

§ 4-3, 4-4

Ροπή δύναμηςΙσορροπία στερεού σώματοςΗ έννοια - μέγεθος "ροπή δύναμης",1. αναφέρεται:

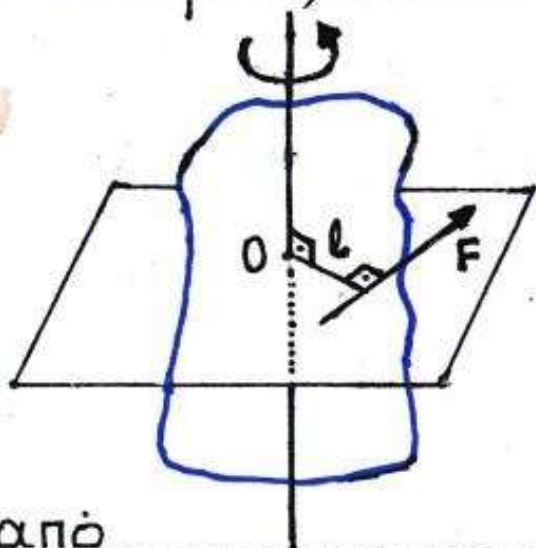
α. σε δύναμη που ασκείται σε συγκεκριμένο σώμα.

β. σε γεωμετρικό σημείο ή άξονα περιστροφής εφόσον το σώμα στο οποίο ασκείται η δύναμη έχει τη δυνατότητα να (περ)στρέφεται ως προς συγκεκριμένο άξονα.

2. συμβολίζεται: με το ελληνικό γράμμα (τ)3. είναι μέγεθος διανυσματικό του οποίου:

α. εφόσον αναφέρεται σε γεωμετρικό σημείο, η διεύθυνση είναι η διεύθυνση του άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το σημείο αναφοράς, και διέρχεται από το σημείο αναφοράς, η φορά του είναι η καθοριζόμενη με τον κανόνα του δεξιού χεριού από τη φορά προς την οποία η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα ενώ το μέτρο του λούται με το χινομένο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση ℓ του σημείου αναφοράς από το φορέα της δύναμης, δηλαδή $\tau = F \cdot \ell$.

β. εφόσον αναφέρεται σε άξονα περιστροφής και ο φορέας της δύναμης βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, η διεύθυνση είναι η διεύθυνση του άξονα, η φορά του η καθοριζόμενη με τον κανόνα του δεξιού χεριού από



τη φορά προς την οποία η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα, ενώ το μέτρο του λούται με το χινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση l του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονα), δηλαδή $\tau = F \cdot l$.

Σημείωση

Κατά την επίλυση προβλημάτων για να περιγράψουμε την τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα σώμα προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση, χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της ροπής.

Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από την κατεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να το περιστρέψει προς την κατεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

4. έχει ως μονάδα μέτρησης το $1\text{N}\cdot\text{m}$.

5. ειφράζει, την ικανότητα της δύναμης να προκαλέσει μεταβολή στη ετροφική κινήτικη κατάσταση του στερεού σώματος στο οποίο ασκείται, ενώ ταυτόχρονα περιγράφει την τάση της δύναμης να περιστρέψει το σώμα προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση.

Δηλαδή, το μέγεθος ροπή δύναμης εβάχεται ως αιτία μεταβολής της ετροφικής κινήτικης κατάστασης ενός σώματος.

Παρατηρήσεις

1. Για τη ροπή δύναμης που ενερχεί σ' ένα σώμα δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι ορίζεται σε σχέση με κάποιον άξονα.

Στην περίπτωση όμως ενός στερεού που μπορεί να περιστρέφεται περί σταθερό άξονα, επειδή για τη ροπή ειδικό ενδιαφέρον έχει η

συνετώσα της ροπής κατά τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής - αφορά τη ροπή της συνετώσας της ασκούμενης δύναμης που ο φορέας της βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής ως προς το σημείο O που το επίπεδο αυτό τέμνει τον άξονα περιστροφής - μπορούμε, καταχρηστικά, να θεωρήσουμε ότι η ροπή ορίζεται ως προς τον - αναφέρεται στον - άξονα περιστροφής.

