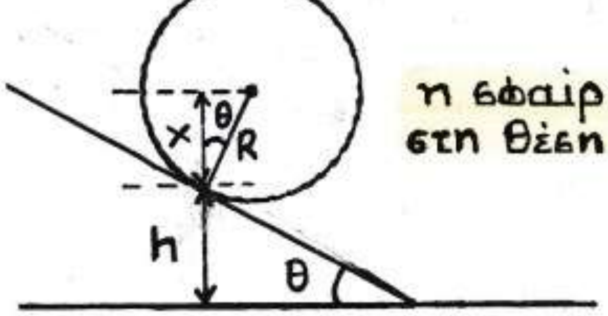
Δ. Ανακύκλωση σφαίρας ακτίνας R σε στίβο ανακύκλωσης ακτίνας r.

Προκειμένου μία σφαίρα, που αφήνεται σε κάποιο σημείο του πλάγιου διαδρόμου στο στίβο ανακύκλωσης, να κάνει ανακύκλωση θα πρέπει:



1. για τη συνισταμένη των δυνάμεων

που δέχεται η σφαίρα όταν βρίσκεται στο ανώτερο σημείο Α της τροχιάς της να ισχύει ότι



η σφαίρα στη θέση Γ.

$\Sigma F_A = m \cdot a_\kappa$ (1),

όπου a_κ η κεντρομόλος επιτάχυνση της σφαίρας στο σημείο Α,

2. $F \geq 0$, όπου F η δύναμη που ασκεί ο κυκλικός στίβος στη σφαίρα, στο σημείο Α.

Είναι $\Sigma F_A = F + mg$ και $a_\kappa = m u_A^2 / r'$, όπου r' η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το κέντρο μάζας της σφαίρας.

Είναι $r' = r - R$, οπότε από την (1) $\rightarrow$

$F + mg = m u_A^2/(r-R) \leftrightarrow$

$F = m u_A^2/(r-R) - mg$ και εφόσον $F \geq 0 \rightarrow$

$m u_A^2/(r-R) \geq mg \leftrightarrow \quad u_A \geq \sqrt{g(r-R)}$

Επομένως η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει η σφαίρα στο Α προκειμένου να κάνει ανακύκλωση, είναι $u = \sqrt{g(r-R)}$.

Αν το σημείο Γ του πλάγιου επιπέδου στο οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να φτάσει στο σημείο Α με αυτή την ταχύτητα βρίσκεται σε ύψος h τότε το κέντρο μάζας της σφαίρας θα βρίσκεται σε ύψος $h + x = h + R\sigma\upsilon\nu\theta$.

Στη σφαίρα, που κατά τη διάρκεια της κίνησής της από το Γ στο Α κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, η μόνη "εργαζόμενη" δύναμη που ασκείται είναι το βάρος της w, που είναι δύναμη διατηρητική. Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κατώτερο σημείο του στίβου ανακύκλωσης η βαρυτική δυναμική ενέργεια της σφαίρας είναι μηδέν από την

Α.Δ.Μ.Ε $\rightarrow \quad K_\Gamma + U_\Gamma = K_A + U_A \rightarrow$

$mg(h + R\sigma\upsilon\nu\theta) = mg(2r - R) + m u_A^2/2 + I \cdot \omega_A^2/2$.

Είναι $I = 2mR^2/5$, $u_A = \omega_A R \rightarrow \omega_A = u_A/R$, οπότε $K_A = 7 m u_A^2/10$.

Αν η σφαίρα κάνει ανακύκλωση με τη μικρότερη δυνατή ταχύτητα $υ=\sqrt{g(r-R)}$ θα είναι $K_A = 7mg(r-R)/10$. Επομένως,

$$mg(h+R συνθ) = mg(2r-R) + 7mg(r-R)/10 \rightarrow$$

$$\underline{h = 27r/10 - 17R/10 - R συνθ}.$$

Αν η σφαίρα, κατά τη διάρκεια της κίνησής της από το Γ στο Α ολισθαίνει χωρίς τριβές επειδή $K_A + U_Γ = K_A + U_A$ σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω θα είναι

$$mg(h+R συνθ) = mυ_A^2/2 + mg(2r-R).$$

οπότε αν $υ_A = υ = \sqrt{g(r-R)} \longrightarrow$

$$mg(h+R συνθ) = mg(r-R)/2 + mg(2r-R) \leftrightarrow$$

$$\underline{h = 5R/2 - R(3/2 + συνθ)}.$$

Δ. Ζιώτης