§4-1,4-2 Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων

Υλικό σημείο: Το υλικό σημείο ορίζεται ως σώμα που έχει όλες τις ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις.

Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις.

Στην πραγματικότητα, όλα τα σώματα έχουν διαστάσεις και γι' αυτό, εκτός από το να εκτελούν μεταφορική κίνηση, μπορούν να αλλάζουν και προσανατολισμό στο χώρο, να εκτελούν δηλαδή **(περι) στροφική κίνηση** ή, ακόμη **και σύνθετη κίνηση**, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

Μηχανικό στερεό (rigid body): Το μηχανικό στερεό ορίζεται ως στερεό σώμα που δεν παραμορφώνεται όταν του ασκούνται δυνάμεις.

Πρόκειται για υποθετικό στερεό το οποίο ορίζεται στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε τη μελέτη της κίνησης και της ισορροπίας των στερεών σωμάτων και στο κεφάλαιο αυτό όπου αναφερόμαστε σε στερεό σώμα θα εννοούμε μηχανικό στερεό.

Α. η Μεταφορική κίνηση.

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση αλλάζει διαρκώς θέση στο χώρο, δηλαδή αλλάζει θέση ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς.

Η μεταφορική κίνηση ενός στερεού χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι:

α. ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του στερεού μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.

Β. κάθε στιγμή όλα τα υλικά σημεία του στερεού έχουν την ίδια ταχύτητα.

Η κοινή αυτή ταχύτητα λέγεται και <u>ταχύτητα του μεταφερόμενου σώματος</u> ή <u>μεταφορική ταχύτητα του σώματος $\vec{υ}_{cm}$</u>.

Κάθε χρονική στιγμή η μεταφορική κίνηση αναφέρεται τόσο στο κινούμενο στερεό σώμα όσο και σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς.

<u>Τα μεγέθη που περιγράφουν τη μεταφορική κίνηση ενός στερεού σώματος είναι:</u>

1. <u>η θέση $\vec{x}$</u>, που είναι το διανυσματικό μέγεθος με το οποίο προσδιορίζεται το σημείο στο οποίο βρίσκεται το στερεό ή πιο συγκεκριμένα ένα υλικό σημείο του στερεού.

Η θέση $\vec{x}$ παριστάνεται με ένα διάνυσμα που έχει σαν αρχή την αρχή των συντεταγμένων και τέλος το σημείο στο οποίο βρίσκεται το στερεό σώμα, δηλαδή το συγκεκριμένο υλικό σημείο του στερεού.

2. <u>η μετατόπιση $\Delta\vec{x}$</u>, που παριστάνεται με το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχική θέση $\vec{x}_1$ ενός υλικού σημείου του στερεού και ως τέλος την τελική θέση $\vec{x}_2$ του ίδιου σημείου του στερεού. Είναι $\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$, και εφόσον τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ είναι συγγραμμικά, δηλαδή η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη, είναι $\Delta x = x_2 - x_1$.

3. <u>η ταχύτητα $\vec{υ}_{cm} = \Delta\vec{x}/\Delta t$</u>, που είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης, δηλαδή της μετατόπισης του στερεού.

4. <u>η επιτάχυνση $\vec{a}_{cm} = \Delta\vec{υ}_{cm}/\Delta t$</u>, που είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Χαρακτηρίζεται ως μεταφορική επιτάχυνση ή επιτάχυνση του μεταφερόμενου σώματος. Πρόκειται για την κοινή επιτάχυνση όλων των υλικών σημείων του στερεού.

Η μεταφορική κίνηση μπορεί να είναι ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη και ανάλογα με το είδος της κίνησης ισχύουν και οι αντίστοιχες σχέσεις $υ$-t και x-t που την περιγράφουν.

Οι σχέσεις αυτές μας είναι γνωστές.

Π.χ στην περίπτωση της Ε.Ο.Κίνησης ενός στερεού, στην οποία τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα, ή πιο συγκεκριμένα ένα υλικό σημείο σημείο του σώματος βρίσκεται στη θέση $X_0=0$, για τη θέση x του ίδιου υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ισχύει ότι $x=υ\cdot t$.