Στην περίπτωση αυτή όμως η σωστή διατύπωση όταν αναφερόμαστε στη ροπή της δύναμης είναι να μιλήσουμε για τη "ροπή της δύναμης κατά τον άξονα περιστροφής" και όχι "ως προς τον άξονα περιστροφής".

2. Αν σε στερεό σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκούνται δύο ή περισσότερες ομοεπίπεδες δυνάμεις που βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, επειδή τα διανύσματα, $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3, \dots$, των ροπών των ασκούμενων δυνάμεων είναι συχρηματικά - έχουν όλα τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής - η πρόθεσή τους ανάχεται στην αλγεβρική πρόθεση των τιμών τδς.

Επομένως για τη συνισταμένη - συνολική ροπή $\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots$, που δέχεται το σώμα ισχύει ότι $\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots$, όπου τ_1, τ_2, \dots είναι οι αλγεβρικές τιμές των ροπών που δέχεται το σώμα από τις ασκούμενες δυνάμεις και $\sum \tau$ η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης - συνολικής - ροπής.

3. Αν είναι ελεύθερο στερεό σώμα, δηλαδή σώμα που δεν έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται ως προς σταθερό άξονα, ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν θα περιστραφεί. Θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.

Στην περίπτωση αυτή για το είδος της μεταφορικής κίνησης που θα εκτελέσει το σώμα ή

καλύτερα το κέντρο μάζας του σώματος δεν έχει καμία σημασία ποιο θα είναι το σημείο εφαρμοχής της δύναμης.

Αν όμως ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα ταυτόχρονα με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική κίνηση από ένα νοητό άξονα (ελεύθερος άξονας) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το κέντρο μάζας του σώματος.

Και στην περίπτωση αυτή για το είδος της μεταφορικής κίνησης που θα εκτελέσει το σώμα ή καλύτερα το κέντρο μάζας του σώματος δεν έχει καμία σημασία ποιο θα είναι το σημείο εφαρμοχής της δύναμης.

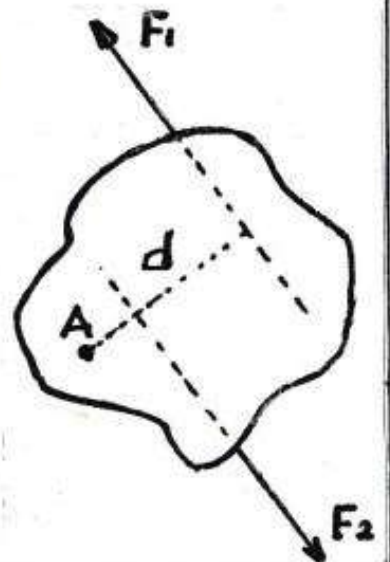
4. Ζεύχος δυνάμεων, αποτελούν δυο αντίρροπες δυνάμεις F_1 και F_2 με ίσα μέτρα που οι φορείς τους απέχουν μεταξύ τους απόσταση d .

Αν έ ένα σώμα ασκείται ένα Ζεύχος δυνάμεων που οι φορείς τους απέχουν μεταξύ τους απόσταση d η αλγεβρική τιμή της ροπής του Ζεύχους ως προς κάποιο σημείο A που βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν οι φορείς των δυνάμεων του Ζεύχους και απέχει απόσταση x_1 από το φορέα της δύναμης F_1 και απόσταση x_2 από το φορέα της F_2 είναι:

$\tau = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 = F(x_1 - x_2)$, οπότε οπότε $\tau = F \cdot d$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επομένως,

η ροπή Ζεύχους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο. (Ε. 2007).



Ερώτηση

Ποιό είναι το αποτέλεσμα της ροπής Ίεχους δυνάμεων ε' ένα σώμα;

Απάντηση

Περιστροφική κίνηση γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν οι φορείς των δυνάμεων του Ίεχους.

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Η ισορροπία υλικού σώματος θεμελιώνεται στο νόμο της αδράνειας.

Τα βασικά ερωτήματα είναι τρία.

"Πότε θα λέμε ότι ένα σώμα ισορροπεί";

Όσον αφορά δε τα μετέθρη που εμπλέκονται στο φαινόμενο ισορροπία,

"Τι ιαχύει όταν ένα σώμα ισορροπεί;

"Τι πρέπει να ιαχύει ώστε ένα σώμα να ισορροπεί;"

α. η ισορροπία του υλικού σημείου

Ένα υλικό σημείο μη έχοντας διαστάσεις έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις.

Έτσι, θα λέμε ότι ένα υλικό σημείο ισορροπεί όταν είναι ακίνητο ($v_{cm} = 0$) ή όταν κινείται με σταθερή ταχύτητα ($v_{cm} = \text{σταθ.}$).

Συνθήκη ισορροπίας.

Ένα υλικό σημείο εφόσον ισορροπεί η συνισταμένη των ασκούμενων δυνάμεων είναι μηδέν, δηλαδή $\Sigma F = 0$ ή ισοδύναμα $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$, αν οι δυνάμεις είναι ομοεπίπεδες. Ιαχύει και το αντίστροφο.

Σημείωση

Το ΣF_x είναι το αλγεβρικό άθροισμα των

συνισταμένων των αγκούμενων δυνάμεων σε άξονα $x'x$. Το ίδιο ισχύει αντίστοιχα και για την αλγεβρική ποσότητα ΣF_y . Οι άξονες $x'x$ και $y'y'$ είναι δύο οποιοδήποτε κάθετοι άξονες με κοινή αρχή που βρίσκονται στο επίπεδο των αγκούμενων δυνάμεων.

β. η ισορροπία του στερεού σωματός

Ένα στερεό σώμα έχει τη δυνατότητα να εκτελεί είτε μεταφορική είτε γτροφική κίνηση ή αιώση και σύνθετη κίνηση, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και γτροφικής κίνησης.

Έτσι, θα λέμε ότι ένα στερεό σώμα ισορροπεί όταν $\vec{U}_{cm} = 0$ ή $\vec{U}_{cm} = \text{σταθ.}$ και $\vec{\omega} = 0$.

Συνθήκη ισορροπίας

Ένα στερεό σώμα, στο οποίο αγκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, εφόσον ισορροπεί ισχύει ότι:

Πρώτον, η συνισταμένη των αγκούμενων δυνάμεων είναι μηδέν, δηλαδή $\Sigma \vec{F} = 0$ ή ισοδύναμα $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.

Δεύτερον, η συνισταμένη ροπή ή ισοδύναμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των αγκούμενων δυνάμεων ή κατά οποιοδήποτε άξονα π.χ είναι κάθετος στο επίπεδο των αγκούμενων δυνάμεων, είναι μηδέν, δηλαδή $\Sigma \tau = 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι αν:

$(\Sigma \vec{F} = 0 \text{ και } \Sigma \tau = 0) \leftrightarrow (\alpha_{cm} = 0 \text{ και } \alpha_x = 0)$
 $\leftrightarrow [(\omega_{cm} = 0 \text{ ή } \omega_{cm} = \text{σταθ.}) \text{ και } (\omega = 0 \text{ ή } \omega = \text{σταθ.})]$
 οπότε $(\omega_{cm} = 0 \text{ και } \omega = 0 \leftrightarrow \text{ισορ.})$ ή $(\omega_{cm} = \text{σταθ. και } \omega = 0 \leftrightarrow \text{ισορ.})$ ή $(\omega_{cm} = 0 \text{ και } \omega = \text{σταθ.} \leftrightarrow \text{οχι ισορ.})$ ή $(\omega_{cm} = \text{σταθ. και } \omega = \text{σταθ.} \leftrightarrow \text{οχι ισορ.})$

Ερώτηση

Γιατί ε' ένα ελεύθερο στερεό που ισορρο-

πεί και είναι $\Sigma \vec{F} = 0$ θα πρέπει και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των ασκούμενων δυνάμεων να είναι μηδέν;

Απάντηση

Διότι όταν $\Sigma \vec{F} = 0$ το στερεό ισορροπεί μεταφορικά. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι δεν θα στραφεί. Αν υπάρχουν ροπές το σώμα θα στραφεί. Στην περίπτωση όμως που $\Sigma \vec{F} = 0$ και υπάρχουν ροπές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων. Ένα ζεύγος δυνάμεων είναι $\Sigma \vec{F} = 0$ και $\tau \neq 0$.