Β. Η (Περι)στροφική κίνηση.

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί στροφική κίνηση αλλάζει διαρκώς προσανατολισμό στο χώρο.

Η στροφική κίνηση ενός στερεού χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι τα υλικά σημεία του στερεού εκτελούν κυκλικές κινήσεις που τα κέντρα τους βρίσκονται πάνω σε μία συγκεκριμένη ευθεία η οποία διαπερνά το στερεό και λέγεται άξονας περιστροφής.

Κάθε χρονική στιγμή η στροφική κίνηση αναφέρεται τόσο στο σώμα που περιστρέφεται όσο και σε συγκεκριμένο άξονα.

Τα μεγέθη που περιγράφουν τη στροφική κίνηση στερεού σώματος ως προς συγκεκριμένο άξονα περιστροφής και τα οποία έχουν την ίδια τιμή για όλα τα υλικά σημεία του στερεού – εκτός από τα υλικά σημεία του στερεού που τυχόν ανήκουν στον άξονα περιστροφής τα οποία κατά τη στροφική κίνηση του στερεού παραμένουν ακίνητα – είναι:

1. η γωνιακή θέση $\vec{\theta}$, που είναι το φυσικό μέγεθος με το οποίο προσδιορίζεται την κάθε χρονική στιγμή ο προσανατολισμός του στερεού ή πιό συγκεκριμένα ενός υλικού σημείου του στερεού που δεν ανήκει στον άξονα περιστροφής.

Το μέγεθος γωνιακή θέση είναι διανυσματικό που η τιμή του, την κάθε χρονική στιγμή, ισούται με την τιμή της γωνίας που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τη θέση του υλικού σημείου αναφοράς με το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του, με σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του υλικού σημείου αναφοράς και είναι κάθετος στον άξονα περιστροφής.

2. η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\vec{\theta}$, που είναι το διανυσματικό φυσικό μέγεθος που η τιμή του είναι ίση με την τιμή της γωνίας που διαγράφει σε χρονικό διάστημα Δt το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τη θέση ενός υλικού σημείου του στερεού με το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του. Έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής, και φορά που προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Περιγράφει "το πόσο" στρέφεται αλλά και το "πρός τα πού" στρέφεται το στερεό.

3. η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=\Delta\vec{\theta}/\Delta t$, που είναι το φυσικό μέγεθος που η τιμή του ισούται με ρυθμό μεταβολής της γωνιακής θέσης του στερεού. Είναι μέγεθος διανυσματικό που έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά που προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Περιγράφει το "πόσο γρήγορα" αλλά και το "πρός τα πού" στρέφεται το στερεό.

4. η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma=\Delta\vec{\omega}/\Delta t$, που είναι το διανυσματικό φυσικό μέγεθος που η τιμή του ισούται με το ρυθμό μεταβολής της

γωνιακής ταχύτητας του στερεού. Έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά ίδια ή αντίθετη προς τη φορά της γωνιακής ταχύτητας, εφόσον η στροφική κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη αντίστοιχα.

Περιγράφει το "πόσο γρήγορα" μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα του στρεφόμενου στερεού και το αν συμβαίνει αύξηση ή ελάττωση της τιμής της.

Σε κάθε χρονική στιγμή λοιπόν το στρεφόμενο στερεό έχει γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση.

Παρατηρήσεις

α. Αν <u>η γωνιακή ταχύτητα</u> ενός στρεφόμενου στερεού <u>είναι σταθερή</u> λέμε ότι το στερεό εκτελεί <u>**ομαλή στροφική κίνηση**</u>.

<u>Στην ομαλή στροφική κίνηση ισχύει ότι:</u>

1. $\alpha_\gamma = 0$.

2. $\omega = \Delta\phi/\Delta t$: σταθ., οπότε:

I. αν $\Delta t = T$ θα είναι και $\Delta\phi = 2\pi$.
Επομένως $\boxed{\omega = 2\pi/T}$

II. $\omega = (\phi - \phi_0)/(t - t_0)$, επομένως στην περίπτωση που τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι και $\phi_0 = 0$ θα είναι $\boxed{\omega = \phi/t \leftrightarrow \phi = \omega t}$, όπου ϕ η γωνιακή μετατόπιση του στερεού τη χρονική στιγμή t.

β. Αν <u>η γωνιακή επιτάχυνση</u> ενός στρεφόμενου στερεού είναι σταθερή λέμε ότι το στερεό εκτελεί <u>**ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση**</u>.

<u>Στην ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση ισχύει ότι:</u>

$\vec{\alpha}_\gamma = \Delta\vec{\omega}/\Delta t = (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)/\Delta t \leftrightarrow$

$\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 = \vec{\alpha}_\gamma \Delta t \leftrightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}_\gamma \Delta t$ και επειδη τα διανύσματα $\vec{\omega}, \vec{\omega}_o, \vec{\alpha}_\gamma$ είναι συγγραμμικά, αν θεωρήσουμε θετική την κατεύθυνση της $\vec{\omega}$ θα είναι:

$\boxed{\omega = \omega_o + \alpha_\gamma t}$ $(t_o=0)$ στην Ο.Επιτ.Σ.Κ,

$\boxed{\omega = \omega_o - \alpha_\gamma t}$ $(t_o=0)$ στην Ο.Επιβ.Σ.Κ.

Στην Ο.Επιτ.Σ.Κ εφόσον $\omega_o=0$ και $t_o=0$

$\boxed{\omega = \alpha_\gamma t}$

γ. Τα μεγέθη που περιγράφουν τη στροφική κίνηση ενός στερεού περιγράφουν επίσης και την κυκλική κίνηση των υλικών σημείων του στερεού.

Όμως, για την περιγραφή της κυκλικής κίνησης ενός υλικού σημείου είναι απαραίτητα και τα μεγέθη:

1. η επιτρόχια - γραμμική - μετατόπιση $\Delta\vec{S}$, που η τιμή της αντιστοιχεί στο μήκος του τόξου που διαγράφεται από το υλικό σημείο σε χρονικό διάστημα Δt.

Η επιτρόχια μετατόπιση ΔS συνδέεται με τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\phi$ του υλικού σημείου μέσω της σχέσης $\Delta\phi = \Delta S/R$ rad $\longleftrightarrow$ $\Delta S = \Delta\phi \cdot R$, όπου R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς _ 1rad αντιστοιχεί σε τόξο μήκους R _.

2. η επιτρόχια - γραμμική - ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\varepsilon\pi} = \Delta\vec{S}/\Delta t$ που η τιμή της ισούται με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της επιτρόχιας μετατόπισης.

Η επιτρόχια ταχύτητα είναι διάνυσμα εφαπτόμενο στην κυκλική τροχιά στο σημείο που βρίσκεται κάθε στιγμή το υλικό σημείο, και φορά κατά τη φορά της κίνησης.

Το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας συνδέεται με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας μέσω της σχέσης $\boxed{\upsilon_{\varepsilon\pi} = \omega R}$

Είναι $\upsilon_{\varepsilon\pi} = dS/dt = d\phi \cdot R/dt = (d\phi/dt)R = \omega R$.

3. η επιτρόχια-γραμμική- επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}_{\varepsilon\pi}}{\Delta t}$, που η τιμή της ισούται με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της επιτρόχιας ταχύτητας.

Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα της επιτρόχιας ταχύτητας, αν το μέτρο της $\upsilon_{\varepsilon\pi}$ αυξάνεται. και αντίθετη κατεύθυνση, αν το το μέτρο της $\upsilon_{\varepsilon\pi}$ μειώνεται.

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης συνδέεται με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης μέσω της σχέσης $\boxed{\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_\gamma \cdot R}$

Είναι $\alpha_{\varepsilon\pi}=d\upsilon_{\varepsilon\pi}/dt = d\omega\cdot R/dt=(d\omega/dt)R=\alpha_\gamma R$.