Επειδή δε η ροπή ζεύγους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο που ορίζουν οι φορείς του ζεύγους θα πρέπει εφόσον το στερεό δε στρέφεται να είναι $\Sigma \tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των ασκούμενων δυνάμεων. Έτσι εξασφαλίζεται ότι δεν (θα) υπάρχουν ροπές ζεύγους.

Σημείωση

Εξυπακούεται ότι το φαινόμενο της ισορροπίας στερεού σώματος αναφέρεται σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δηλαδή σε κάποιο σύστημα αναφοράς που θεωρούμε ότι είναι ακίνητο ή ότι κινείται μεταφορικά με σταθερή ταχύτητα.

Παρατηρήσεις

1. Αν και στην περίπτωση στερεού σώματος που ισορροπεί και έχει σταθερό άξονα περιστροφής — το στερεό αυτό μπορεί να κάνει μόνο στροφική κίνηση — αρκεί να χράφουμε ότι $\Sigma \tau = 0$, είναι χρήσιμο και στην περίπτωση αυτή να χράφουμε ότι και $\Sigma \vec{F} = 0$ που μας επιτρέπει τον υπολογισμό της δύναμης F που δέχεται το σώμα από τον άξονα.

2. Στην περίπτωση στερεού σώματος που ισορ-

8.

ροπεί και ε' αυτό αγκούνται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις, οι φορείς των τριών δυνάμεων διέχονται από το ίδιο σημείο.

Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται εύκολα με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής και μπορεί να απλοποιήσει τη λύση πολλών προβλημάτων που αναφέρονται στην ισορροπία στερεών σωμάτων.

Απόδειξη

Αν ο φορέας της τρίτης δύναμης δεν περνούσε από το σημείο που τέμνονται οι φορείς των δύο άλλων, η τρίτη δύναμη θα είχε ως προς το σημείο εκείνο ροπή διάφορη του μηδενός και επομένως για τη συνισταμένη ροπή δεν θα ίσχυε ότι $\Sigma \tau = 0$, δηλαδή το σώμα δεν θα ισορροπούσε. Αυτό όμως είναι άτοπο.

3. Στην περίπτωση στερεού σώματος που ισορροπεί και ε' αυτό αγκούνται N δυνάμεις, από τις οποίες οι $N-1$ έχουν την ίδια διεύθυνση, τότε και η N -οστή δύναμη θα έχει την ίδια διεύθυνση με τις άλλες.

Απόδειξη

Αν δε συνέβαινε αυτό, τότε η συνισταμένη των $N-1$ δυνάμεων δε θα μπορούσε να είναι αντίθετη με τη N -οστή δύναμη όπως πρέπει να είναι προκειμένου να είναι $\Sigma \vec{F} = 0$ εφόσον έχουμε ισορροπία.

Βασικές παρατηρήσεις

για την επίλυση ασκήσεων

1. Η ροπή μιας δύναμης

α. είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο που βρίσκεται πάνω στο φορέα της.

β. δε μεταβάλλεται αν η δύναμη ολισθήσει κατά μήκος του φορέα της αλλάζοντας σημείο εφαρμογής.

γ. είναι μηδενική ως προς κατά κάθε άξονα που είναι παράλληλος στο φορέα της ή τον τέμνει.

2. Όταν υπολογίζουμε τη ροπή μιας δύναμης F ως κάποιο σημείο O , πρέπει να προέχουμε ποιά είναι η απόσταση του σημείου O από το φορέα της δύναμης.