4. η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$, που η τιμή της ισούται με το ρυθμό μεταβολής της επιτρόχιας ταχύτητας.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι διάνυσμα με διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της επιτρόχιας ταχύτητας και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης συνδέεται με το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας μέσω της σχέσης $\boxed{\alpha_\kappa = \upsilon_{\varepsilon\pi}^2/R = \omega^2 R}$

5. η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ της κυκλικής κίνησης, που είναι η συνισταμένη των παραπάνω επιταχύνσεων και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση,

$$\boxed{\alpha=\sqrt{\alpha_{\varepsilon\pi}^2+\alpha_\kappa^2}}$$

Απο όσα αναφέρθηκαν παραπάνω είναι φανερό ότι τα υλικά σημεία ενός στρεφόμενου στερεού δεν έχουν την ίδια ταχύτητα -$\upsilon=\omega R$-.

Η έννοια ταχύτητα στρεφόμενου στερεού δεν μπορεί να υπάρξει.

Το ίδιο συμβαίνει και με την έννοια επιτάχυνση στρεφόμενου σώματος.

Οι αντίστοιχες έννοιες/μεγέθη που έχουν έχουν επινοηθεί για την περιγραφή της στροφικίνησης είναι η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση.

Προσοχή

Η στροφική κίνηση ενός στερεού δεν είναι κυκλική κίνηση.

Όταν ένα στερεό εκτελεί κυκλική κίνηση, η οποία είναι μεταφορική κίνηση σε κυκλική τροχιά, με κέντρο ένα σημείο **O** λέμε ότι το στερεό περιφέρεται γύρω από το **O** και όχι ότι περιστρέφεται γύρω από το O. Π.χ λέμε ότι η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο ή ότι τα ηλεκτρόνια περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα ενός ατόμου.

Γ. Η Σύνθετη κίνηση

Η σύνθετη κίνηση ενός στερεού σώματος αποτελεί συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης. Δηλαδή, στη σύνθετη κίνηση το στερεό μετακινείται – αλλάζει θέση – στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει και ο προσανατολισμός του.

Στη σύνθετη κίνηση ο άξονας περιστροφής δεν είναι σταθερός αλλά εκτελεί μεταφορική κίνηση.

Κάθε σύνθετη κίνηση μπορεί να μελετηθεί με βάση την αρχή της επαλληλίας – ανεξαρτησίας – των κινήσεων ως συνδυασμός μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

• Μία χαρακτηριστική περίπτωση σύνθετης κίνησης είναι η κύλιση ενός τροχού χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση.

Τέτοια κίνηση κάνει π.χ ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν το αυτοκίνητο κινείται.

Στην περίπτωση αυτή ο τροχός, όπως συμβαίνει και με το σώμα του αυτοκινήτου, αλλάζει θέση στο χώρο – μεταφορική κίνηση – και ταυμε την επιφάνεια κύλισης.

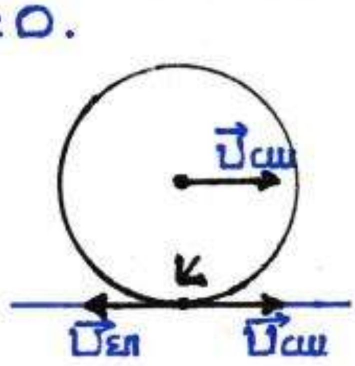
Αποδεικνύεται ότι κατά την κύλιση ενός τροχού χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση:

α. Η μεταφορική ταχύτητα U_{cm} – η ταχύτητα του κέντρου μάζας – του τροχού είναι κατά μέτρο ίση με την επιτρόχια – γραμμική – ταχύτητα $U_{επ}$ των υλικών σημείων του περιμετρικού κύκλου του τροχού – του πέλματος του τροχού – λόγω της περιστροφικής κίνησής του.

β. Όταν, λόγω μεταφορικής κίνησης, ο τροχός επιταχύνεται, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του $α_{cm}$ είναι κατά μέτρο ίση με την επιτρόχια – γραμμική – επιτάχυνση $α_{επ}$ που έχουν τα υλικά σημεία του περιμετρικού κύκλου του τροχού λόγω της ταυτόχρονης (περι)στροφικής κίνησής του.

Απόδειξη

α. (1ος τρόπος). Όταν ο τροχός κυλάει χωρίς να να ολισθαίνει, τότε η ταχύτητα του κατώτερου υλικού σημείου Κ του περιμετρικού κύκλου του τροχού είναι μηδέν, δηλαδή $U_K = 0$.



Όμως, το υλικό σημείο Κ του τροχού έχει κάθε στιγμή, λόγω μεταφορικής κίνησης, μεταφορική ταχύτητα $\vec{U}_{cm}$ και λόγω ταυτόχρονης στροφικής κίνησης επιτρόχια ταχύτητα $\vec{U}_{επ}$.

Είναι $\vec{U}_{cm} \uparrow\downarrow \vec{U}_{επ}$, οπότε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων είναι $\vec{U}_K = \vec{U}_{cm} + \vec{U}_{επ} = 0 \leftrightarrow \vec{U}_{cm} = -\vec{U}_{επ} \rightarrow U_{cm} = U_{επ}$.

(2ος τρόπος).

Κατά την κύλιση κάθε υλικό σημείο του περιμετρικού κύκλου του τροχού έρχεται διαδοχικά σ' επαφή με την επιφάνεια κύλισης. Έτσι, όταν ο τροχός σε χρόνο dt μετακινηθεί κατά dS λόγω μεταφορικής κίνησης, ένα υλικό σημείο Α του περιμετρικού κύκλου του τροχού θα διαγράψει κατά τόμε την επιφάνεια κύλισης.

Αποδεικνύεται ότι κατά την κύλιση ενός τροχού χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση:

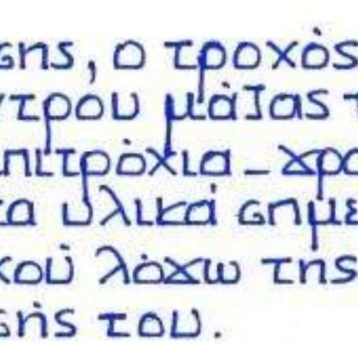
α. Η μεταφορική ταχύτητα υ_{cm} – η ταχύτητα τού κέντρου μάζας – του τροχού είναι κατά μέτρο ίση με την επιτρόχια – γραμμική – ταχύτητα $\upsilon_{επ}$ των υλικών σημείων του περιμετρικού κύκλου του τροχού – του πέλματος του τροχού – λόγω της περιστροφικής κίνησής του.

β. Όταν, λόγω μεταφορικής κίνησης, ο τροχός επιταχύνεται, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας τού α_{cm} είναι κατά μέτρο ίση με την επιτρόχια – γραμμική – επιτάχυνση $\alpha_{επ}$ που έχουν τα υλικά σημεία του περιμετρικού κύκλου του τροχού λόγω της ταυτόχρονης (περι)στροφικής κίνησής του.

Απόδειξη

α. (1ος τρόπος). Όταν ο τροχός κυλάει χωρίς να να ολισθαίνει, τότε η ταχύτητα του κατώτερου υλικού σημείου Κ του περιμετρικού κύκλου τού τροχού είναι μηδέν, δηλαδή $\upsilon_K = 0$.

Όμως, το υλικό σημείο Κ τού τροχού έχει κάθε στιγμή, λόγω μεταφορικής κίνησης, μεταφορική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ και λόγω ταυτόχρονης στροφικής κίνησης επιτρόχια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{επ}$.

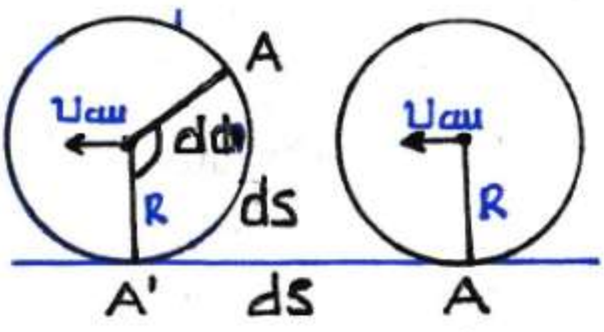


Είναι $\vec{\upsilon}_{cm} \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}_{επ}$, οπότε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων είναι $\vec{\upsilon}_K = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{επ} = 0 \leftrightarrow \vec{\upsilon}_{cm} = -\vec{\upsilon}_{επ} \rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_{επ}$.