Νπενθυμίζουμε ότι ως απόσταση d σημείου από ευθεία ορίζεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που φέρουμε κάθετα από το σημείο προς την ευθεία.

Έτσι, αν η συγκεκριμένη απόσταση δεν είναι χνώστη για τον υπολογισμό της ροπής της δύναμης F :

α. θα φέρουμε την κάθετη από το σημείο O στο φορέα της δύναμης και θα υπολογίσουμε την απόσταση d

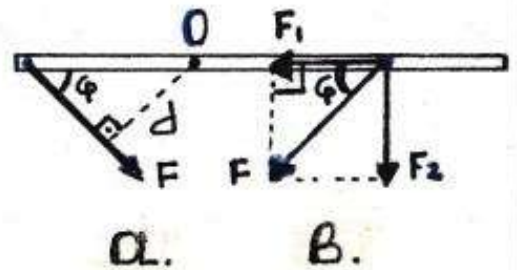
β. θα αναλύσουμε την F σε δύο συνιστώσες F_1 και F_2 τέτοιες ώστε ο φορέας της F_1 να διέρχεται από O και η F_2 να είναι κάθετη στην F_1 .

Μ' αυτόν τον τρόπο ο υπολογισμός της ροπής της F ανάχεται στον υπολογισμό της ροπής της F_2 ως προς το O .

3. Μια από τις συνηθισμένες δυνάμεις που ενεργούν στα στερεά σώματα που μελετούμε είναι η αντίδραση A από την επιφάνεια στήριξης, που είναι η δύναμη που ασκεί μία επιφάνεια στο σώμα που στηρίζεται ακουμπά πάνω της.

Η αντίδραση μιας επιφάνειας πάνω β ένα σώμα έχει σε κάθε περίπτωση φορά προς το σώμα ενώ η διεύθυνσή της είναι κάθετη στην επιφάνεια στήριξης σε δύο περιπτώσεις:

α. αν η επιφάνεια στήριξης είναι λεία,



β. αν η επιφάνεια στήριξης δεν είναι λεία, αλλά το σώμα ούτε ολισθαίνει ούτε τείνει να ολισθαίνει.

Αν το σώμα ολισθαίνει ή τείνει να ολισθαίνει σε επιφάνεια που δεν είναι λεία, τότε η αντίδραση δεν είναι κάθετη στην επιφάνεια και αναλύεται σε δύο συνιστώσες, από τις οποίες η κάθετη στην επιφάνεια στήριξης συμβολίζεται με N και ονομάζεται κάθετη αντίδραση, ενώ η παράλληλη στην επιφάνεια στήριξης συμβολίζεται με T και ονομάζεται τριβή.

Όταν το σώμα ολισθαίνει η τριβή ονομάζεται τριβή ολισθησης και έχει μέτρο $T = \mu \cdot N$, ενώ όταν το σώμα τείνει να ολισθήσει η τριβή ονομάζεται στατική τριβή.

Σε κάθε περίπτωση η τριβή έχει κατεύθυνση αντίθετη προς την κατεύθυνση στην οποία κινείται ή τείνει να κληθεί το σώμα.

4. Η δύναμη από άρθρωση.

Άρθρωση είναι ο τρόπος σύνδεσης δύο σωμάτων ο οποίος δεν επιτρέπει την απομάκρυνση του ενός σώματος από το άλλο, επιτρέπει όμως την περιστροφή του ενός ή και των δύο σωμάτων γύρω από άξονα.

Για να βρούμε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί μια άρθρωση στο σώμα που μπορεί να στρέφεται αναλύουμε τη δύναμη σε δύο κάθετες συνιστώσες τις οποίες και υπολογίζουμε εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας.

Αν F_x και F_y είναι οι δύο συνιστώσες η δύναμη F_A που ασκείται από την άρθρωση έχει μέτρο $F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ και σχηματίζει με την F_x γωνία θ , όπου $\epsilon\phi\theta = F_x / F_y$.

5. Εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας σε στερεό. Σειρά εργασιών.

α. Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό σώμα.