(2ος τρόπος).

Κατά την κύλιση κάθε υλικό σημείο του περιμετρικού κύκλου του τροχού έρχεται διαδοχικά σ' επαφή με την επιφάνεια κύλισης. Έτσι, όταν ο τροχός σε χρόνο dt μετακινηθεί κατά dS λόγω μεταφορικής κίνησης, ένα υλικό σημείο Α του περιμετρικού κύκλου του τροχού θα διαγράψει κατά τόξο μήκους dS επίσης, στο οποίο όμως αντιστοιχεί επίκεντρη γωνία $d\phi = dS/R \leftrightarrow dS = d\phi \cdot R$.

Είναι $υ_{cm} = dS/dt$, οπότε $υ_{cm} = (d\phi \cdot R)/dt \leftrightarrow$ $\underline{υ_{cm} = (d\phi/dt)\cdot R = ω\cdot R \ (1)}$, όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα, λόγω ταυτόχρονης (περι)στροφικής κίνησης, του τροχού.



Εξ ορισμού είναι $υ_{επ} = dS/dt$, όπου dS το μήκος του τόξου που διαγράφει το υλικό σημείο A σε χρόνο dt.

Είναι $dS = d\phi \cdot R$, όπου dφ η γωνιακή μετατόπιση του υλικού σημείου A σε χρόνο dt.

Άρα $\underline{υ_{επ} = (d\phi \cdot R)/dt = ωR \ (2)}$.

Από τις (1) και (2) $\rightarrow$ $\boxed{υ_{cm} = υ_{επ} = ω \cdot R}$

B. Όταν ο τροχός κατά την κύλισή του, λόγω μεταφορικής κίνησης επιταχύνεται, η γωνιακή του ταχύτητα ω, λόγω της ταυτόχρονης περιστροφικής του κίνησης, μεταβάλλεται.

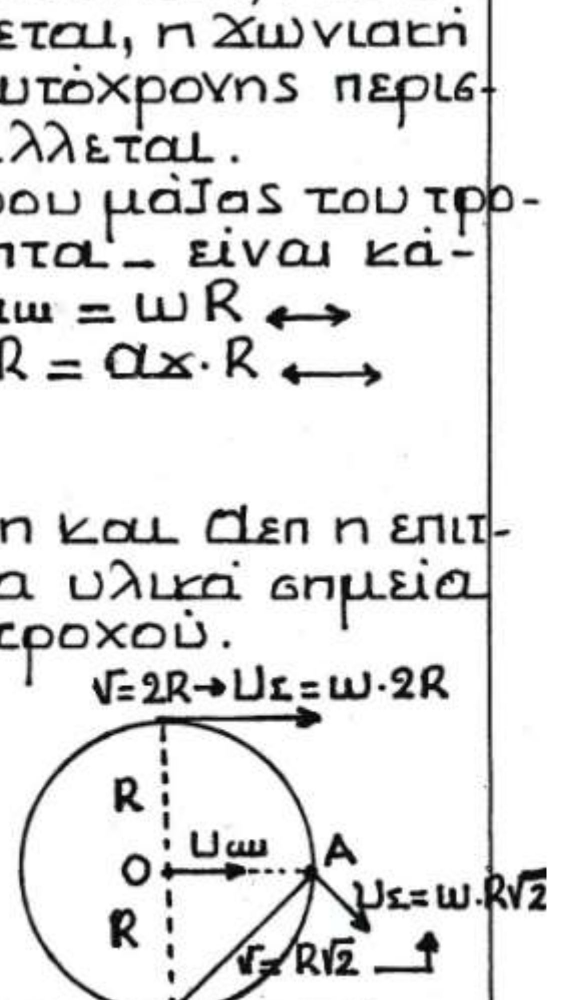
Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού – η μεταφορική του ταχύτητα – είναι κάποια στιγμή $υ_{cm}$ θα είναι $υ_{cm} = ωR \leftrightarrow$
$dυ_{cm}/dt = d(ω\cdot R) = (dω/dt)\cdot R = a_γ \cdot R \leftrightarrow$

$$\boxed{a_{cm} = a_γ \cdot R = a_{επ}},$$

όπου $a_γ$ η γωνιακή επιτάχυνση και $a_{επ}$ η επιτρόχια επιτάχυνση που έχουν τα υλικά σημεία του περιμετρικού κύκλου του τροχού.

Σημείωση

Η περίπτωση του τροχού που κάνει σύνθετη κίνηση – κύλιση χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση – μπορεί να αντιμετωπιστεί και ως πρόβλημα στροφικής κίνησης περί στιγμιαίο άξονα που συμπίπτει με την ευθεία που ενώνει τα



σημεία επαφής του τροχού με το επίπεδο κύλισης, με γωνιακή ταχύτητα ω, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.

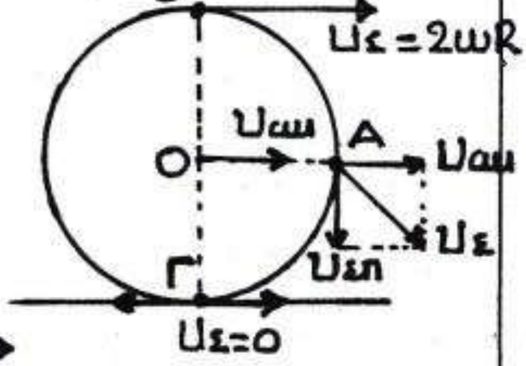
Η συνισταμένη ταχύτητα $υ_ε$, για τη σύνθετη κίνηση των υλικών σημείων του περιμετρικού κύκλου του τροχού θα είναι τότε ίση με την επιτρόχια – γραμμική – ταχύτητα λόγω της θεωρούμενης στροφικής κίνησης περί τον στιγμιαίο άξονα που προαναφέραμε.

Επομένως, $υ_ε = ωr$, όπου r η απόσταση κάθε υλικού σημείου από το στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Π.χ. $υ_ε(A) = ω \cdot r_A$.

Είναι $r_A^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \longrightarrow r_A = R\sqrt{2}$, οπότε

$\underline{υ_ε(A) = ωR\sqrt{2}}$.

Για το ίδιο θέμα αν εργαστούμε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων.



Σύμφωνα με την εν λόγω αρχή σε κάθε περίπτωση είναι $\vec{υ}_ε = \vec{υ}_{επ} + \vec{υ}_{cm}$, οπότε:

1. επειδή στο Α είναι $\vec{υ}_{cm} \perp \vec{υ}_{επ}$
$\longrightarrow υ_ε(A) = \sqrt{υ_{cm}^2 + υ_{επ}^2} = \sqrt{2υ_{cm}^2} \longrightarrow$
$\underline{υ_ε(A) = υ_{cm}\sqrt{2} = ωR\sqrt{2}}$.

2. επειδή στο Β είναι $\vec{υ}_{cm} \uparrow\uparrow \vec{υ}_{επ} \longrightarrow$
$\underline{υ_ε(B) = υ_{cm} + υ_{επ} = 2υ_{cm} = 2ωR}$.

3. επειδή στο Γ είναι $\vec{υ}_{cm} \uparrow\downarrow \vec{υ}_{επ} \longrightarrow \underline{υ_ε(Γ) = 0}$

το Κέντρο μάζας

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο στη θέση του οποίου αν βρισκόταν ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του στερεού θα κινούνταν όπως αν σ' αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Παρατηρήσεις

1. Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών

σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Π.χ το κέντρο μάζας μιας ομογενούς σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας

2. Το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα _ να μην είναι σημείο του σώματος_.

Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου, το κέντρο μάζας του οποίου βρίσκεται στο κέντρο του.