β. Αν οι δυνάμεις δεν είναι παράλληλες ή κάθετες μεταξύ τους τις αναλύουμε σε συνιστώσες - όσες εξ αυτών αναλύονται - ως προς κατάλληλους ορθογώνιους άξονες x και y .

γ. Υπολογίζουμε - αν είναι δυνατόν - την τιμή των συνιστωσών.

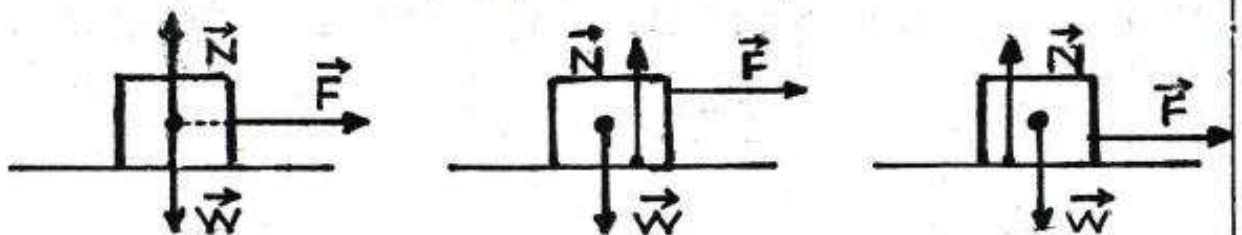
δ. Αν το σώμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων, εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα αυτό.

Αν αυτό δεν είναι αρκετό εφαρμόζουμε για κάθε άξονα x και y τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων που, εκτός των άλλων, επιτρέπει και τον υπολογισμό της δύναμης που δέχεται το σώμα από τον άξονα περιστροφής.

Αν το στερεό δεν έχει κάποιο συσκευασμένο άξονα περιστροφής μπορούμε να εφαρμόσουμε τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς όποιο άξονα θέλουμε. Σ' αυτή την περίπτωση προτιμούμε να την εφαρμόσουμε ως προς άξονα από τον οποίο διέρχονται οι φορείς των περισσότερων άγνωστων δυνάμεων.

6. Πάρα πολύ μεγάλη προεχρή στο σημείο εφαρμοχής της κάθετης αντίδρασης N πάνω σ' ένα στερεό σώμα.

Συνήθως, το σημείο εφαρμοχής της N το τοποθετούμε στο κέντρο του στερεού. Αυτό όμως δεν είναι σωστό σε ορισμένες περιπτώσεις.



Ας δούμε το στερεό στο παραπάνω σχήμα.

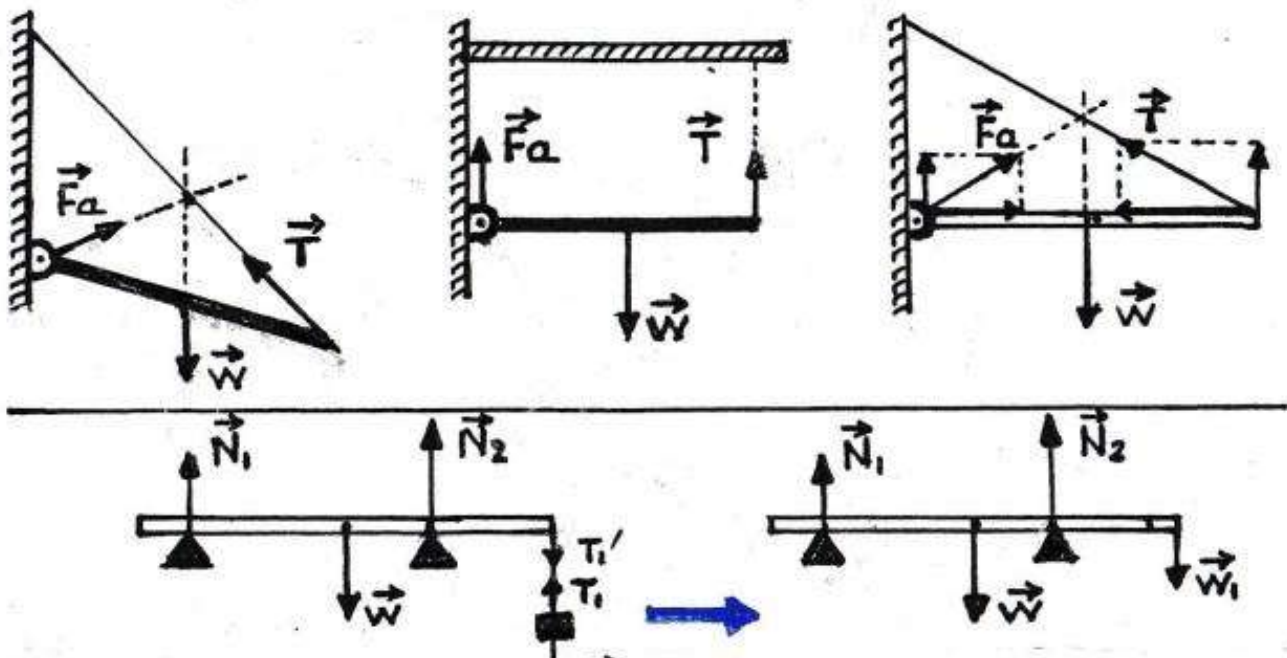
Το στερεό, λόγω της δύναμης F , μεταφορικά βρίσκεται είτε σε ισορροπία είτε σε επιταχυνόμενη κίνηση δεξονός που εξαρτάται από τη σχέση που υφίσταται ανάμεσα στο μέτρο της δύναμης F και της τριβής T .