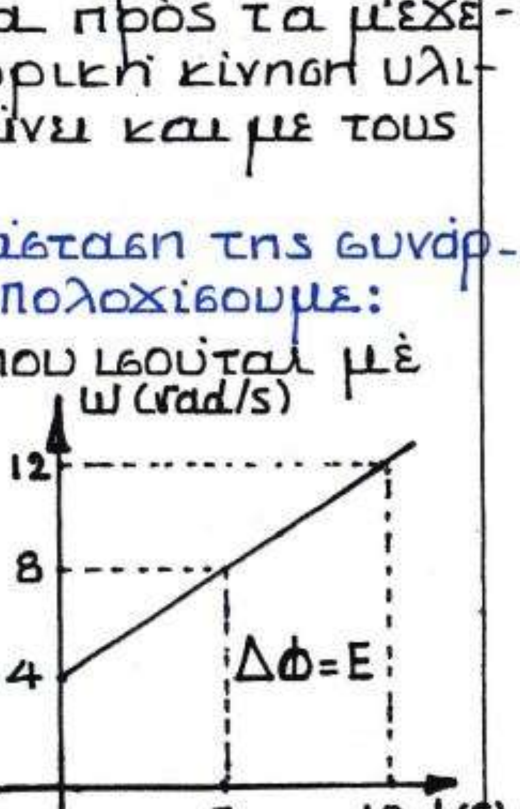
3. Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο βάρους του, το σημείο δηλαδή από το οποίο διέρχεται πάντοτε ο φορέας του βάρους του σώματος όπως και να τοποθετηθεί το σώμα.

Βασικές παρατηρήσεις για την επίλυση ασκήσεων

1. Η στροφική κίνηση στερεού σώματος περιγράφεται με μεγέθη αντίστοιχα προς τα μεγέθη που περιγράφουν τη μεταφορική κίνηση υλικού σημείου ενώ το ίδιο συμβαίνει και με τους νόμους που ισχύουν.

Έτσι, από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega = f(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση που ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης σε μία χρονική στιγμή.



Στην περίπτωση που η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, οπότε το διάγραμμα της $\omega = f(t)$ είναι ευθεία μπορούμε να θεωρήσουμε δύο χρονικές στιγμές και να γράψουμε:

$\alpha_\gamma = \Delta\omega/\Delta t = (\omega_2-\omega_1)/(t_2-t_1)$.

β. Τη γωνιακή μετατόπιση που ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν της επιφάνειας πού ορίζεται από τον άξονα του χρόνου και το τμήμα του διαγράμματος πού οριοθετείται από τα σημεία του πού αντιστοιχούν στην αρχική και στην τελική χρονική στιγμή.

γ. Τον αριθμό N των περιστροφών του στερεού σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt ο οποίος υπολογίζεται μέσω της σχέσης $N = \Delta\phi/2\pi$. όπου $\Delta\phi$ η γωνιακή μετατόπιση του στερεού στο χρονικό διάστημα Δt.

Ειδικά στην περίπτωση της ομαλής στροφικής κίνησης, όπου η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, οπότε και η συχνότητα περιστροφής είναι σταθερή μπορούμε να γράψουμε ότι

$$N = \Delta\phi/2\pi = \omega\cdot\Delta t/2\pi = 2\pi f\cdot\Delta t/2\pi \leftrightarrow$$

$$\underline{N = f\cdot\Delta t}$$

Α.Ζικτηρά

Παράδειγμα

Από το παραπάνω διάγραμμα να υπολογίσετε:

α. τη γωνιακή επιτάχυνση.

β. τον αριθμό των περιστροφών στο χρονικό διάστημα από το 5s έως το 10s.

Απάντηση

α. Είναι $\alpha_\gamma = \Delta\omega/\Delta t = (\omega_2-\omega_1)/(t_2-t_1) \rightarrow$
$\alpha_\gamma = (12-8)/(10-5) = 4/5 \rightarrow \alpha_\gamma = 0.8 rad/s^2$

β. Είναι $N = \Delta\phi/2\pi$ (1).
$\Delta\phi = E = (12+8)\cdot 5/2 = 50 rad$, οπότε
από την (1) $\rightarrow N = 50/2\pi = 25/\pi$ στροφές.

Προσοχή

Κατά την κύλιση ενός τροχού χωρίς ολίσθηση ισχύουν οι σχέσεις:

Μετατόπιση κέντρου μάζας $\underline{S_{cm} = N\cdot 2\pi R}$.

Αν ω: σταθ $\rightarrow$ υ_{cm}: σταθ, οπότε $\underline{S_{cm} = \upsilon_{cm} t}$.

Α.Ζικτηρά