Ανεξάρτητα όμως από τη μεταφορική κατάσταση του στερεού εφόσον έχουμε στρωφική ισορροπία η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο μάζας του στερεού θα είναι μηδέν.

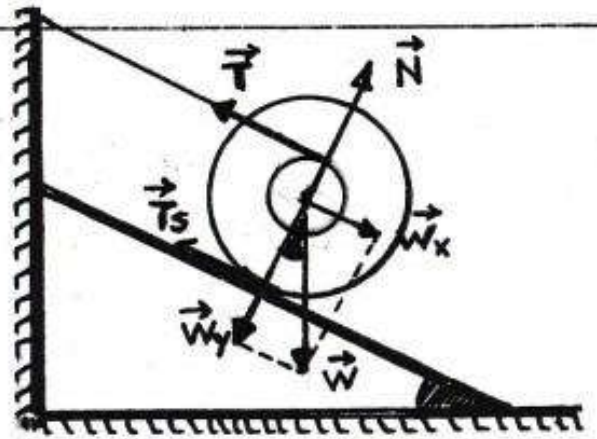
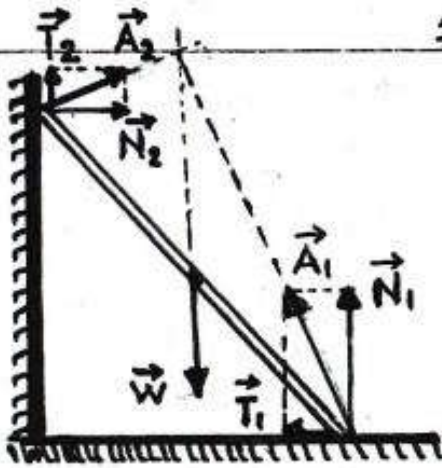
Έτσι, αν ο φορέας της δύναμης F δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού, τότε και ο φορέας της κάθετης αντιδράσης N δε διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι μετατοπισμένος έτσι, ώστε η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο μάζας να είναι μηδέν.

Επειδή ο φορέας της κάθετης αντιδράσης N δεν μπορεί να βρίσκεται έξω από τη βάση στήριξης του στερεού, αύξηση του μέτρου της δύναμης F έχει σαν αποτέλεσμα την απομάκρυνση του φορέα της N από το κέντρο μάζας μέχρι αυτός να φτάσει στην άκρη της βάσης στήριξης, οπότε έχουμε ανατροπή.

7. Παραδείγματα σχεδιασμού δυνάμεων σε διάφορα συστήματα σωμάτων.



13.



A. Ziegler